# SZIMMETRIKUS STRUKTÚRÁK



**Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat**

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Szőnyi Tamás

# SZIMMETRIKUS STRUKTÚRÁK




**Eötvös Loránd Tudományegyetem**
**Természettudományi Kar**

**Typotex**

**2013**

© 2013–2018, Dr. Szőnyi Tamás, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Lektorálta: Dr. Wettl Ferenc

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 258 3
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gindilla Orsolya

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.




KULCSSZAVAK: Illeszkedési struktúra, blokkrendszer, t-rendszer, Fisher-egyenlőtlenség, négyzetes blokkrendszer, erősen reguláris gráf, távolságreguláris gráf, differenciahalmaz, hibajavító kód, perfekt kód, MDS kód, Golay-kód.

ÖSSZEFOGLALÁS: A jegyzet bevezetést nyújt a szimmetrikus struktúrák és a hibajavító kódok elméletébe. A legáltalánosabb struktúrák, az illeszkedési struktúrák tárgyalásától indulva megismertet a blokkrendszerekkel és azok különböző változataival, valamint erősen reguláris gráfokkal és általánosításaikkal. Fontos szerepet kaptak olyan extremális kombinatorikai eredmények is, amelyeknél az extremális példa szimmetrikus struktúrához vagy gráfhoz kapcsolódik. Ugyancsak tárgyaljuk blokkrendszerek és erősen reguláris gráfok kapcsolatát. A kódelméleti részben megismerkedünk a Golay-kódokkal is. A jegyzet fontos célja a lineáris algebrai módszerek több kombinatorikai alkalmazásának bemutatása is. A klasszikus eredményeken kívül igyekszünk egy-egy igazán friss eredményt is érinteni (bár az egész terület viszonylag friss).

# Tartalomjegyzék

**Előszó** **1**

**1. Illeszkedési struktúrák** **3**
1.1. Projektív és affin síkok és terek . . . . . 3
1.2. Illeszkedési struktúrák . . . . . 8
1.3. Feladatok . . . . . 16

**2. Lineáris terek** **17**
2.1. A de Bruijn–Erdős-tétel és környéke . . . . . 17
2.2. Feladatok . . . . . 30

**3. Blokkrendszerek** **31**
3.1. Alapvető tulajdonságok és példák . . . . . 31
3.2. Feladatok . . . . . 39

**4. A Fisher-egyenlőtlenség** **41**
4.1. A Fisher-egyenlőtlenség blokkrendszerekre . . . . . 41
4.2. A Fisher-egyenlőtlenség általánosításai . . . . . 43
4.3. Feladatok. . . . . 49

**5. $t$-rendszerek** **51**
5.1. Alapvető tulajdonságok . . . . . 51
5.2. Feladatok . . . . . 54

**6. Négyzetes blokkrendszerek** **57**
6.1. Alapvető tulajdonságok . . . . . 57
6.2. Hadamard blokkrendszerek . . . . . 62
6.3. Bisíkok . . . . . 66
6.4. Feladatok . . . . . 69

**7. Blokkrendszerek konstrukciói** **71**

7.1. Derivált, reziduális blokkrendszerek . . . . . 71
7.2. Négyzetes blokkrendszerek polaritásai . . . . . 75
7.3. Feladatok . . . . . 77

**8. Erősen reguláris gráfok** **79**
8.1. Alapvető tulajdonságok . . . . . 79
8.2. További korlátok . . . . . 87
8.3. Erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek . . . . . 91
8.4. Erősen reguláris gráfokkal kapcsolatos tételek . . . . . 98
8.5. Távolságreguláris gráfok . . . . . 103
8.6. Feladatok . . . . . 108

**9. Differenciahalmazok** **111**
9.1. Differenciahalmazok, multiplikátorok . . . . . 111
9.2. Feladatok . . . . . 120

**10. Lineáris kódok** **123**
10.1. Alapvető fogalmak, perfekt kódok . . . . . 123
10.2. A Golay-kódok . . . . . 138
10.3. A Witt-féle blokkrendszerek . . . . . 147
10.4. Feladatok . . . . . 149

**Irodalomjegyzék** **152**

# Előszó

A jelen jegyzet alapja a kilencvenes évek elején jött létre. Ekkor, elsősorban a Bolyai Network című TEMPUS projekt keretében több külföldi vendég tartott előadásokat az ELTE-n. A Szimmetrikus struktúrák oktatása néhány évvel korábban kezdődött. Az előadók között szerepelt Klaus Metsch (Giessen), Albrecht Beutelspacher (Giessen), Frank De Clerck (Gent), Marialuisa de Resmini (Róma), Aart Blokhuis (Eindhoven), Jaap Seidel (Eindhoven), Dieter Jungnickel (Augsburg, akkor Giessen), Dan Hughes (London). Tulajdonképpen a jelen jegyzet az ő előadásaikból nőtt ki. Ennél konkrétabban, a TEMPUS projekt keretében kiadtunk egy jegyzetet Szimmetrikus struktúrákról, amelynek szerzői Frank De Clerck, Károlyi Gyula, és Marialuisa de Resmini voltak. Ezek közül számunkra Frank De Clerck és Marialuisa de Resmini oktatási anyaga volt különösen hasznos. A jelen jegyzet felépítése nagyobbrészt Frank De Clerck *Introduction to the theory of designs* c. jegyzetét követi, a Steiner rendszerek tárgyalásakor Marialuisa de Resmini *Introduction to Steiner systems* c. jegyzetét használtuk. Ezekre a jegyzetekre nem hivatkozunk explicite. A differenciahalmazokról szóló fejezetben Dieter Jungnickel előadásait követjük. Már a szóban forgó jegyzetek is, de sok helyütt ez méginkább igaz a jelen jegyzetre, jelentősen támaszkodtak két alapvetően fontos könyvre: egyrészt gyakran követjük Hughes és Piper *Design theory* [34] könyvét, másrészt a Cameron, van Lint féle *Graphs, codes designs and their links* [16] című könyvét. Bizonyos fejezetekben a tárgyalásunk lényegében ezeket a könyveket követi, így például a $t$-rendszerek, az erősen reguláris gráfok esetén [16]-t, a taktikus felbontások, illetve projektív terek karakterizálása esetén [34]-t követjük (ez utóbbi esetben a Frank De Clerck féle jegyzettel kombinálva). A de Bruijn–Erdős-tételről szóló fejezet lényegében Klaus Metsch előadásai, illetve *Linear spaces with few lines* [43] könyve alapján készült. Sok esetben ezek a részek kiegészítő anyagokat tartalmaznak, így kisebb betűkkel jeleztük ezt. Ugyancsak gyakran használtuk még a témakör alapművét, a Beth, Jungnickel, Lenz által írt *Design theory* című könyvet. Azoknál a részeknél, amikor hosszabban követjük valamelyik említett könyvet, ezt a szövegben is jelezzük. Ezekben az esetekben a jelölé-

seken sem változtattunk, azért, hogy az érdeklődő olvasó könnyebben tudjon további ismereteket szerezni az adott könyvből.

A jegyzet elsődleges célja a „*Kódelmélet és szimmetrikus struktúrák*" című mesterszakos óra jegyzettel való ellátása volt. Az elmúlt években ennek a kurzusnak a tematikája némileg formálódott, így például a kódelméleti részek nagyobb hangsúlyt kaptak. Ennek megfelelően az eredeti tervekhez képest ez a rész bővült, de igyekeztünk azokat az aspektusokat kiemelni, amelyek blokkrendszerekkel vagy geometriákkal kapcsolatosak. Lényegében teljesen kihagytuk a dekódolással kapcsolatos dolgokat. Erről a Győri, Györfi, Vajda féle *Információ- és kódelmélet* könyvben, valamint az Ivanyos Gábor honlapján található oktatási segédanyagban találhatunk anyagot. Ugyanez mondható el a forráskódolás témájáról is, amelyről szintén a fenti *Információ- és kódelmélet* könyvben olvashatunk. Ugyanakkor a szintén mesterszakos hallgatóknak tartott *Diszkrét matematika* című tárgy anyagába került bele viszonylag sok minden szimmetrikus struktúrákról, elsősorban erősen reguláris gráfokról (de Hadamard-mátrixokról és kódokról is). Így a jelen jegyzet ezen, előadásból és gyakorlatból álló, kurzus jelentős részéhez (legalább egyharmadához) is jól használható.

Gyakran használunk lineáris algebrai ismereteket, ezeket ismertnek tételezzük fel. Mivel kódelméletben az a szokás, hogy a vektorok sorvektorok, igyekeztünk ezt követni. A vektorokat kövér, a mátrixokat nagy latin betűkkel jelöljük. Ezen felül főleg csoportelméleti ismereteket használunk, itt Kiss Emil [39] könyvét ajánljuk. Blokkrendszerekkel kapcsolatban kétféle szokásos jelölés van, mi a $t$-$(v, k, \lambda)$ jelölést használjuk, nem az $S_\lambda(t, k, v)$-t. A bizonyítások végét a ■, a definícióét a □ jellel jeleztük.

A jegyzet elég sok geometriai ismeretet használ, de elsősorban motivációként, ezekkel kapcsolatban Kárteszi Ferenc *Bevezetés a véges geometriákba*, valamint Kiss György és Szőnyi Tamás *Véges geometriák* című könyvére utalunk.

A jegyzet mostani változata a TÁMOP -4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához projekt támogatásával készült, melyet ezúton is köszönünk.

Szeretném megköszönni Héger Tamás segítségét az ábrák elkészítésében, valamint Wettl Ferenc lektori munkáját.

# 1. fejezet

# Illeszkedési struktúrák

## 1.1. Projektív és affin síkok és terek

Ebben a szakaszban a projektív és affin síkokkal kapcsolatos alapismereteket tekintjük át. A felhasznált algebrai tények szerepelnek szinte minden standard algebra jegyzetben, ezekkel kapcsolatban Kiss Emil [39] könyvét ajánljuk.

**1.1.1. Definíció.** *Projektív sík*nak nevezünk egy $(\Pi, \Lambda)$ párt, ahol $\Pi$ nemüres halmaz (elemeit *pont*nak fogjuk nevezni), $\Lambda$ pedig $\Pi$ bizonyos részhalmazainak halmaza (elemeit *egyenes*nek mondjuk), ha eleget tesz az alábbi axiómáknak:

**Ax.1** $\Pi$ bármely két különböző pontjához egy és csak egy olyan egyenes található, amely mindkettőt tartalmazza.

**Ax.2** $\Lambda$ bármely két különböző egyeneséhez egy és csak egy olyan pont van $\Pi$-ben, amelyet mindkét egyenes tartalmaz.

**Ax.3** Létezik négy olyan pont $\Pi$-ben, amelyek közül semelyik hármat nem tartalmazza egy egyenes. □

Alkalmazzuk a szokásos geometriai terminológiát, „eleme” ill. „tartalmaz” helyett gyakran használjuk majd az „illeszkedik”, „átmegy”, „rajta van” stb. szemléletes kifejezéseket.

**1.1.2. Definíció.** Egy projektív sík véges, pontosabban szólva *$q$-adrendű*, ha a következő (végességi) axiómát is teljesíti:

**Ax.4** Van olyan egyenes ($\Lambda$-beli elem), amely $q+1$ pontot tartalmaz. □

Mielőtt továbblépünk, idézzük fel a $q$-adrendű véges projektív síkok néhány aritmetikai tulajdonságát:

(1) minden egyenesnek $q+1$ pontja van.

(2) minden pontot $q+1$ egyenes tartalmaz.

(3) a pontok és az egyenesek száma egyaránt $q^2+q+1$.

Axiómarendszerünk talán legismertebb modellje, a 7 pontból és 7 egyenesből álló Fano-sík (aholis $q=2$), l. később az 1.2.6, 1.2.8, 1.2.13. Példákat és a 1.2. ábrát. Jólismert tény, hogy tetszőleges testre (annak kommutativitásától függetlenül) mindig építhetünk projektív síkot. Az eljárás a klasszikus projektív geometriából ismert homogén koordináták bevezetésére épül.

Abban az esetben, ha a test véges, algebrából ismert tény, hogy elemszáma prímhatvány, és hogy minden prímhatványhoz egyetlen annyi elemet tartalmazó véges test van. Ezt a testet szokás *Galois-test*nek nevezni és $\mathrm{GF}(q)$-val jelölni. Természetesen, ha $q=p$ prím, akkor a test a modulo $p$ maradékosztályokból áll. Sok esetben elegendő erre a testre gondolni az állítások megértéséhez. Az eddigiek szerint tehát $q=p^h$, ahol $p$ prímszám, $h$ pedig természetes szám. A $p$ számot szokták a véges test *karakterisztikájá*nak nevezni, mert tetszőleges testelemet $p$-szer összeadva 0-t kapunk. A $\mathrm{GF}(q)$ véges test, ahol $q=p^h$ maga is tekinthető a $\mathrm{GF}(p)$ részteste (sőt akármilyen más részteste) feletti vektortérnek. $\mathrm{GF}(p^h)$ persze $h$ dimenziós vektortér $\mathrm{GF}(p)$ felett. Ezt a tényt a kódos fejezetben fogjuk használni. A $\mathrm{GF}(q)$ test minden elemére teljesül $x^q=x$ (ez a kis Fermat-tétel általánosítása), a $p$-edik hatványra emelés pedig a rossz diákok álma, $(a+b)^p=a^p+b^p$. Ez azt is mutatja, hogy a $p$-edik hatványra emelés automorfizmusa a testnek. Az összes automorfizmus leírható $x\mapsto x^{p^i}$ alakban, azaz megkapható a $p$-edik hatványra emelés ismétlésével. Szokták a $p$-edik hatványra emelést Frobenius-automorfizmusnak is nevezni. Még egy fogalomra lesz szükségünk véges testekre, amely a modulo $p$ kvadratikus maradék fogalmának általánosítása. Ha $q=2^h$, akkor a test minden eleme négyzete egy testelemnek (hiszen a négyzetreemelés automorfizmus), ha viszont $q$ páratlan, akkor a nemnulla elemek fele előáll valamely testelem négyzeteként, másik fele nem. Igazak a kvadratikus maradékokra megszokott dolgok: két négyzetelem szorzata négyzetelem, két nem-négyzetelem szorzata négyzetelem, egy négyzetelem és egy nem-négyzetelem szorzata nem-négyzetelem. Ez azt jelenti, hogy a véges test multiplikatív csoportjában a négyzetelemek 2 indexű részcsoportot alkotnak. A véges testek additív csoportja elemi Abel csoport, azaz minden elem (additív) rendje ugyanaz, a $p$ karakterisztika. Más szóval az additív csoport a modulo $p$ additív csoport $h$ tagú direkt összege. A multiplikatív csoport ciklikus (ez annak a ténynek az általánosítása, hogy modulo $p$ van primitív gyök), a négyzetelemek éppen a multiplikatív csoport egy generátorelemének (az ilyeneket szokás primitív elemnek nevezni) páros kitevős hatványai. Mivel a $\mathrm{GF}(q)$ test, ahol $q=p^h$, $h$-adfokú bővítése $\mathrm{GF}(p)$-nek, szükségünk lesz

a kódos fejezetben a testbővítésekkel kapcsolatos alapvető ismeretekre, például egy elem minimálpolinomjára, a minimálpolinom irreducibilitására stb. A véges testek konkrét előállítása megtalálható pl. Kárteszi [38] könyvének algebrai függelékében. A mostani összefoglalónak részletesen Kiss Emil [39] könyvében lehet utánanézni. A $\mathrm{GF}(q)$ testre épített projektív sík $q$-adrendű lesz, ezt a síkot $\mathrm{PG}(2,q)$-val fogjuk jelölni.

Tekintsük át röviden a homogén és inhomogén koordinátákkal kapcsolatos ismereteket. Először lássuk a homogén koordináták bevezetését:

Legyenek a „pontok" az $(x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{GF}(q)^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ vektorok ekvivalencia-osztályai az alábbi ekvivalencia-relációnál: $(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3)$, akkor és csak akkor ha van olyan $0 \neq \lambda \in \mathrm{GF}(q)$, amelyre $x_i = \lambda y_i$, $i = 1,2,3$. Az egyenesek az $\{(x_1,x_2,x_3) : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0\}$ alakú ponthalmazok. Így egy egyeneshez is hozzárendelhetünk homogén koordinátákat, ti. az $[u_1,u_2,u_3]$ homogén számhármast.

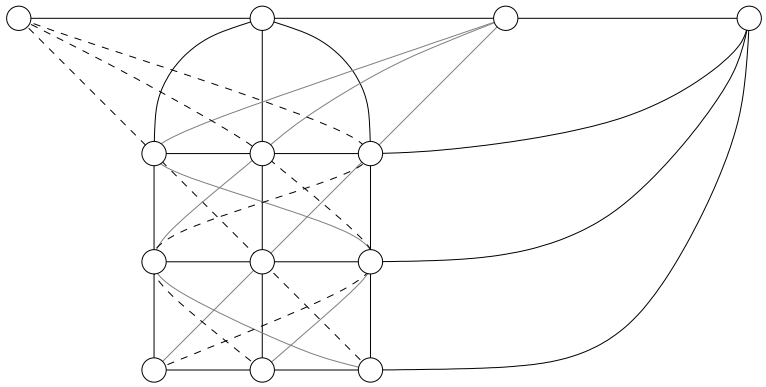
Geometriailag ezt nagyon könnyű elképzelni. Legyenek a pontok a háromdimenziós vektortér origón átmenő „egyenesei" (azaz egydimenziós alterei), az egyenesek pedig az origón átmenő „síkok" (azaz kétdimenziós alterek). Az illeszkedés természetesen a tartalmazás. Ekkor pont egy koordinátája az egyenes egy irányvektora, míg egyenesé az őt reprezentáló sík normálvektora. Ez sugallja is a rövid vektor-jelölést, mind pontra, mind egyenesre, az illeszkedés pedig valóban a skaláris szorzat nulla voltának felel meg.

**1.1.3. Tétel.** *A* $\mathrm{GF}(q)$ *véges testre a homogén koordináták segítségével egyértelműen építhetünk projektív síkot, melyet* $\mathrm{PG}(2,q)$*-val jelölünk.*

Hasonlóan a projektív síkokhoz, az affin síkokat is definiálhatnánk axiomatikusan. Ezt a rövidség kedvéért most nem tesszük meg (l. 1.1. feladatot), csupán azt jegyezzük meg, hogy egy „absztrakt" projektív síkból egy egyenes és annak pontjai törlésével kaphatunk „absztrakt" affin síkot. Természetesen ugyanúgy, mint a klasszikus geometriában nemcsak projektív, hanem affin síkot is építhetünk testekre. Ez a konstrukció is fontos lesz számunkra. Ezt a szokásos módon (a középiskolából ismert analitikus geometria mintájára) tehetjük meg, és mindaz amit ideális térelemekről valamint az affin és a homogén koordinátákról klasszikus geometriából ismerünk kiterjeszthető tetszőleges testre épített affin és projektív síkokra (l. például Coxeter, Kárteszi, illetve Radó–Orbán könyveit). A $\mathrm{GF}(q)$ véges testre épített affin síkot $\mathrm{AG}(2,q)$-val jelöljük. Mivel az $\mathrm{AG}(2,q)$ affin sík a $q$-adrendű $\mathrm{PG}(2,q)$-ból egy egyenes törlésével kapható, így a következő tételt könnyű belátni.

**1.1.4. Tétel.** $\mathrm{AG}(2,q)$*-ban minden egyenesnek* $q$ *pontja van, minden pontot* $q+1$ *egyenes tartalmaz, a pontok száma* $q^2$*, az egyenesek száma* $q^2+q$*.* ■

Eszerint tehát az $\mathrm{AG}(2,q)$ affin sík a $K = \mathrm{GF}(q)$ alaptestre épített kétdimenziós vektortér, az egyenesek az egydimenziós alterek és eltoltjaik. Idézzük



1.1. ábra. Harmadrendű affin sík projektív beágyazása

fel a homogén és inhomogén koordináták közti áttérést: az $(x, y)$ inhomogén koordinátájú pontnak az $(x, y,1)$ által reprezentált pont felel meg, míg az $(x, y, z)$, $(z \neq 0)$ pont inhomogén koordinátája $(x/z, y/z)$. Ha egy egyenes inhomogén egyenlete $Ax + By = C$, akkor az egyenes homogén koordinátái $[A, B, -C]$. Megfordítva, ha a homogén egyenlet $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, akkor az inhomogén egyenlet $u_1x + u_2y = -u_3$ (persze ez csak akkor értelmes, ha $u_1$ és $u_2$ valamelyike nem nulla.)

Érdemes megfogalmaznunk a *„dualitás elvét”*, vagyis, hogy egy projektív síkról szóló állításban a pont és egyenes szavak felcserélhetőek. Ez persze csak akkor igaz, ha állításunkat csupán az axiómák segítségével tudjuk belátni, vagy ha ezeken kívül önduális állításokat használunk.

Az eddig ismertetett konstrukciók fő előnye, hogy magasabb dimenzióra gond nélkül kiterjeszthetőek. Itt eltekintenénk az „absztrakt” véges terek definiálásától, mert ez több technikai nehézséget vet fel. Mindjárt az első az, hogy mit tekintsünk alapelemeknek. Lehet ugyanis csupán a pontokat és egyeneseket alapelemnek tekinteni, de lehet a pontokat, síkokat, tereket, ... hipersíkokat is. Mindegyik megközelítésnek megvan a maga létjogosultsága. Egy ilyent találunk a [40] könyvben. Most azonban elég, ha csak annyit említünk meg, hogy az absztrakt projektív tereket az jellemzi, hogy minden síkjuk (azaz bármely három pont összekötésre és metszésre vonatkozó generátuma) projektív sík. A legfontosabb ismeret projektív terekről az, hogy bennük érvényes a *Desargues-tétel*. (Itt a Desargues-tétel szokásos „térbeli” bizonyítására kell gondolnunk, amely megtalálható pl. Coxeter: Projektív geometria c. könyvében a 32–33. oldalakon (2.31. 2.32.).) Ebből azt is le lehet vezetni, hogy van olyan ferdetest, amellyel koordinátázhatjuk a teret. Mivel Wedderburn tétele miatt minden véges ferdetest test, így a véges terek

leírásához elegendő azt tudnunk, hogy (kommutatív) testtel hogyan koordinátázhatunk projektív teret.

Nézzük először az affin tereket. Ezek a koordinátatest feletti valahány dimenziós vektorterek, az egyenesek az egydimenziós alterek és eltoltjaik, a síkok a kétdimenziós alterek és eltoltjaik, s.í.t. a hipersíkok az egy kodimenziós alterek és eltoltjaik.

Az $n$ dimenziós projektív tér pontjai egy $n+1$-dimenziós vektortér 1-dimenziós alterei, egyenesei a kétdimenziós alterek, s.í.t., a hipersíkok az 1 kodimenziós alterek. Ezzel a szemléltetéssel mindazt, amit lineáris algebrában vektorterekkel kapcsolatban tanultunk, (pl. lineáris függetlenség, függőség, generálás, bázis stb.) könnyen átvihetjük projektív és affin terekre. Többek között meghatározhatjuk az alapvető kombinatorikus paramétereket, például az adott dimenziós alterek számát. Erre a Gauss-féle binomiális együtthatókat, az $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$-kat használhatjuk. Először interpretáljuk $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$-t vektortérben. Itt $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ az $n$ dimenziós tér $k$ dimenziós altereinek száma, vagyis

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(q^n - q^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(q^k - q^i)},$$

hiszen a bázis első elemét $(q^n - 1)$, a másodikat $(q^n - q)$-féleképp választhatjuk meg, és így tovább. A nevező ugyanezt egy $k$-dimenziós altérben teszi meg. A $q$ értéket a [.] indexében feltüntettük, ezt ha $q$ szerepe világos, elhagyhatjuk. Ily módon könnyű mondjuk az adott $r$ dimenziós alteret tartalmazó $k$-dimenziós alterek számát is felírni, ez nem más, mint $\begin{bmatrix} n-r \\ k-r \end{bmatrix}$. Projektív terekben a dimenzió eggyel eltolódik, tehát például $\mathrm{PG}(4,q)$-ban a síkok száma $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, az egyeneseké $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

A részletekkel kapcsolatosan Kárteszi könyvének 2.1. és 2.2. szakaszára utalunk. Ugyancsak melegen ajánljuk Radó–Orbán: A geometria mai szemmel c. könyvének második fejezetét, valamint a harmadik és negyedik fejezet egyes részeit, továbbá a Kiss–Szőnyi könyvet [40].

A vektorteres reprezentáció arra is jó, hogy segítségével a projektív és affin síkok automorfizmusait (a geometriai szóhasználattal: *kollineációit*), azaz az egy egyenesen levő pontokat egy egyenesen levőkbe vivő bijekciókat is könnyen át tudjuk tekinteni.

**1.1.5. Tétel.** $\mathrm{AG}(n,K)$ *minden kollineációja* $\mathbf{x}^T \mapsto A\mathbf{x}^{T\sigma} + \mathbf{b}^T$ *alakú, ahol* $A$ $n \times n$*-es nemszinguláris mátrix,* $\mathbf{b}$ *fix vektor, míg* $\sigma$ *rögzített testautomorfizmus. (Ezek a kollineációk az* $A\Gamma L(n,K)$ *csoportot alkotják.)*

*Hasonlóan* $\mathrm{PG}(n,K)$ *kollineációi* $\mathbf{x}^T \mapsto A\mathbf{x}^{T\sigma}$ *alakúak, ahol* $A$ $(n+1) \times$ $\times (n+1)$*-es nemszinguláris mátrix,* $\sigma$ *testautomorfizmus.*

E tétel második felét gyakran a **Projektív geometria alaptételének** is nevezik.

Teljesen hasonlóan írhatók le a korrelációk is, csak itt az eredményül kapott vektort egyenes koordinátáinak tekintjük. *Polaritás*nak másodrendű korrelációt nevezünk. Geometriából tudjuk, hogy polaritás esetén a $\sigma$ automorfizmus másodrendű kell legyen (ill. identitás). Ha $\sigma = id$, akkor a mátrix szimmetrikus kell legyen, ilyenkor az autokonjugált pontok kúpszeletet alkotnak (ha $q$ páratlan). Ha $\sigma \neq id$, akkor az $A$ mátrixnak Hermite-félének kell lennie, azaz ha elemenként alkalmazzuk rá $\sigma$-t, akkor a mátrix transzponáltját kapjuk. Mindaz amit most elmondtunk, magasabb dimenzióban is így van. A különbség csak annyi, hogy a $\sigma = id$ esetben a mátrix lehet ferdén szimmetrikus is. Az ilyen mátrixok determinánsa akkor lehet nem nulla, ha a méretük páros, azaz, ha a dimenzió páratlan. Három dimenzióban egy ilyen mátrix ú. n. nullapolaritást ad meg. A $q$ páros eset kissé bonyolultabb, azzal most mi nem foglalkozunk. Lényeges tehát, hogy a polaritásokat pontosan ismerjük, és testre épített síkok esetén csupán kétféle polaritás van.

További természetes kérdés, hogy egy polaritásnak hány autokonjugált pontja (azaz olyan pont, amely illeszkedik a polárisára) lehet. Bose bizonyította, hogy projektív sík polaritásának mindig legalább annyi autokonjugált pontja van, mint egy egyenesnek. A másik oldalról az is érdekes, hogy legfeljebb hány autokonjugált pont lehet. Erre $q$-adrendű sík esetén az a válasz, hogy legfeljebb $q^{3/2}+1$. Testre épített négyzetrendű síkokon vannak is olyan (unitér vagy Hermite-féle) polaritások, amelyeknek pontosan ennyi autokonjugált pontja van. Ezzel kapcsolatban l. még az 1.2. feladatot. Ismerünk olyan nem testre épített síkokat, amelyeken az autokonjugált pontok száma $q^{5/4}+1$.

## 1.2. Illeszkedési struktúrák

**1.2.1. Definíció.** *Illeszkedési struktúrá*nak egy $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármast nevezünk, ahol $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ két diszjunkt halmaz, $I$ pedig egy $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ elemei közti reláció, azaz $I \subset \mathbf{P} \times \mathbf{B}$. Az elnevezés geometriai indíttatású, ennek megfelelően $\mathbf{P}$ elemeit *pont*oknak, $\mathbf{B}$ elemeit *blokk*oknak nevezzük, az $I$ relációt pedig *illeszkedési reláció*nak. Az $I$ elemeit (mint rendezett párokat) *zászló*knak is fogjuk mondani. □

A geometriai terminológiának megfelelően ahelyett, hogy $(p, B) \in I$ azt írjuk majd, hogy $pIB$ és azt mondjuk, hogy a $p$ pont *illeszkedik* a $B$ blokkra vagy a $B$ blokk *átmegy* $p$-n stb. A motiváló geometriai példa a sík pontjainak és egyeneseinek példája, az egyenes elnevezést azonban csak olyan esetekben fogjuk használni, amikor a blokkok valóban egyeneshez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. Geometriában is gyakran azonosítjuk az egyeneseket az őket alkotó pontok halmazával és ezt illeszkedési struktúrákra is megtehetjük csekély megszorítások mellett. Mielőtt azonban ezt megtennénk, vezessünk

be néhány további fogalmat. Mindenekelőtt az izomorfizmus fogalmát definiáljuk.

**1.2.2. Definíció.** Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ és $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}', \mathbf{B}', I')$ két illeszkedési struktúra.
Az $\alpha : \mathbf{P} \cup \mathbf{B} \to \mathbf{P}' \cup \mathbf{B}'$ leképezés *izomorfizmus*, ha bijekció és

$$\mathbf{P}^\alpha = \mathbf{P}', \quad \mathbf{B}^\alpha = \mathbf{B}';$$

$$pIB \iff p^\alpha I' B^\alpha, \ \forall p \in \mathbf{P}, \ \forall B \in \mathbf{B}.$$

Azt is mondjuk, hogy ilyenkor $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}'$ *izomorf*. Ha $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$, akkor $\alpha$-t *automorfizmus*nak nevezzük. □

A geometriai szóhasználat motiválja a duális struktúra bevezetését is.

**1.2.3. Definíció.** A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúra *duálisa* a $\mathbf{D}^* = (P^*, B^*, I^*)$ rendszer, ahol $\mathbf{P}^* = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{P}$, míg $I^*$ az $I$ reláció inverze. □

Nem igaz, hogy egy struktúra duálisa izomorf volna az eredeti struktúrával, de az persze igen, hogy duális duálisa az eredeti.

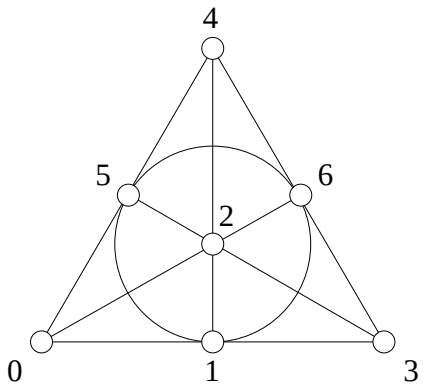
**1.2.4. Definíció.** Legyen $p \in \mathbf{P}$ egy pont. A *$p$ pont fok*a a $p$-hez illeszkedő blokkok száma, azaz

$$\deg(p) = |\{B \in \mathbf{B} \ : \ p \ I \ B\}| .$$

Hasonló módon egy *$B$ blokk fok*a a hozzá illeszkedő pontok száma, azaz

$$\deg(B) = |\{p \in \mathbf{P} \ : \ p \ I \ B\}| . \square$$

Jegyezzük meg, hogy egy illeszkedési struktúrában előfordulhat, hogy két különböző blokk (egyenes) ugyanazokhoz a pontokhoz illeszkedik. Ha ez nem történik meg, az illeszkedési struktúrát *egyszerű*nek nevezzük. Egyszerű illeszkedési struktúrára a blokkok azonosíthatók a hozzájuk illeszkedő pontokkal. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ izomorf lesz a $\mathbf{D}^* = (\mathbf{P}, \mathbf{B}^*, \in)$ struktúrával, ahol $\mathbf{B}^* = \{\{p : pIB\} \ : \ B \in \mathbf{B}\}$. Mostantól kezdve főleg ilyen egyszerű illeszkedési struktúrákat vizsgálunk, és úgy képzeljük, hogy a fenti azonosítást már elvégeztük, azaz a blokkok a pontok bizonyos részhalmazai. Illeszkedési struktúra helyett használjuk a *hipergráf*, illetve egyszerű illeszkedési struktúra esetén a *halmazrendszer* kifejezéseket is. Ebben az esetben a blokk foka helyett a blokk mérete kifejezést is használjuk.




1.2. ábra. Fano-sík

**1.2.5. Definíció.** A $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ pár halmazrendszer, ha $E(\mathcal{H})$ elemei a $V(\mathcal{H})$ bizonyos részhalmazai. Egy halmazrendszert *$r$-reguláris*nak nevezünk, ha benne minden pont foka $r$. Hasonlóan a halmazrendszer *$k$-uniform*, ha minden blokk (él) mérete (foka) $k$. Gyakran az $r$ és $k$ paramétereket elhagyjuk, és egyszerűen reguláris, illetve uniform halmazrendszerről beszélünk. A megfelelő fogalmak hipergráfokra is bevezethetők. □

Érdemes megjegyezni, hogy egy illeszkedési struktúra duálisa akkor lesz egyszerű, ha nincsenek olyan pontok az eredeti struktúrában, amelyek pontosan ugyanazokra a blokkokra illeszkednek (azaz mintegy párban fordulnak elő). Természetesen reguláris hipergráf duálisa uniform, és megfordítva.

**1.2.6. Példa.** Legyen $\mathbf{P} = \{0, \ldots, 6\}$, míg

$$\mathbf{B} = \{\{0,1,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,6\}, \{4,5,0\}, \{5,6,1\}, \{6,0,2\}\}.$$

Az illeszkedés természetesen legyen az $\in$ reláció. Ezt az illeszkedési struktúrát Fano-síknak nevezik, az 1.2. ábrát már valószínűleg mindenki látta.

Az elnevezés onnan származik, hogy G. Fano olasz geométer ezt a konfigurációt zárta ki a projektív (tér)geometria axiomatizálásakor.

Az illeszkedési struktúrák mátrixokkal is reprezentálhatók.

**1.2.7. Definíció.** Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúra. Soroljuk fel a pontokat: $p_1, \ldots, p_v$, valamint a blokkokat: $B_1, \ldots, B_b$. $\mathbf{D}$ *illeszkedési mátrix*a az az $M = (m_{ij})$ $(i = 1, \ldots, v; j = 1, \ldots b)$ mátrix, amelyben

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p_i \; I \; B_j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezt szokták pont-blokk illeszkedési mátrixnak is nevezni. A későbbiekben gyakran előfordul, hogy illeszkedési mátrix helyett *incidencia mátrix*ot mondunk. Szokás hasonlóan a $(-1,1)$-illeszkedési mátrixot is definiálni, itt a 0 helyett $(-1)$-eket írunk. □

A $\mathbf{D}$ *szomszédsági mátrix*a az $A = MM^T$ mátrix, amely természetesen szimmetrikus. A szomszédsági mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme azt számolja, hogy hány olyan blokk van, amely $p_i$-hez és $p_j$-hez egyaránt illeszkedik. Speciálisan, a főátlóban az egyes pontok fokai szerepelnek.

Hasonló módon a duális illeszkedési struktúrára szintén bevezethetjük a szomszédsági mátrixot. Ezt az eredeti illeszkedési struktúra *blokk szomszédsági* mátrixának fogjuk hívni, mely nem más mint $M^TM$, elemei a blokkok metszetének felelnek meg.

**1.2.8. Példa.** A Fano-sík illeszkedési mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egy másik mátrixot találhatunk Kárteszi könyvében:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.2.9. Lemma.** *Tetszőleges* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ *illeszkedési struktúrában*

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B). \tag{1.1}$$

*Bizonyítás.* Számoljuk meg a zászlókat (illeszkedő pont-blokk párokat) kétféleképpen. ■

**1.2.10. Következmény.** *Legyen* $\mathcal{H}$ $r$*-reguláris,* $k$*-uniform hipergráf, melynek* $v$ *pontja és* $b$ *blokkja (éle) van. Ekkor* $vr = bk$*.* ■

**1.2.11. Definíció.** Egy illeszkedési struktúra *komplementer*ének azt a struktúrát nevezzük, amelyben a pontok és a blokkok változatlanok, az illeszkedési reláció pedig a komplementer reláció (azaz a komplementer struktúrában egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy blokkra, ha az eredetiben nem illeszkedett). □

Halmazrendszerekre persze ezt úgy is elmondhatjuk, hogy az éleket cseréljük ki a komplementerükre. Nyilvánvaló, hogy reguláris halmazrendszer komplementere reguláris, uniformé pedig uniform, mégpedig $k' = v - k$ és $r' = b - r$.

**1.2.12. Példa.** A Fano-sík komplementere 7 pontú, 7 blokkú struktúra, minden pont foka 4, minden blokk mérete 4. (Később majd újra találkozunk ezzel a struktúrával az ún. Hadamard-féle blokkrendszerek bővítése kapcsán.)

Ugyan illeszkedési struktúrák izomorfizmusát már korábban definiáltuk, most azonban nézzük meg egy kicsit közelebbről mit jelent az izomorfizmus az illeszkedési mátrixok nyelvén. Ez azt jelenti, hogy az egyik struktúra illeszkedési mátrixa ugyanaz, mint a másiké, ha ott az $\alpha$ permutáció által megadott sorrendben írjuk fel a sorokat és oszlopokat. Más szavakkal, ha tetszőlegesen felírt illeszkedési mátrixokból indulunk, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy az egyik illeszkedési mátrix a másikból a sorok és oszlopok permutációjával megkapható. Formálisan ez azt jelenti, hogy vannak olyan $P, Q$ permutációmátrixok, amelyekre

$$PMQ = M', \tag{1.2}$$

ahol persze $M$, illetve $M'$ a $\mathbf{D}$, ill. $\mathbf{D}'$ illeszkedési mátrixa. Érdemes a Fano-sík 1.2.8 alatti két példáján megkeresni a $P, Q$ mátrixokat.

Egy $\mathbf{D}$ illeszkedési struktúra automorfizmusai (a kompozíció műveletére nézve) csoportot alkotnak, melyet $\mathbf{D}$ *teljes automorfizmus-csoportjá*nak nevezünk, és $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$-vel jelölünk. Ha csak azt mondjuk, hogy automorfizmuscsoport (a teljes jelző nélkül), akkor $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ részcsoportjaira gondolunk.

**1.2.13. Példa.** A Fano-sík (l. 1.2.6. Példa) automorfizmus-csoportját fogjuk meghatározni. A $\varphi : x \mapsto x + 1$ (ahol az összeadást mod 7 végezzük) nyilván automorfizmus (így definiáltuk a blokkokat). Ezenkívül az ábrából látszik, hogy a szabályos háromszög egybevágóságai a középpontot (2) önmagába vivő automorfizmusok. Ezenkívül minden „magasságvonal"-hoz meg tudunk adni néhány további (másodrendű) automorfizmust: ilyen pl. az (1)(2)(4)(35)(06), valamint az (1)(2)(4)(50)(36) leképezés (a harmadik hasonlóan kapható automorfizmus épp a magasságvonalra való tükrözés, amely az (1)(2)(4)(30)(56) permutáció). Végezetül az (14)(2)(3)(5)(60) leképezés is automorfizmus. Ezek mind másodrendű permutációk, amelyek fixálják az 142 egyenest, így ezek

szorzata is ilyen. Könnyen ellenőrizhető, hogy a felsorolt elemek nyolcadrendű elemi Abel csoportot generálnak (amelyben az először felsorolt három elem az identitással egy negyedrendű részcsoportot alkot). Ennek alapján az automorfizmuscsoport rendje legalább $168 = 7 \cdot 3 \cdot 8$ elemet tartalmaz.

Persze, az előző szakasz szerint a Fano-sík a kételemű testre épített projektív sík, így a projektív geometria alaptételéből azonnal tudjuk, hogy a teljes automorfizmus-csoport a 168 elemű PGL(3,2) egyszerű csoport. Geometriából azt is tudhatjuk, hogy testre épített projektív síkon tetszőleges négyszög leképezhető tetszőleges négyszögre. (Most és a következőkben, négyszögnek négy olyan pontot nevezünk, amelyből semelyik három nincs egy egyenesen, s a háromszöget is hasonló értelemben használjuk.) A Fano-síkban minden háromszög egyetlen négyszögben van benne, hiszen a három oldalegyenes egy-egy további pontot tartalmaz, melyek egy egyenesen vannak. Így ez ugyanazt jelenti, mintha azt mondanánk, hogy bármely háromszög átvihető bármely más háromszögbe. Azt pedig könnyű látni (illetve ellenőrizni), hogy ha egy automorfizmus egy háromszög mindhárom csúcsát fixálja, akkor az az identitás. Ebből az észrevételből geometriai ismeretek nélkül is adódik, hogy az automorfizmus-csoport rendje legfeljebb a háromszögek száma, ami $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$. Mivel fentebb meg is konstruáltunk ennyi elemet, így a fenti automorfizmusokból tényleg előállítható valamennyi automorfizmus.

Mindazokat a geometriai fogalmakat, amelyeket most használtunk, megtalálhatjuk az 1.1 szakaszban.

**1.2.14. Definíció.** Olyan illeszkedési struktúrát, amelyben a pontok száma azonos a blokkok számával, *négyzetes*nek (vagy nagynéha *szimmetrikus*nak) nevezünk. □

**1.2.15. Tétel.** *Legyen* $\mathbf{D}$ *olyan négyzetes illeszkedési struktúra, melynek illeszkedési mátrixa nem szinguláris, továbbá legyen* $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$. *Ekkor* $\alpha$ *fixpontjainak száma megegyezik a fixblokkok számával.*

*Bizonyítás.* Legyen a szóban forgó illeszkedési mátrix $M$. $\alpha$ automorfizmus volta miatt létezik két permutációmátrix $P, Q$, melyekre $PMQ = M$ teljesül (l. (1.2)). $P$ az $\alpha$ pontokon, $Q$ a blokkokon való hatását írja le. Nyilván a fixpontok száma éppen $P$ nyoma, azaz $\mathrm{tr}(P)$, s hasonlóan a fixblokkok száma $\mathrm{tr}(Q)$. Mivel $M$ nemszinguláris, így

$$Q = M^{-1}P^{-1}M,$$

azaz $Q$ nyoma megegyezik $P^{-1}$ nyomával. Másrészt viszont $P$ permutációmátrix, így $P$ nyoma megegyezik $P^{-1}$ nyomával. ■

Ennek alapján természetes azt kérdezni, hogy vajon $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ ugyanúgy hate a pontokon és a blokkokon. Erre általában a válasz nemleges, azonban az

előző bizonyításból még további információkat is ki tudunk deríteni. Ehhez lássunk először egy elemi lemmát permutációcsoportokra. A lemmát igen gyakran Burnside-lemmának nevezik, de helyesebb volna Cauchy–Frobenius lemmának hívni, mivel már Cauchy is implicite felhasználta.

**1.2.16. Lemma. (Burnside-lemma)** *Legyen $G \leq Sym(\Omega)$ (azaz $G$ permutáció-csoport az $\Omega$ jegyhalmazon). Tegyük fel, hogy $G$-nek $s$ orbitja van. Egy $g \in G$ elemre jelöljük $Fix(g)$-vel a $g$ fixpontjainak halmazát. Ekkor*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\, Fix(g)| = s.$$

*Bizonyítás.* Számoljuk le kétféleképpen az $(\omega, g)$ párokat, ahol $\omega \in \Omega$, $g \in \in G$ és $\omega^g = \omega$. A bizonyítandó összefüggés bal oldalán levő szumma (az $\frac{1}{|G|}$ tényező nélkül) ezt számolja csoportelemről csoportelemre. A másik irányból egy $\omega \in \Omega$ elemre $|G_\omega|$ olyan $g$ csoportelem van, amely $\omega$-t fixen hagyja ($G_\omega$-val szokás szerint $\omega$ stabilizátor részcsoportját jelöljük), azaz így

$$\sum_{\omega \in \Omega} |G_\omega|$$

lesz az összeg. Ha azonban $\omega$ és $\omega'$ egy orbitban vannak, akkor a megfelelő stabilizátorok konjugáltak, így rendjük is megegyezik. Másrészt az $\omega$ orbitjának mérete a stabilizátor indexe, vagyis egy orbit adaléka a fenti szummához éppen $|G|$. Így $\Omega$ elemei szerint számolva az $(\omega, g)$ párok száma éppen $s|G|$.■

**1.2.17. Tétel.** *Legyen $\mathbf{D}$ négyzetes illeszkedési struktúra, és tegyük fel, hogy $\mathbf{D}$ illeszkedési mátrixa nemszinguláris. Legyen továbbá $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$. Ekkor $G$ pont-orbitjainak száma megegyezik a blokk-orbitok számával.*

*Bizonyítás.* Legyen $s$ a pont-, $t$ a blokkorbitok száma. Az 1.2.16. Lemma miatt ezek egy-egy összeggel írhatók fel, melyeknek tagjai 1.2.15. Tétel miatt rendre egyenlőek. ■

A geometriai motiváció szerint haladva, az automorfizmusok után nézzük a dualitásokat, vagy más szóval a korrelációkat. Mivel a duális struktúrát fentebb már definiáltuk, a formális definíció előtt röviden azt is mondhatjuk, hogy egy korreláció nem más, mint egy illeszkedési struktúra és annak duálisa közötti izomorfizmus.

**1.2.18. Definíció.** Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ egy illeszkedési struktúra. A $\varrho : \mathbf{P} \cup \mathbf{B} \to \mathbf{P} \cup \mathbf{B}$ leképezés *korreláció*, ha bijekció és

$$\mathbf{P}^\varrho = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^\varrho = \mathbf{P};$$

$$pIB \iff p^\varrho I B^\varrho, \ \ \forall p \in \mathbf{P}, \ \forall B \in \mathbf{B}.$$

Ha a korreláció másodrendű, akkor *polaritás*nak hívjuk. Ha **D**-nek van korrelációja, akkor *önduális*nak nevezzük. □

Nézzük meg mit jelent a polaritás létezése az illeszkedési mátrixok nyelvén. Ehhez először is vegyük észre, hogy ha $\pi$ polaritás, akkor

$$pIq^\pi \iff qIp^\pi \quad \forall p, q \in \mathbf{P}.$$

Ha tehát azt az illeszkedési mátrixot nézzük, amelyben az első blokk az első pont polárisa, s.í.t., akkor ez a mátrix szimmetrikus lesz. Megfordítva, ha az illeszkedési mátrix szimmetrikus, akkor az a leképezés, amely az $i$-edik ponthoz az $i$-edik blokkot rendeli, polaritás lesz. Így tehát elmondhatjuk, hogy egy illeszkedési struktúrának pontosan akkor van polaritása, ha van szimmetrikus illeszkedési mátrixa.

Két korreláció szorzata automorfizmus, egy korreláció és egy automorfizmus szorzata pedig korreláció, az azonban nem világos, hogy ha egy négyzetes illeszkedési struktúrának sok automorfizmusa van, akkor van-e polaritása vagy korrelációja. Ez általában nem is várható (pl. vannak olyan projektív síkok, amelyek nem önduálisak és viszonylag nagy az automorfizmuscsoportjuk), bizonyos esetekben azonban ez így van.

**1.2.19. Tétel. (Marshall–Hall)** *Legyen* **D** *véges illeszkedési struktúra, amelynek van egy* $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ *automorfizmus-csoportja, amely mind a pontokon, mind a blokkokon regulárisan hat. Ha* $\Gamma$ *Abel-féle (kommutatív) is, akkor* **D***-nek van polaritása.*

*Bizonyítás.* Válasszunk egy $p$ „alappontot". Ekkor minden további $q$ pont egyértelműen áll elő $q = p^\alpha$ alakban (valamilyen $\alpha \in \Gamma$ elemre). Hasonlóan, válasszunk egy $B$ „alapblokkot" is és definiáljuk a $\pi$ leképezést a következő módon:

Legyen

$$(p^\alpha)^\pi := B^{\alpha^{-1}}, \quad (B^\alpha)^\pi := p^{\alpha^{-1}}.$$

Ekkor $p^\beta \; I \; (p^\alpha)^\pi$ akkor és csak akkor, ha $p^\beta \; I \; B^{\alpha^{-1}}$. $\alpha$-t alkalmazva mindkét oldalon azt kapjuk, hogy ez ekvivalens azzal, hogy $p^\alpha \; I \; p^{\beta\pi}$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\pi$ polaritás. ■

Jegyezzük meg, hogy ha $\Gamma$ Abel-csoport, akkor $\Gamma$ tranzitivitása a regularitást maga után vonja. Ha **D** illeszkedési mátrixa nem szinguláris, akkor az 1.2.17. Tétel szerint a pontokon való tranzitivitásból következik a blokkokon való tranzitivitás is. A Fano-sík esetén a $\varphi : x \mapsto x + 1 \bmod 7$ által generált $\Gamma = \{id, \varphi, \ldots, \varphi^6\}$ csoport eleget tesz az 1.2.19. Tétel feltételének, érdemes a $\pi$ polaritás konstrukcióját ezen a példán követni. A testre épített projektív síkok általában is eleget tesznek ennek a feltételnek (amint azt majd a

differenciahalmazokról szóló fejezetben meg fogjuk látni). Persze a szokásos geometriai módon (szimmetrikus mátrixszal) is származtathatunk polaritást, vagyis ezek a síkok önduálisak. További információk PG$(2,q)$ ,illetve általában PG$(n,q)$ polaritásairól az előző szakaszban találhatók.

## 1.3. Feladatok

1.1. Az affin sík axiómái:

A.1. két ponton egy és csak egy egyenes megy.

A.2. egy egyeneshez és egy rajta nem levő ponthoz egy és csak egy olyan, a ponton átmenő egyenes van, amely az egyenest nem metszi.

A.3. van három nem egy egyenesen fekvő pont.

Mutassuk meg, hogy így ugyanazt kapjuk, mintha projektív síkból kitörölnénk egy egyenest.

1.2. Az $(x_1,x_2,x_3)^\sigma = [x_1^{\sqrt{q}}, x_2^{\sqrt{q}}, x_3^{\sqrt{q}}]$ leképezés olyan polaritás, amelynek $q\sqrt{q}+1$ autokonjugált pontja van.

1.3. Számítsuk ki, hogyan hat egy kollineáció a hipersíkokon!

1.4. Mit jelent a dualitás elve magasabb dimenzióban?

1.5. Lássuk be, hogy affin sík mindig beágyazható projektívba!

1.6. Mutassuk meg, hogy $n$ = 2,3,4,5-re az $n$-edrendű projektív sík egyértelmű!

1.7. Írjuk fel a 1.1. ábra alapján a harmadrendű affin és projektív sík illeszkedési mátrixát!

1.8. Ellenőrizzük az 1.2.19. Tételt a negyedrendű projektív sík 9.1. ábrán megadott ciklikus modelljén, és keressük meg a kapott polaritás autokonjugált pontjait.

1.9. Konstruáljuk meg GF(4)-et és írjuk fel PG(2,4) illeszkedési mátrixát!

1.10. Konstruáljuk meg GF(8)-at és GF(9)-et!

# 2. fejezet

# Lineáris terek

## 2.1. A de Bruijn–Erdős-tétel és környéke

Ebben a fejezetben illeszkedési struktúrák egy speciális osztályával, a lineáris terekkel fogunk foglalkozni, melyek az affin és projektív síkok és terek messzemenő általánosításai. Ez a fejezet Klaus Metsch Linear spaces with few lines [43] könyvének felépítését követi.

**2.1.1. Definíció.** Az $\mathcal{L} = (V, E)$ (egyszerű) hipergráf *lineáris tér*, ha

(i) bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan blokk (él) van, amely őket tartalmazza,

(ii) minden blokk (él) legalább két pontot tartalmaz,

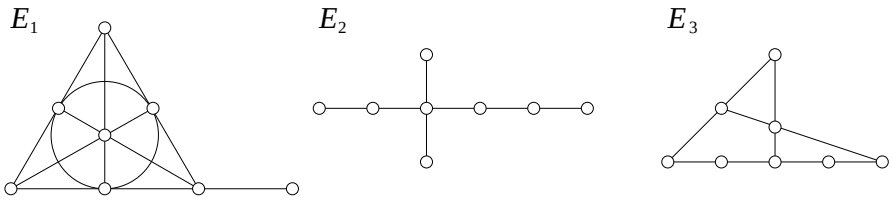
(iii) legalább két blokk (él) van. □

Természetesen (i) maga után vonja a struktúra egyszerűségét. Lineáris terekre blokk helyett *egyenes*t mondunk majd. Talán a lineáris tér helyett is jobb lenne az „egyenestér" elnevezés. A geometriai szóhasználattal élve, nemmetsző egyenesek helyett beszélünk majd *párhuzamos* egyenesekről is. Tetszőleges $V$ alaphalmazon megadhatunk ilyen lineáris tereket. Válasszuk ki $V$ egy $w$ pontját és legyenek a blokkok (egyenesek) a következők:

$$V \setminus \{w\},\ \{w, x\}, \quad x \in V \setminus \{w\}.$$

Ezt a banális struktúrát *degenerált* lineáris térnek nevezzük, a későbbiekben igen gyakran kell majd kizárnunk. Említsük meg, hogy ugyanannyi pontja van, mint blokkja, azonban a struktúra nem uniform (és nem is reguláris).

Egy lineáris teret le is tudunk rajzolni, ha elég kevés pontunk van. Mivel minden pontpárt összeköt egyenes, így azokat az egyeneseket nem jelöljük,




2.1. ábra. A kivételes lineáris terek

amelyek kétpontúak. A többi egyenest egy (nem feltétlenül egyenes) vonallal rajzolhatjuk le. Persze ez csak akkor ad áttekinthető ábrát, ha elég kevés ilyen egyenes van. A Fano-síkot is így rajzoltuk le korábban. Lássunk néhány sporadikus lineáris teret a 2.1. ábrán, amelyek a későbbiekben szerepelni fognak $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$.

Most lássuk, hogy milyen elemi leszámlálási egyenlőségek teljesülnek lineáris térben.

Az illeszkedő pont-egyenes párok kétféle leszámlálásával kapjuk a hipergráfokra érvényes alap-egyenlőséget (amit már az első fejezetben is láttunk, vö. 1.2.9. Lemma (1.1)):

$$\sum_{p\in\mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{B\in\mathbf{B}} |B|. \tag{2.1}$$

Kétféleképpen leszámolva az illeszkedő pontpár-egyenes párokat az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$v(v-1) = \sum_{L\in\mathbf{B}} |L|(|L|-1). \tag{2.2}$$

Ha pedig egy $p$ pontot fixálunk és az 1.2.9. Lemmabeli (1.1) egyenlőséget csak az azon átmenő blokkokra alkalmazzuk, akkor a

$$v-1 = \sum_{p\in B} (|B|-1) \tag{2.3}$$

egyenlőséghez jutunk. Ez szemléletesen azt tükrözi, hogy a $p$ pont egyértelmű egyenessel össze van kötve minden további ponttal.

Még egy hasonló leszámlálási összefüggést kaphatunk könnyen. Legyen $L$ egy egyenes, és legyen $\mathcal{M}$ az $L$-et nem metsző egyenesek halmaza. Ekkor

$$\sum_{p\notin L} (\deg(p) - |L|) = \sum_{M\in\mathcal{M}} |M|. \tag{2.4}$$

Valóban, ez nem más, mint az 1.2.9. Lemmabeli (1.1) egyenlőség alkalmazva arra a hipergráfra, amelynek pontjai az eredeti pontok $L$ pontjait kivéve, blokkjai pedig az $\mathcal{M}$-beli egyenesek.

Most már rátérünk a de Bruijn–Erdős-tétel bizonyítására. A tételnek az eredetin kívül is több bizonyítása született. Ezek lényegében kétfélék, leszámláláson vagy lineáris algebrai eszközökön alapulnak. A legfrappánsabb leszámlálós bizonyítás Conwaytól ered, most ezt ismertetjük.

**2.1.2. Tétel. (de Bruijn–Erdős)** *Lineáris térben a blokkok száma legalább annyi, mint a pontok száma ($b \geq v$). Ha $b = v$, akkor a lineáris tér vagy degenerált vagy projektív sík.*

**Bizonyítás 2.1.2** Legyen tehát $\mathcal{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{L}, I)$ lineáris tér, melynek $v$ pontja és $b$ egyenese van. Feltesszük, hogy $b \leq v$ és be szeretnénk látni, hogy itt egyenlőség kell legyen. Az első észrevételt annyiszor használjuk majd a későbbiekben is, hogy külön lemmaként fogalmazzuk meg.

**2.1.3. Lemma.** *Legyen $\mathcal{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{L}, I)$ lineáris tér, $p$ egy az $L$-hez nem illeszkedő pont. Ekkor* $\deg(p) \geq |L|$*, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden $p$-n átmenő egyenes metszi $L$-et.*

*Bizonyítás.* A $p$-t össze tudjuk kötni $L$ minden pontjával, s az így kapott $|L|$ egyenes páronként különböző lesz. ■

Mivel $b \leq v$ és $\deg(p) \geq |L|$ minden nemilleszkedő $(p, L)$ pont-egyenes párra, így

$$\frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} \geq \frac{|L|}{v - |L|},$$

szintén minden nemilleszkedő $(p, L)$ pont-egyenes párra. Adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket minden ilyen párra. Ha a bal oldalakat pontról pontra összeadjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\sum_{p \notin L} \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} = \sum_{p \in \mathbf{P}} \sum_{L : p \notin L} \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} = \sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p),$$

mivel minden $p$ ponthoz pontosan $b - \deg(p)$ olyan egyenes található, amely őt nem tartalmazza. Hasonlóan, ha a jobb oldalakat egyenesről egyenesre adjuk össze, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p \notin L} \frac{|L|}{v - |L|} = \sum_{L \in \mathbf{L}} |L|.$$

A kiindulási egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) \geq \sum_{L \in \mathbf{L}} |L|,$$

itt viszont az (1.1) alapegyenlőség miatt egyenlőség kell legyen. Ez viszont csak úgy lehet, ha $b = v$ és valamennyi $(p, L)$ nemilleszkedő pont-egyenes párra $\deg(p) = |L|$. Ez azt jelenti, hogy $b = v$ esetén bármely két egyenes metszi egymást. Ha van olyan egyenes, amely két pontból áll, akkor nem nehéz belátni, hogy a lineáris terünk degenerált (l. 2.3. feladat). Ha viszont minden egyenes legalább három pontból áll, akkor struktúránk eleget tesz a projektív sík 1.1 szakaszbeli axiómáinak. Így a $b = v$ feltételnek eleget tevő lineáris terek a degeneráltak, valamint a projektív síkok. Ezzel a de Bruijn–Erdős-tételt beláttuk. ■

Érdemes megemlíteni, hogy a tétel eredeti megfogalmazása a duális lineáris terekre vonatkozott. Először is gondoljuk meg, hogy egy lineáris tér duálisa (mint hipergráf) egyszerű illeszkedési struktúra lesz (l. 2.4. feladat). Eszerint van egy alaphalmazunk (az eredeti egyenesek halmaza), vannak részhalmazaink (az egy ponton átmenő egyenesek), és bármely két részhalmaz pontosan egy elemben metszi egymást (ti. a két pont összekötő egyenesében). Ekkor legalább annyi pontunk van, mint ahány részhalmazunk. Az egyenlőség esete is könnyen dualizálható, vagy van egypontú részhalmaz, és a többi részhalmaz kétpontú, vagy projektív síkot alkotnak a halmazok, vagy degenerált lineáris teret (hiszen ezen struktúrák duálisa is ilyen). Idézzük fel a duális változat elsőben tanult bizonyítását (legalábbis az egyenlőtlenség részét). Ha minden részhalmaznak van közös pontja (pl. az egyik részhalmaz egyelemű), akkor az állítás (ami most az, hogy $v \geq b$) triviális, hiszen a közös pontot kivéve a részhalmazok diszjunktak. Ha nem, akkor minden halmaznak tekintsük a karakterisztikus vektorát. Így $b$ db $v$ hosszú 0-1 vektort kapunk. Ezekre az $\mathbf{u}_i$ vektorokra $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = 1$, ha $i \neq j$. Mivel nincs egyelemű részhalmaz, $\mathbf{u}_i^2 > 1$. A karakterisztikus vektorok függetlenek, mert ha $\sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ volna, akkor ezt saját magával skalárisan szorozva a

$$\sum_{i=1}^{b} \lambda_i^2(\mathbf{u}_i^2 - 1) + \left(\sum_{i=1}^{b} \lambda_i\right)^2 = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből tényleg $\lambda_i = 0$ jön. Ez tulajdonképp ugyanaz az ötlet, mint amit majd a 2.1.5. Lemmában használunk. Ennek a rövid bizonyításnak az is az előnye, hogy 1 helyett tetszőleges $\lambda$ pontban metsző halmazrendszerekre is működik.

Most térjünk át a de Bruijn–Erdős-tétel egy (jóval hosszabb) lineáris algebrai bizonyítására. Az ötlet, hogy szomszédsági mátrixokat használjunk, talán Majumdartól (1953) származik. Kezdjük két tisztán lineáris algebrai lemmával.

**2.1.4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy $C$ $m \times n$-es mátrix, és $CC^T$ nemszinguláris. Ekkor $n \geq m$.*

*Bizonyítás.* Indirekte tegyük fel, hogy $n < m$. Ekkor $C$ rangja legfeljebb $n$, azaz a sorok összefüggők. Akkor viszont $CC^T$ sorai is összefüggőek lennének. Ez pedig ellentmondás, hisz $CC^T$ nem szinguláris. ■

Lényegében ugyanezt úgy is elmondhattuk volna, hogy $AB$ rangja legfeljebb $A$ rangjának és $B$ rangjának minimuma.

**2.1.5. Lemma.** *Legyen $0 \le s_k \le 1$ minden $k$-ra és tegyük fel, hogy $s_k = 1$ legfeljebb egy $k$-ra teljesül. Ekkor a*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & s_2 & s_3 & \dots & & s_t \\ s_1 & 1 & s_3 & \dots & & s_t \\ s_1 & s_2 & 1 & \dots & & s_t \\ \vdots & & & \dots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & 1 & s_t \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{t-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

*mátrix reguláris.*

*Bizonyítás.* $B$ regularitása a mátrix méretére vonatkozó indukcióval azonnal következik, ha valamelyik $s_k = 0$, így feltehetjük, hogy minden $s_k > 0$. Nézzük először azt az esetet, amikor valamelyik $s_k$ (mondjuk $s_1$) pontosan 1. Ekkor az első oszlopban csupa egyes áll. Ha $B$ első sorát rendre levonjuk a többiből, akkor az első sor megmarad, a második sortól kezdve viszont csak a diagonális elem lesz nullától különböző. Ez éppen $1 - s_k$ lesz a $k$-adik sorban. Így $B$ determinánsa (az első oszlop szerint kifejtve) $1(1-s_2)(1-s_3)\dots(1-s_t)$ lesz, ami a feltétel miatt nem zérus.

Ha nincs olyan $k$, amelyre $s_k = 1$ volna, akkor egy tanulságos trükköt alkalmazhatunk. Osszuk el a mátrix oszlopait rendre $s_1, \dots s_t$-vel. Ekkor olyan mátrixot kapunk, amelyben a főátlón kívüli elemek egyesek, a főátlóban pedig egynél nagyobb elemek vannak. Egy ilyen mátrix viszont előáll, mint a csupa egyesből álló $J$ mátrix és egy diagonális $D$ mátrix összege. A $J$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit (az $(x_1+\dots+x_t)^2$ kvadratikus alaknak felel meg), míg a diagonális $D$ mátrix pozitív definit (hiszen a főátlóban álló elemek pozitívak). Így e két mátrix összege, azaz $B$ is pozitív definit, tehát reguláris. (A $B$ regularitása egy másik gyakran hasznos trükkel, az ú. n. „bordering trick"-kel is igazolható, l. a 2.5. feladatot, illetve a Babai–Frankl-könyvet [3].) Ezzel a lemmát beláttuk. ■

**2.1.6. Lemma.** *Legyen $A$ $n\times n$-es mátrix és tegyük fel, hogy van az $\{1,...,n\}$-nek egy $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_t$ partíciója oly módon, hogy a mátrix eleget tesz az alábbiaknak:*

*(1) $a_{jj} \neq 0$ semmilyen $j$-re,*

*(2) $a_{jk} = 0$, ha $j \neq k$ és $j, k$ ugyanabban az $I_s$-ben van,*

*(3)* $a_{jk} = 1$*, különben (azaz, ha* $j, k$ *a partíció különböző halmazaiban van).*

*Végezetül tegyük fel, hogy az* $s_k = \sum_{j \in I_k} \frac{1}{a_{jj}}$ *mennyiségekre* $0 \leq s_k \leq 1$ *teljesül és legfeljebb egy olyan* $k$ *index van, amelyre* $s_k = 1$.

*Ekkor az* $A$ *mátrix reguláris.*

Mielőtt a bizonyításra térnénk, jegyezzük meg, hogy (alkalmas permutáció után) mátrixunk a diagonális mentén elhelyezkedő négyzetes blokkokból áll. Ezen kívül csupa egyes van, a blokkok maguk olyan kis diagonális mátrixok, ahol a főátlóban csupa nemnulla elem áll.

*Bizonyítás.* Azt fogjuk megmutatni, hogy az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Itt persze $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ egy $n$ hosszú ismeretlen vektor. Vezessük be az

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j \in I_k} x_j, \qquad k = 1, \ldots, t$$

új ismeretleneket. Ezek segítségével az eredeti egyenletrendszer $j$-edik egyenlete így írható (mondjuk legyen $j \in I_h$):

$$a_{jj}x_j + \sum_{r \notin I_h} x_r = a_{jj}x_j + y_h = 0. \tag{2.5}$$

Ez azt jelenti, hogy $x_j = -\frac{1}{a_{jj}} y_h$, minden $j \in I_h$-ra. Adjuk össze a kapott egyenleteket. Így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j \in I_h} x_j = -\sum_{j \in I_h} \frac{1}{a_{jj}} y_h = -s_h y_h.$$

Ennek segítségével persze $y_k$-t is kifejezhetjük:

$$y_k = \sum_{h \neq k} \sum_{j \in I_h} x_j = \sum_{h \neq k} -\sum_{j \in I_h} \frac{1}{a_{jj}} y_h = \sum_{h \neq k} -s_h y_h.$$

Ez viszont újra homogén lineáris egyenletrendszer az új $y_k$ ismeretlenekre $(k = 1, \ldots, t)$, melynek mátrixa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & s_2 & s_3 & \ldots & & s_t \\ s_1 & 1 & s_3 & \ldots & & s_t \\ s_1 & s_2 & 1 & \ldots & & s_t \\ \vdots & & & \ldots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & 1 & s_t \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{t-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.5. Lemma azt adja, hogy ez a $B$ mátrix reguláris. Ebből persze az következik, hogy az eredeti $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ egyenletrendszer minden megoldásából csak $y_k = 0$ jöhet. Ekkor viszont (2.5) alapján valamennyi $x_j$ is 0 kell legyen, azaz az eredeti egyenletrendszernek csak triviális megoldása lehet.

Ezzel a lemmát beláttuk. ■

**2.1.7. Állítás.** *Legyen $q$ az $\mathbf{L}$ lineáris tér egy pontja, és jelöljük $L_1, \ldots, L_r$-rel a $q$-n átmenő egyeneseket ($r = \deg(q)$). A sorrendet válasszuk úgy, hogy $|L_j| \leq |L_r|$ teljesüljön minden $j$-re. Vezessük be az*

$$S_k = \sum_{q \neq p \in L_k} \frac{1}{\deg(p) - 1}$$

*mennyiséget és jelöljük $w$-vel azon $j < r$ indexek számát, melyekre $S_j \neq 1$. Ekkor:*

*(i) Ha $j < r$, akkor $0 < S_j \leq 1$. Ráadásul $S_j$ pontosan akkor 1, ha $|L_j| = |L_r|$, továbbá $\deg(p) = |L_r|$ minden $q$-tól különböző $p \in L_j$ pontra.*

*(ii) $b \geq v + w - 1$.*

*(iii) Ha $w \leq r - 2$ vagy ha $w = r - 1$ és $S_r \leq 1$, akkor $b \geq v + w$.*

*Bizonyítás.* Először is, $S_j > 0$ triviális. Másrészt, ha $j < r$, akkor $L_j$ minden pontjának foka legalább $|L_r|$ a 2.1.3. Lemma miatt. Így az $S_j$-t megadó összeg minden tagja legfeljebb $1/(|L_r| - 1)$ és az összegnek $|L_j| - 1 \leq |L_r| - 1$ tagja van. Ebből azonnal látszik $S_j \leq 1$, sőt az egyenlőségre vonatkozó feltétel is.

A tétel (ii) és (iii) részének bizonyításához természetesen választhatjuk úgy az indexelést, hogy $S_k < 1$ legyen, ha $k \leq w$. (Akkor persze $S_k = 1$, ha $w < k < r$.) Tekintsük azt az $\mathcal{L}'$ hipergráfot, amely $\mathcal{L}$-ből a $q$ pont, valamint az $L_1, \ldots L_{w+1}$ élek (egyenesek) törlésével kapható. Ez már nem lineáris tér, a kitörölt egyenesekbe tartozó pontok összekötetlenek. Legyen $M$ ennek a hipergráfnak a pont-blokk illeszkedési mátrixa (azaz $v$ sorunk és $b - w - 1$ oszlopunk van). Képezzük a struktúra szomszédsági mátrixát, az $A = MM^T$ mátrixot.

Belátjuk, hogy ez a mátrix eleget tesz az előző lemma feltételeinek. Az első négyzetes blokkot éppen $L_1 \setminus \{q\}$ pontjai alkotják, majd hasonlóan találunk $w + 1$ blokkot. Végül az $L_1 \cup \ldots \cup L_{w+1}$-ben nem levő pontoknak megfelelő egypontú négyzetes blokkok következnek. Lássuk például azt, hogy a négyzetes blokkokon kívüli elemek 1-ek. Ehhez azt kell észrevennünk, hogy egy ilyen mező azt számolja, hogy a sorának ill. oszlopának megfelelő pontokon hány egyenes megy át. Ha ez a mező a négyzetes blokkokon kívül van, akkor ez két olyan pontnak felel meg, amelyek nincsenek ugyanazon $L_j$ egyenesen ($j \leq w + 1$), így az eredeti $\mathcal{L}$-beli (egyértelmű) összekötő egyenesük a törlés után is megmarad. Hasonlóan látszik az is, hogy a négyzetes blokkokon belüli, de főátlón kívüli elemek nullák, hisz az $\mathcal{L}$-beli összekötő egyenest töröltük. A főátlóban a pontok $\mathcal{L}'$-beli foka áll, ami az $\mathcal{L}$-beli fokszám mínusz 1 azokra a pontokra, amelyek valamely $L_j$-ben vannak, és az $\mathcal{L}$-beli fokszám a további pontokra. Ez azt is jelenti, hogy a lineáris algebrai 2.1.6. Lemmában szereplő $s_k$ mennyiség azonos az ezen tételben bevezetett $S_k$-val, ha $k \leq w + 1$. A fennmaradó egypontú blokkokra pedig $s_k$ a fokszám reciproka, így pozitív és legfeljebb $1/2$.

Summa summárum, a szomszédsági mátrix nemszinguláris, amiből a 2.1.4. Lemma szerint következik, hogy $M$-nek legalább annyi oszlopa van, mint sora, vagyis $b - w - 1 \geq v - 1$.

A $w = r - 1$ esetben megismételhetjük a fenti okoskodást, ha $S_r \leq 1$. Ha viszont $S_r > 1$, akkor csak $w$ egyenest hagyhatunk el. ■

**2. bizonyítás a de Bruijn–Erdős-tételre.** Az előző lemmából azonnal következik, hogy $b \geq v$, tehát csak a $b = v$-nek eleget tevő lineáris tereket kell vizsgálnunk. A 2.3. feladat szerint a lineáris tér degenerált, ha van két pontú egyenes.

Válasszunk egy tetszőleges $q$ pontot. Ennek $\deg(q) = r$ foka a 2.1.3. Lemma miatt legalább három. A 2.1.6. Lemma szerint $w = 0$ kell legyen, akkor viszont a lemma első része szerint minden a $q$ ponton átmenő egyenes egyforma méretű, mondjuk $x$ pontú. Eszerint akármelyik egyenest választhatjuk $L_r$-nek. Megint 2.1.6 (i) miatt az következik, hogy minden $q$-tól különböző pont foka $x$. Mivel a $q$ tetszőleges volt, így minden pont foka és minden egyenes mérete $x$ kell legyen. Ebből 2.1.3 szerint következik, hogy minden egyenes metszi egymást. Mivel $x \geq 3$, a lineáris tér $(x-1)$-edrendű projektív sík. ■

A továbbiakban célunk a de Bruijn–Erdős-tétel javítása lesz. A de Bruijn–Erdős-egyenlőtlenség csak akkor éles, ha a pontok száma $v = n^2 + n + 1$ alakú. Ha $v$ nem ilyen, akkor szorítsuk be két szomszédos ilyen alakú szám közé, azaz legyen $n^2 - n + 2 \leq v \leq n^2 + n + 1$. Azt szeretnénk belátni, hogy tetszőleges nemdegenerált lineáris térben legalább annyi egyenes van, mint ahány egy ugyanannyi pontú, de az $n$-edrendű projektív síkból néhány pont törlésével kapható lineáris térben. Ha tehát egy pontot törlünk, vagy általában $n$-nél kevesebbet, akkor a blokkok száma $n^2 + n + 1$ marad. Ha legalább $n$ pontot törlünk, akkor elképzelhető, hogy egy egyenest egy pontja híján kitöröltünk, így mivel lineáris térben nincsenek egy pontú egyenesek, az egyenesek száma eggyel csökken. Hasonlóan, amíg kevesebb, mint $2n-1$ pontot töröltünk, addig nem tudtunk egy második egyenest egy pontúvá tenni, így továbbra is legalább $n^2+n$ egyenesünk maradt. Alkalmasan törölve $2n-1$ pontot viszont elképzelhető, hogy két egyenest is kitöröltünk, azaz ekkor csak $b \geq n^2 + n - 1$-et várhatunk. Ezt fogjuk majd belátni az Erdős–Mullin–T. Sós–Stinson-tételben.

A következő lemma alsó becslést ad egy lineáris tér egyeneseinek számára.

**2.1.8. Lemma. (Stanton–Kalbfleisch, 1972)** *Legyen* $\mathbf{L}$ *lineáris tér,* $L$ *egy egyenese. Tegyük fel, hogy* $\mathbf{L}$*-nek* $v$ *pontja,* $b$ *egyenese van és* $|L| = k$*. Ekkor*

$$b \geq 1 + \frac{k^2(v-k)}{v-1},$$

*és egyenlőség pontosan akkor áll, ha* $L$ *metsz minden egyenest és minden* $L$*-től különböző egyenes mérete ugyanaz a* $k'$*, ahol ráadásul* $k(k'-1) = v-1$*.*

Mielőtt a bizonyításra térnénk, vezessünk be egy jelölést: legyen $f(k,v) = 1 + \frac{k^2(v-k)}{v-1}$.

*Bizonyítás.* A bizonyításhoz egy tipikus leszámlálási trükköt használunk, a „variancia-trükköt” (szokás a módszert „négyzetes leszámolásnak” is nevezni, l. még a 2.6. feladatot).

Legyen $\mathcal{M}$ az $L$-et metsző, $L$-től különböző egyenesek halmaza, valamint legyen $|\mathcal{M}| = m$. Ekkor

$$\sum_{M\in\mathcal{M}} 1 = m, \quad \sum_{M\in\mathcal{M}} (|M|-1) = k(v-k),$$

$$\sum_{M\in\mathcal{M}} (|M|-1)(|M|-2) \le (v-k)(v-k-1).$$

A második egyenlőség az olyan $(p, M)$ zászlók leszámolásával adódik, ahol $p \notin L$, $M \in \mathcal{M}$, míg az utolsó egyenlőtlenség a $(p, q, M)$ hármasokéból, ahol $p \ne q \notin L$, $M \in \mathcal{M}$. Ezek az összefüggések lehetővé teszik, hogy $|M|$-nek tetszőleges másodfokú kifejezését előállítsuk segítségükkel. Például

$$\sum_{M\in\mathcal{M}} |M| = k(v-k)+m, \qquad \sum_{M\in\mathcal{M}} |M|^2 \le (v-k)(v+2k)+m.$$

Ezekből a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség (vagy akinek jobban tetszik, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség) alkalmazásával az következik, hogy

$$\left(\sum_{M\in\mathcal{M}} |M|\right)^2 \le m\left(\sum_{M\in\mathcal{M}} |M|^2\right).$$

Ebből $(k(v-k)+m)^2 \le m((v-k)(v+2k)+m)$ adódik, azaz valóban $m \ge \frac{k^2(v-k)}{v-1}$. A $b$-re vonatkozó egyenlőség egyszerűen azért következik, mert $b \ge m+1$. Ha $b = f(k, v)$, akkor a számtani–négyzetes közép közti egyenlőtlenségben is egyenlőség kell álljon, vagyis minden $M \in \mathcal{M}$-re $|M|$ ugyanaz, mondjuk $|M| = k'$ kell legyen. Végül, ha $p \notin L$, akkor minden $p$-n átmenő egyenes metszi $L$-et, így $\deg(p) = k$, és a szokásos módon (2.3) alkalmazásával kapjuk, hogy $v - 1 = k(k' - 1)$. ■

Hogy kicsit pontosabb képünk legyen az $f(k, v) = 1 + \frac{k^2(v-k)}{v-1}$ függvényről, vizsgáljuk meg menetét mindkét változója szerint. A (parciális) deriváltakat megvizsgálva könnyen látható, hogy $v$ szerint $f(k, v)$ monoton csökken, míg $k$ szerint a $[2, v]$ intervallumon a függvény nő $k = 2v/3$-ig, majd csökken $k = v$-ig. Ez azt jelenti, hogy $k$ szerint akármilyen részintervallumát is vesszük a $[2, v]$-nek, azon a legkisebb értéket $f(k, v)$ az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel. Ezt az észrevételt fogjuk felhasználni a következő lemmában.

**2.1.9. Lemma.** *Legyen $\mathcal{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{L}, \in)$ nemdegenerált lineáris tér, melyre $v \ge n^2 - n + 2$ és $b \le n^2 + n + 1$ valamely $n \ge 2$ természetes számra. Legyen továbbá $k$ a legnagyobb egyenes mérete, azaz $k = \max_L |L|$. Ha $k > n + 1$, akkor $\mathcal{L}$ az $\mathbf{E}_2$ és $\mathbf{E}_3$ lineáris terek valamelyike.*

*Bizonyítás.* Mivel $\mathbf{L}$ nemdegenerált, $3 \le k \le v-2$ és $k > n+1$ miatt $k \ge 4$. Az $f(k,v)$ függvény lemma előtt említett tulajdonságaiból következik, hogy $f(k,v) \ge \min\{f(n+2,v), f(v-2,v)\}$. A $v$-re és $b$-re tett kikötések miatt az $f(v-2,v)$ érték nem jön szóba, így $b \ge f(n+2,v)$. Mivel $v \ge n^2-n+2$ és $f(k,v)$ $v$-ben monoton csökken, kapjuk, hogy

$$n^2+n+1 \ge b \ge f(n+2, n^2-n+2) = n^2+n+1+\frac{2n^3-4n^2-9n}{n^2-n+1},$$

amiből rögtön adódik, hogy $n \le 3$. Itt $n=2$-re $k \ge 4$ és egy $k$ hosszú egyenesen kívül van legalább két pont. Ezeket összekötve a $k$ pontú egyenes pontjaival, összesen legalább $1+1+2(k-1) \ge 8$ egyenes lenne, de $n=2$-re $b \le 7$. Hasonlóan láthatjuk, hogy $n=3$-ra $k=5$ vagy 6 lehet. Ekkor $k=5$-re a Stanton–Kalbfleisch lemma miatt $b \ge 1+\frac{25(v-5)}{v-1}$, amiből $v=8$ adódik. Ugyanezt (ti. hogy $v=8$) kapjuk $k=6$-ra is, sőt azt se nehéz belátni (l. 2.7. feladat), hogy $\mathcal{L} = \mathbf{E}_2$, ha $k=6$, valamint $\mathcal{L} = \mathbf{E}_3$, ha $k=5$. ■

A következő tétel lesz főtételünk. Mielőtt kimondanánk, vezessük be az alábbi $B(v)$ függvényt (amelyet a de Bruijn–Erdős-tétel élesítésének motivációjakor már említettünk):

Szorítsuk $v$-t az $(n-1)^2+(n-1)+1$ és $n^2+n+1$ értékek közé (valamely $n$ természetes számra) és legyen

$$B(v) = \begin{cases} n^2+n-1, & \text{ha } v = n^2-n+2 \text{ és } v \ne 4, \\ n^2+n, & \text{ha } n^2-n+3 \le v \le n^2+1 \text{ vagy } v=4, \\ n^2+n+1, & \text{ha } n^2+2 \le v. \end{cases}$$

A Stanton–Kalbfleisch lemma előtti okoskodás azt adja, hogy ha a lineáris tér beágyazható $n$-edrendű projektív síkba, akkor legalább $B(v)$ egyenese van. Az alábbi fontos tétel ezt általában mutatja.

**2.1.10. Tétel. (Erdős, Mullin, T. Sós, Stinson)** *Nem-degenerált lineáris térre $b \ge B(v)$.*

*Bizonyítás.* A szokásos módon legyen $n^2-n+2 \le v \le n^2+n+1$ és jelöljük $k$-val a maximális egyenesméretet. A 2.1.9. Lemma miatt feltehetjük, hogy $k \le n+1$. Mivel $v \ge n^2-n+2$, így ebből következik, hogy minden pont foka legalább $n$. Ha ugyanis valamely pont foka legfeljebb $n-1$ lenne, akkor összesen legfeljebb $n(n-1)+1$ pont lehetne.

A bizonyítás esetszétválasztással történik.

**1. eset:** $k = n+1$.

Legyen $L$ egy $n+1$ pontból álló egyenes. Ha $L$ minden pontjának foka $n+1$, akkor már az $L$-et metsző egyeneseket számolva látunk $(n+1)(n+1-1)+1$ egyenest, így ekkor $b \ge B(v)$.

Feltehetjük tehát, hogy $L$-en van olyan $p$ pont, amelynek foka $n$. Jegyezzük meg, hogy ekkor $v-1 \leq \deg(p)n$, azaz $v \leq n^2+1$.

Két alesetet különböztetünk meg.

*1.a aleset:* Létezik egy $H \neq L$ egyenes $p$-n, amely szintén $n+1$ pontú. Ekkor a 2.1.3. Lemma miatt $L$ minden $p$-től különböző pontjának foka legalább $|H| = n+1$. Tehát a blokkok száma $b \geq n^2+n$, míg $v \leq n^2+1$, azaz ekkor is fennáll $b \geq B(v)$.

*1.b aleset:* $L$ az egyetlen $p$-n átmenő $n+1$ pontú egyenes. Ekkor

$$v \leq n+1+(n-1)(n-1) = n^2-n+2.$$

A kiindulási egyenlőtlenség miatt itt egyenlőség kell álljon, azaz a további $p$-n átmenő egyenesek mind $n$ pontúak. Feltehető, hogy $n \neq 2$, mert akkor $v=4$ és $k=3$ miatt a lineáris tér degenerált lenne. Soroljuk fel a $p$-n átmenő egyeneseket: $L = R_1, R_2, \ldots, R_n$. Ha $p \neq q \in R_2 \cup R_3$, akkor $q$ foka 2.1.3. Lemma miatt legalább $n+1 (= |L|)$. Így az $R_2$-t és $R_3$ valamelyikét metsző egyenesek száma legalább $n+(n-1)(n-1)+2(n-1) = n+n^2-1 = = B(v)$, amit bizonyítani akartunk. Az előző összeszámláláskor az első tag a $p$-n átmenő egyenesek száma, a második a mind $R_2$-t, mind $R_3$-at metsző egyenesek száma, végül a harmadik tag az $R_i$-t metsző, $R_j$-t nem metsző egyenesek száma, ahol $\{i,j\} = \{2,3\}$.

**2. eset:** $k = n$.

Ekkor a $v-1 \leq \deg(p)(n-1)$ összefüggésből adódik, hogy $\deg(p) \geq n + + 1$ minden pontra. Így egy $n$ pontú $N$ egyenes $n^2$ további egyenest metsz, vagyis $b \geq n^2+1+c$, ahol $c$ az $N$-et nem metsző egyenesek számát jelöli. Mivel minden pont foka legalább $n+1$, minden ponton át megy $N$-et nem metsző egyenes. Kétféleképpen megszámolva a $(p,M)$ párokat, ahol $p \notin N$, $N \cap M = \emptyset$, kapjuk, hogy $cn \geq v-n$. Ezt $b = n^2+1+c$-vel összevetve $b \geq B(v)$ adódik.

**3. eset:** $k \leq n-1$.

Ebben az esetben is tudjuk, hogy minden pont foka legalább $n+1$ (ugyanúgy, mint a 2. esetben). Eszerint $v(n+1) \leq b(n-1)$ ((1.1) miatt), vagyis $b \geq n^2+n+1 \geq B(v)$. ■

Fontos megjegyezni, hogy az Erdős, Mullin, T. Sós, Stinson [21]. Tétel jelentősen javít a de Bruijn–Erdős-tétel egyenlőtlenség részén, de a „teljes" általánosítás az volna, hogy egy $v$ pontú $B(v)$ egyenesű lineáris tér mindig megkapható projektív síkból néhány pont és a két pontnál kevesebb pontot tartalmazó egyenesek törlésével. (Más szóval: egy ilyen lineáris tér *beágyazható* projektív síkba.) Ezt a módosítást nemrégiben Klaus Metsch [43] látta be: egyetlen kivétel van, az $\mathbf{E}_1$ lineáris tér. Ez tényleg kivétel, hiszen a Fano-síkot nem lehet PG(2,3)-ba beágyazni.

Jegyezzük meg azt is, hogy a tétel semmit nem állít abban az esetben, ha $v = n^2+n+1$, de nem létezik $n$-edrendű projektív sík. Persze a Metsch-féle

kombinatorikus beágyazási tétel ekkor kettővel megjavítja a de Bruijn–Erdős-tételben szereplő korlátot, de ennél többet nem ad.

Hasonló ízű eredmény több is van: Bridges 1972-ben jellemezte azokat a lineáris tereket, amelyekre $b = v + 1$. Ezt többen továbbfejlesztették, majd Totten 1976-ban jellemezte azokat a lineáris tereket, amelyekre $(b - v)^2 \leq \leq b$. Hanani (1954-55) és Varga (1985) belátta, hogy azok a lineáris terek, amelyben minden maximális méretű egyenes legalább $v - 1$ további egyenest metsz, pontosan a degeneráltak és a projektív síkok. Végül említsük meg a Dowling–Wilson sejtést, amelyet nemrégen Metsch [45] bizonyított: Ha egy adott ponton át egy egyenessel $t$ párhuzamos egyenes van, akkor $b \geq v + t$.

A fejezet hátralevő részében azzal fogunk foglalkozni, hogy érzékeltessük a fentebb említett beágyazási tételek bizonyítását, legalábbis abban az esetben, ha minden pont foka $n + 1$.

**2.1.11. Definíció.** Ha egy lineáris tér $(n+1)$-reguláris, akkor $(n+1,1)$-*rendszer*nek nevezzük. Minden egyenesre jelöljük $d_L$-lel az $n + 1 - |L|$ differenciát. (Jegyezzük meg, hogy a regularitás teljesülését megkönnyítendő, az $(n+1,1)$-rendszer definíciójában szokás megengedni egypontú egyeneseket is, sőt azok lehetnek többszörösek is, mi azonban ezt nem tesszük.) □

**2.1.12. Lemma.** *Legyen* $\mathbf{D}$ $(n + 1,1)$*-rendszer; a pontok számát jelölje* $v = n^2 + n + 1 - s$*, az egyenesekét pedig* $b = n^2 + n + 1 + z$*. Ekkor*

*(i) Egy rögzített* $L$ *egyenessel párhuzamos egyenesek száma* $d_L n + z$*.*

*(ii) Két egyenessel,* $L$*-lel és* $H$*-val párhuzamos egyenesek száma* $d_H d_L + z$*, ha* $H$ *és* $L$ *metszők,* $n - 1 + (d_H - 1)(d_L - 1) + z$*, ha* $H$ *és* $L$ *párhuzamos.*

*(iii) Ha* $\mathcal{M}$ *jelöli egy adott* $L$ *egyenessel párhuzamos egyenesek halmazát, akkor*

$$(v - |L|)d_L = \sum_{X \in \mathcal{M}} |X|.$$

*Bizonyítás.* Olyan egyszerű, hogy feladatnak hagyjuk (l. 2.8. feladat)! ■

**2.1.13. Lemma.** *Legyen* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{L})$ $(n + 1,1)$*-rendszer; a pontok számát jelölje* $v = n^2 + n + 1 - s$*, az egyenesekét pedig* $b = n^2 + n + 1 + z$*. Ekkor*

$$\sum_{L \in \mathbf{L}} d_L = (s + z)(n + 1) \quad \text{és} \quad \sum_{L \in \mathbf{L}} {d_L}^2 = s(n + s) + (n + 1)^2 z.$$

*Bizonyítás.* Lásd a 2.9. feladatban (csak (1.1)-t és (2.2)-et kell használni). ■

**2.1.14. Lemma.** *Legyen* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{L})$ $(n + 1,1)$*-rendszer; a pontok számát jelölje* $v = n^2 + n + 1 - s$*, az egyenesekét pedig* $b = n^2 + n + 1$*. Ekkor*

*(i) Az* $n$ *pontú egyenesek* $b_n$ *számára* $b_n \geq s(n + 2 - s)$ *teljesül. Ha speciálisan* $n^2 + 1 \leq v \leq n^2 + n - 1$*, akkor* $b_n \geq 2n$*.*

*(ii) Ha nincs* $n$ *pontú egyenes, akkor*

$$\sum_{L} |L|(|L| - 2) = s(s - 2 - n).$$

*Bizonyítás.* A bizonyítást l. a 2.10. feladatban. ■

A most következő eredmény arról szól, hogy bizonyos lineáris tereket be lehet ágyazni projektív síkba.

**2.1.15. Tétel.** *Tegyük fel, hogy egy* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{L})$ $(n+1,1)$*-rendszernek* $v$ *pontja,* $n^2+n+1$ *egyenese van, továbbá találunk benne* $t$ *páronként metsző* $n$ *pontú egyenest. Ekkor* $\mathbf{D}$ *beágyazható egy* $v+t$ *pontú (és továbbra is* $n^2+n+1$ *egyenesű)* $(n+1,1)$*-rendszerbe.*

*Bizonyítás.* Legyenek $N_1, \dots, N_t$ a tételben említett páronként metsző $n$ pontú egyenesek. Mivel minden pont foka $n+1$, minden $N_j$-n nem levő ponton pontosan egy $N_j$-vel párhuzamos egyenes megy át. Legyen $\Pi_j = \{N_j\} \cup \{L \,:\, L \cap N_j = \emptyset\}$ $(j = 1 \dots, t)$; szemléletesen $\Pi_j$ az $N_j$ „párhuzamossági osztálya". 2.1.12 (i) szerint $|\Pi_j| = n+1$. Ha $j \neq k$, akkor $N_j$ és $N_k$ metszi egymást, továbbá $|N_j| = n$ miatt $N_j$ pontosan $n$ egyenesét metszi $\Pi_k$-nak. Van tehát egy (és csak egy) olyan $\Pi_k$-beli egyenes, amely nem metszi $N_j$-t. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy $|N_j \cap N_k| = 1$. Az affin sík projektívvá bővítését fogjuk imitálni, azaz minden $\Pi_j$ párhuzamossági osztályhoz hozzárendelünk egy $\infty_j$ „ideális pontot" (ez csak annyit jelent, hogy $\infty_j$ nem pontja $\mathbf{P}$-nek). Precízebben, legyenek az $\infty_j \notin \mathbf{P}$ szimbólumok páronként különbözőek, és definiáljunk egy új $\mathbf{D}'$ illeszkedési struktúrát a következőképpen:

(a) $\mathbf{D}' = (\mathbf{P} \cup \{\infty_1, \dots, \infty_t\}, \mathbf{L}, I)$, ahol
(b) $p \in \mathbf{P}$, $L \in \mathbf{L}$ esetén $p \; I \; L$ akkor és csak akkor ha $p \in L$ (megtartjuk a $\mathbf{D}$-beli illeszkedést),
(c) $L \in \mathbf{L}$-re legyen $\infty_j \; I \; L$ pontosan akkor, ha $L \in \Pi_j$.

Esetszétválasztással könnyen ellenőrizhető (l. a 2.11. feladatot), hogy $\mathbf{D}'$-ben bármely két ponton egy és csak egy egyenes megy át, és persze $\mathbf{D}'$ $v+t$ pontú. ■

**2.1.16. Következmény. (Vanstone, 1973)** *Ha egy* $\mathbf{D}$ $(n+1,1)$*-rendszernek* $n^2 + n + 1$ *egyenese van és a pontok száma* $v \geq n^2$*, akkor* $\mathbf{D}$ *beágyazható* $n$*-edrendű projektív síkba.*

*Bizonyítás.* $s = n^2+n+1-v$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha $s = 0$, akkor 2.1.12 szerint minden egyenes $n+1$ pontú, azaz $\mathbf{D}$ maga projektív sík.

Tegyük fel, hogy $s > 0$. 2.1.12 (i) mutatja, hogy létezik $N$ egyenes, melynek $n$ pontja van. 2.1.15 szerint ilyenkor tudjuk bővíteni $\mathbf{D}$-t ($t \geq 1$ ponttal, ahol $t$ a páronként metsző egyenesek maximális száma). Ilyenkor viszont $s$ csökken, azaz a bővített struktúra $n$-edrendű projektív síkba ágyazható. ■

Mivel az eddigi eredmények elég erős megszorításokkal garantálták a lineáris tér projektív síkba ágyazhatóságát, lássunk most egy viszonylag keveset kívánó eredményt. A tétel *parciális projektív síkok*ra vonatkozik, azaz olyan halmazrendszerekre, amelyeknek $n^2 + n + 1$ pontja van, és minden részhalmaz $n+1$ pontú, továbbá bármely két részhalmaznak legfeljebb egy közös pontja van. Tehát semmilyen „pontosan egy" típusú feltétel nincs, azaz lehetnek akár diszjunkt blokkok, összekötetlen pontpárok is.

**2.1.17. Tétel.** (Metsch [44]) *Legyen* $\mathbf{D}$ *parciális projektív sík* $n^2 + n + 1$ *ponton, ahol* $n \geq 15$*. Ha* $\mathbf{D}$ *egyeneseinek száma több, mint* $n^2+1$*, akkor a parciális projektív sík beágyazható projektív síkba (ugyanazon a ponthalmazon).*

## 2.2. Feladatok

2.1. *(Transfer-lemma)* Legyen $\mathcal{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{L}, I)$ lineáris tér.

Tegyük fel, hogy $L$ és $L'$ egyenesek, $p$ pedig olyan pont, amely sem $L$-en, sem $L'$-n nincs rajta. Legyen $t$ azon egyenesek száma, amelyek átmennek $p$-n, metszik $L$-et de nem metszik $L'$-t. Ekkor azon $p$-n átmenő egyenesek száma, amelyek $L'$-t metszik, de $L$-et nem, $t + |L'| - |L|$.

Ha most $H$, $L$ és $L'$ egyenesek úgy, hogy $H$ metszi $L$-et, de nem metszi $L'$-t, akkor legalább $(|H| - 1)(1 + |L'| - |L|)$ olyan egyenes van, amely $H$-t és $L'$-t metszi, de nem metszi $L$-et.

2.2. *(Parallel-lemma)* Legyen $\mathcal{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{L}, I)$ lineáris tér. Legyen továbbá $N$ egy $n$-pontú egyenes, valamint $L_1$, $L_2$ olyan metsző egyenesek, amelyek nem metszik $N$-et. Legyen $|L_j| = n + 1 - d_j$ ($j$ = 1,2-re), valamint

$$t = \sum_{p \in N} (\deg(p) - n - 1).$$

Ekkor

$$d_1 d_2 \geq n - t.$$

2.3. Ha egy lineáris térben $b = v$ és van két pontú egyenes, akkor az degenerált.

2.4. Fogalmazzuk meg (és bizonyítsuk) a de Bruijn–Erdős-tétel duálisát!

2.5. Legyen $B = \lambda J_n + \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. (Persze $J_n$ az $n \times n$-es csupa 1 mátrix.) Szegélyezzük ezt a mátrixot egy csupa 1-es első sorral és egy az első elemet kivéve csupa 0 első oszloppal. Ezt könnyen triangulárissá alakíthatjuk, így $B$ determinánsa

$$\gamma_1 \ldots \gamma_n \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{\gamma_1} + \ldots \frac{1}{\gamma_n}\right)\right)$$

lesz (ezt szokás „bordering trick”-nek hívni.)

2.6. Egy projektív sík pontjait két színnel színeztük. Egy $E$ egyenesre legyen $p_E$ ill. $k_E$ az első (piros) ill. a második (kék) pontok száma. Mutassuk meg, hogy $\sum_E (p_E - k_E)^2$ csak a színosztályok méretétől függ (attól, hogy hogyan színeztünk, nem)!

2.7. Vizsgáljuk meg az $n = 3$ eseteket a 2.1.9. Lemma bizonyításában!

2.8. Bizonyítsuk be a 2.1.12. Lemmát!

2.9. Bizonyítsuk be a 2.1.13. Lemmát!

2.10. Bizonyítsuk be a 2.1.14. Lemmát!

2.11. Ellenőrizzük, hogy a 2.1.15. Tétel bizonyításában szereplő $\mathbf{D}'$ illeszkedési struktúrában bármely két ponton egy és csak egy egyenes megy át!

# 3. fejezet

# Blokkrendszerek

## 3.1. Alapvető tulajdonságok és példák

Ebben a szakaszban kezdjük igazán a szimmetrikus struktúrák tárgyalását.

**3.1.1. Definíció.** A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ egyszerű illeszkedési struktúrát *blokkrendszer*nek vagy pontosabban *2-*$(v, k, \lambda)$*-blokkrendszer*nek nevezzük, ha $v$ pontja van ($|\mathbf{P}| = v$), $k$-uniform (azaz $\forall B \in \mathbf{B} : \ |B| = k$), továbbá bármely két különböző pont $\lambda$ blokkban (élben) van benne. 2-$(v, k, \lambda)$-blokkrendszer helyett gyakran csak $(v, k, \lambda)$*-rendszer*t mondunk és írunk. Abban a speciális esetben, ha $\lambda = 1$, a blokkrendszert szokás *Steiner-rendszer*nek is nevezni. Tehát a Steiner-rendszerek nem mások, mint az uniform lineáris terek.

Abban az esetben, ha a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúra tartalmaz többszörös éleket, de a másik két feltételt teljesíti (minden blokkhoz $k$ pont, minden pontpárhoz $\lambda$ blokk illeszkedik), akkor *(uniform) 2-*$(v, k, \lambda)$*-struktúrá*ról beszélünk. Ha az uniformitási feltétel sem teljesül, de minden pontpárra $\lambda$ blokk illeszkedik, akkor egyszerűen csak *2-struktúrá*ról beszélünk. □

A most bevezetett osztályok közötti kapcsolatra a következő szakaszban, a Fisher-egyenlőtlenség tárgyalásakor még visszatérünk.

A blokkrendszerek nemcsak uniformak, hanem regulárisak is, amint azt a következő állítás mutatja.

**3.1.2. Állítás.** *$(v, k, \lambda)$-rendszerben (sőt $(v, k, \lambda)$-struktúrában) minden pont foka $r$, ahol*

$$r = \lambda(v - 1)/(k - 1),$$

*a blokkok száma pedig*

$$b = \lambda v(v-1)/k(k-1).$$

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy $p$ pontot. Számoljuk meg kétféleképpen azokat a $(q, L)$ zászlókat (illeszkedő pont-egyenes párokat), amelyekre $p \in L$ és $q \neq p$. Ezek száma egyrészt $\deg(p)(k-1)$, másrészt (pontról pontra számolva) $(v-1)\lambda$. Ebből az $r$-re vonatkozó állítás azonnal, a $b$-re vonatkozó pedig a $bk = vr$ (l. 1.2.10. Következmény) felhasználásával adódik. ■

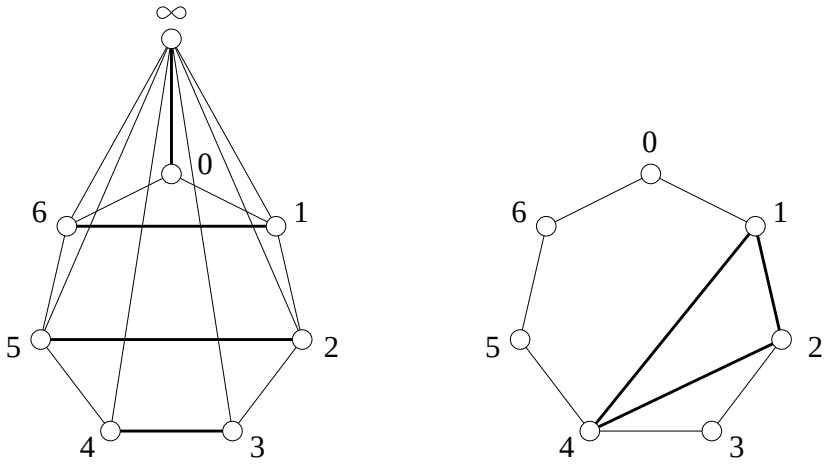
**3.1.3. Következmény.** *A $(v, k, \lambda)$-rendszerek létezéséhez szükséges, hogy*

$$(1) \quad \lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1};$$
$$(2) \quad \lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}. \quad ■$$

Természetesen az alapvető kérdés az, hogy ezek a feltételek elégségesek-e a megfelelő paraméterű blokkrendszerek létezéséhez. Mint később látni fogjuk, a válasz nemleges. Akkor viszont az az érdekes, hogy lehet-e találni további feltételeket úgy, hogy azokkal együtt a 3.1.3-beli feltételek már elégségesek legyenek. További feltételek vannak, az elégségességtől azonban messze vagyunk. Időrendben először a $k = 3$ esetet vizsgálták részletesen. 1850-ben Kirkman vetette fel (és oldotta meg még abban az évben) az alábbi problémát:

*15 iskoláslány egy hétig minden nap sétálni megy. Egy sorban hárman mennek. Tervezzünk olyan sétarendet, amelyben semelyik két lány nem sétál egy sorban kétszer.*

Matematikai nyelven ez a következőt jelenti: 15 elemen adjunk meg $35 = 7 \cdot 5$ hármast úgy, hogy bármely két elem legfeljebb egy hármasban legyen benne. Könnyen látható (l. 3.1 feladat), hogy amiatt, hogy 35 hármast adtunk meg, bármely két elem pontosan egy hármasban van benne. A fenti terminológia szerint tehát a sétarend egy (15,3,1)-rendszert ad meg. Ez tehát egy $k = 3$ blokkméretű Steiner-rendszer. A Kirkman problémában szereplő sétarendnek azonban van még egy tulajdonsága. Egy-egy napon a sorok (azaz a blokkok) páronként diszjunktak és lefedik a pontokat. Ez valami olyasmi, mint a geometriában a párhuzamosság. Erre a kérdéskörre később még visszatérünk. Most lássuk a Kirkman probléma egy szép (ciklikus) megoldását (l. 3.1. ábra). Az ábra egy napi sétarendet mutat ezt forgatjuk el (egyszerre) az ábra mindkét oldalán. A bal oldali részen levő vastag élekhez a jobb oldali részen egy-egy pontot rendelünk hozzá. A $0\infty$ élhez a jobb oldali 0 pontot, egyébként pedig minden élhez azt a jobb oldali pontot, amelyet a jobb oldalon szereplő vastag háromszög az adott él helyzetébe való elforgatásakor harmadik csúcsként kapunk. Tehát pl. a 34 él esetén az 12-t kell elforgatni $2\frac{2\pi}{7}$-tel, és a 4 pont a 6-ba kerül, tehát a bal oldali 34 élhez a jobb oldali 6 pont tartozik. Ez a megoldás (kicsit más formában) szerepel [8]-ban. A




3.1. ábra. A Kirkman probléma egy ciklikus megoldása

további napokon való sétarendeket az ábrán szereplőből $\frac{2\pi}{7}$ többszöröseivel való elforgatásokkal kapjuk (ahol a bal oldalon a $\infty$ pont fixen marad az elforgatásoknál). Az ábra jobb oldali részén a vastag háromszög elforgatottjai a Fano-síkot adják (l. 1.2.6. Példa). Ezt a modellt a differenciahalmazoknál látjuk majd újra.

Jegyezzük meg, hogy a Kirkman problémának 6 megoldása van, ha azonos hármasrendszereket különböző párhuzamossággal különbözőnek tekintünk. Ha csupán a hármasrendszereket nézzük, akkor 4 különböző van. Említsük meg, hogy 15 ponton összesen 80 páronként nem-izomorf hármasrendszer van.

Térjünk most rá a $k = 3$ eset vizsgálatára (a párhuzamosság extra követelménye nélkül). A ($v$,3,1)-rendszereket szokták Steiner-hármasrendszereknek is nevezni. A rövidség kedvéért a $v$ pontú Steiner-hármasrendszereket STS($v$)-vel fogjuk jelölni. A 3.1.3. Következmény azt mondja, hogy $2|v-1$ és $6|v(v-1)$ szükséges feltétel a létezéshez. Magyarul Steiner-hármasrendszerek csak $v \equiv 1$ vagy $v \equiv 3 \pmod 6$ esetén létezhetnek. Célunk az lesz, hogy néhány konstrukció segítségével megmutassuk, hogy minden $v \equiv 1$ vagy $v \equiv 3 \pmod 6$ esetén léteznek Steiner-hármasrendszerek.

**3.1.4. Példa. (Kirkman $v \to 2v+1$ konstrukció)** Ez egy rekurzív konstrukció lesz. Jegyezzük meg, hogy ha van STS($v$), akkor $v$ páratlan. Azt mutatjuk meg, hogy ha létezik egy $T$ STS($v$), akkor létezik STS($2v+1$) is. Ráadásul ez olyan lesz, amelyben a kiindulási STS($v$)-t részrendszerként megtaláljuk. Legyen $T$ ponthalmaza $\{1,\dots,v\}$. Válasszunk $v+1$ további pontot, $\{v+1,\dots 2v+1\}$-et. Tekintsük a $K_{v+1}$ teljes gráfot a $\{v+1,\dots 2v+1\}$ ponto-

kon, és bontsuk fel $v$ darab 1-faktor (teljes párosítás) egyesítésére. (Egy ilyen felbontást szoktak *1-faktorizáció*nak nevezni. Ez nem más, mint egy párhuzamosság a teljes gráf élein.) Minden ilyen 1-faktorhoz rendeljük hozzá $T$ valamelyik pontját, és ezt a hozzárendelt pontot vegyük hozzá az 1-faktorban szereplő minden párhoz (élhez). Ezenkívül tartsuk meg $T$ blokkjait. Szinte magától értetődő, hogy így Steiner-hármasrendszert kapunk (a részletekért l. a 3.2. feladatot, valamint a 3.3,4. feladatokat). Annyit talán ellenőrizzünk, hogy a blokkok száma stimmel: $T$-ben van $v(v-1)/6$ blokk, ehhez vettünk hozzá $(v+1)v/2$-t, ez összesen $v(3v+3+v-1)/6$, ami valóban egy $2v+1$ pontú STS blokkjainak száma, azaz $(2v+1)(2v)/6$.

Igazából ezt a konstrukciót ki is találhattuk volna. Tekintsünk ugyanis egy $2v+1$ pontú Steiner-hármasrendszert, amely részrendszerként tartalmazza a $v$ pontú $T$ hármasrendszert. Ekkor $S$ minden blokkja nyilván legfeljebb egy pontban metszi $T$-t, de a blokkok megszámolásával (lényegében az előző számolás megfordításával) azt is láthatjuk, hogy minden nem $T$-beli blokk pontosan egy pontban metszi $T$-t. Tekintsük az $S \setminus T$ pontjait egy $v+1$ csúcsú teljes gráf csúcsainak. A $T$ egy rögzített pontján átmenő blokkok száma $(2v+1-1)/2 = v$, amelyből $(v-1)/2$ blokk van $T$-ben. Így a fennmaradó $(v+1)/2$ él valóban a teljes gráf egy 1-faktorát (teljes párosítását) adja. Különböző $T$-beli pontokra ezek az 1-faktorok diszjunktak, azaz együtt valóban 1-faktorizációt alkotnak. ■

A Kirkman konstrukciót is illusztrálhatjuk a 3.1. ábrán. Ekkor a bal oldali rész vastag éleihez ugyanazt a jobb oldali pontot kell hozzávenni (pl. 0-t), majd az így kapott blokkokat elforgatni. A $T$ részrendszer a jobb oldali Fano-sík, a bal oldalon pedig a 8 pontú teljes gráf 1-faktorát látjuk, melyeket elforgatva (úgy, hogy közben $\infty$ fixen marad) egy 1-faktorizációt kapunk. A Fano-síkból kiindulva így tehát egy 15 pontú Steiner-rendszert kapunk. A Kirkman-konstrukció azonban kevés ahhoz, hogy minden $v \equiv 1$ vagy 3 (mod 6)-ra konstruáljunk annyi ponton STS-et. Ismerjünk meg egy további elemi eljárást.

**3.1.5. Példa. (Skolem módszere)** Ezt először a $v = 6m+1$ esetben mondjuk el. Ekkor 3.1.2 miatt a hármasok (blokkok) száma $b = m(6m+1)$. Legyenek a pontok $0,1,\ldots,6m$. Hogy a konstrukciót könnyebb legyen elmondani, a pontokat egy kivétellel mátrix alakba rendezzük:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \ldots & m-1 & m & m+1 & \ldots & 2m-1 \\ 2m & 2m+1 & \ldots & 3m-1 & 3m & 3m+1 & \ldots & 4m-1 \\ 4m & 4m+1 & \ldots & 5m-1 & 5m & 5m+1 & \ldots & 6m-1 \end{array}$$

A blokkok három típusba oszthatók:

(i) $\{i, 2m+i, 4m+i\}$, ahol $0 \le i \le m-1$

(ii) $\{m+i, 2m+i, 6m\}$, $\{3m+i, 4m+i, 6m\}$, $\{5m+i, i, 6m\}$, ismét $0 \le i \le$ $\le m-1$-re,

(iii) Azon $\{a, b, c\}$ hármasok, ahol $a$ és $b$ a fenti mátrix azonos sorában van és $c$ a következőben (mod 3), továbbá

- ha $a+b$ páros, $2c \equiv a+b \pmod{2m}$, és $c$ a sor első felében van,
- ha $a+b$ páratlan, $2c \equiv a+b-1 \pmod{2m}$, és $c$ a sor második felében van.

Hosszadalmas, de könnyű verifikálni, hogy így valóban STS-t kapunk (l. 3.5. feladat). ■

**3.1.6. Példa.** Használhatjuk Skolem módszerét a $v = 6m+3$ esetben is. Mátrixunk ebben az esetben

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 2m \\ 2m+1 & 2m+2 & \dots & 4m+1 \\ 4m+2 & 4m+3 & \dots & 6m+2 \end{array}$$

és blokkunk is csak kétféle lesz:

(i) „függőleges blokkok": $\{j, j+2m+1, j+4m+2\}$, $(j = 0, \dots, 2m)$.

(ii) $\{a, b, c\}$, ahol $a, b$ azonos sorban vannak, $c$ a következőben (mod 3), továbbá $2c \equiv a+b \pmod{2m+1}$.

Újra csak könnyű, de hosszadalmas ellenőrizni, hogy STS-t kapunk (l. 3.6. feladat). ■

Az eddigi konstrukciók mutatják, hogy STS-eket viszonylag könnyű konstruálni. Az ismertetettek talán a legegyszerűbb konstrukciók, szinte számtalan további konstrukció ismert. Érdemes megemlíteni, hogy több véges testek elemi tulajdonságait használó konstrukció is ismert (melyek általában szép automorfizmus-csoporttal rendelkező STS-eket adnak), a 3.7. feladatban egy Netto-tól eredő ilyen konstrukciót ismertetünk.

A Steiner-hármasrendszerek egy másik algebrai vonatkozása a következő: Definiálunk egy műveletet az STS pontjain a természetes módon. Legyen $a \circ b = c$, ha $a \neq b$ és az $a, b$-t tartalmazó blokk épp $\{a, b, c\}$. Ha ezt kiegészítjük az $a \circ a = a$ definícióval, akkor (idempotens) kvázicsoportot kapunk, amelyben teljesül az

$$(a \circ b) \circ a = b$$

azonosság. Megfordítva, egy a fenti azonosságnak eleget tevő, kommutatív, idempotens kvázicsoportból Steiner-hármasrendszert kaphatunk (l. 3.8. feladat). Ebből például az is következik, hogy ha létezik $v_1$ és $v_2$ ponton STS,

akkor van $v_1v_2$ ponton is, hiszen a megfelelelő kvázicsoportok direkt szorozhatók.

Zárjuk a Steiner-hármasrendszerek áttekintését a kis $v$ értékekkel: $v = 7$-re egyetlen STS van, a Fano-sík, $v = 9$-re szintén, az AG(2,3) affin sík. $v = 13$-ra két hármasrendszer van, melyeket már a XX. század elején ismertek, végül $v = 15$-re 80 nem-izomorf rendszer van. Ez is mutatja, hogy bekövetkezik a kombinatorikus robbanás $v$ növelésével.

Mi történik, ha $k$ értéke nagyobb? A $k = 4$ esetben a szükséges feltételek (3.1.3) azt adják, hogy $v \equiv 1$ vagy 4 (mod 12), és Hanani minden ilyen $v$-re konstruált is Steiner-rendszert. A $k = 5$ eset már bonyolultabb, a szükséges feltétel most $v \equiv 1$ vagy 5 (mod 20), és minden ilyen $v$-re ismert konstrukció: Hanani, Wilson és Ray-Chaudhuri [31] adott meg ilyet. Azonban már a $k = 6$ esetben sem ismert, hogy a 3.1.3-beli szükséges feltételek által megengedett minden $v$-re lenne Steiner-rendszer. Elég nagy $v$-re és rögzített $k$-ra azonban ez így van, mint azt a Wilson tétel mutatja (l. később a 3.1.13. Tételt).

Lássunk néhány további példát blokkrendszerekre.

**3.1.7. Példa.** *Legyen* $\mathbf{D}$ 2-$(v, k, \lambda)$*-rendszer. Ennek* $\bar{\mathbf{D}}$ *komplementere (amelyben a blokkok az eredeti blokkok komplementerei)* 2-$(v, v-k, \bar{\lambda})$ *blokkrendszer, ahol* $\bar{\lambda} = b - 2r + \lambda$.

Ehhez csak annyit kell meggondolnunk, hogy az eredeti blokkrendszerben két ponton át nem menő blokkok száma $\bar{\lambda} = b - 2r + \lambda$.

**3.1.8. Példa.** Legyen $\mathcal{P}$ $n$-edrendű projektív sík. Ekkor $\mathcal{P}$ $(n^2 + n + 1, n + 1,1)$-rendszer. Jegyezzük meg, hogy ez lényegében ekvivalens a projektív síkok első szakaszban szereplő definíciójával (l. 3.9. feladat), azaz $(n^2 + n + 1, n + 1,1)$-rendszer projektív sík.

**3.1.9. Példa.** Legyen $\mathcal{P}$ $n$-edrendű affin sík. Ekkor $\mathcal{P}$ $(n^2, n,1)$-rendszer. Jegyezzük meg, hogy ez lényegében ekvivalens az affin síkok 1.1 szakaszban (1.1. feladat) szereplő definíciójával (l. 3.10 feladat), azaz $(n^2, n,1)$-rendszer affin sík.

Általánosabban a projektív és affin terek is blokkrendszereket adnak.

**3.1.10. Példa.** Legyen $\Sigma$ a PG$(n, q)$ projektív tér. Definiáljunk egy illeszkedési struktúrát, melyben a pontok $\Sigma$ pontjai, a blokkok $\Sigma$ $d$-dimenziós alterei (valamely rögzített $1 \le d \le n-1$-re). Könnyen verifikálható, hogy ez blokkrendszer, az alábbi paraméterekkel

$$v = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad k = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \quad \lambda = \frac{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\dots(q^{n-d+1}-1)}{(q^{d-1}-1)\dots(q-1)}.$$

Ezt a blokkrendszert $\mathrm{PG}_d(n,q)$-val fogjuk jelölni. Jegyezzük meg, hogy ez a blokkrendszer csak akkor lesz négyzetes (azaz $v=b$), ha $d=n-1$, azaz ha a hipersíkokat tekintjük blokkoknak.

**3.1.11. Megjegyzés.** A $\lambda$ meghatározásában szereplő kifejezést szokás Gauss-féle binomiális együtthatónak (vagy $q$-binomiális együtthatónak) nevezni. Ezekkel röviden megismerkedtünk az 1.1. szakasz végén, idézzük fel, hogy a Gauss-féle binomiális együtthatókat az

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-d+1}-1)}{(q^d-1)(q^{d-1}-1)\dots(q-1)}$$

kifejezés definiálja. Lineáris algebrából tudhatjuk, hogy ez nem más, mint egy $n$ dimenziós vektortér $d$ dimenziós altereinek száma. Ezzel a jelöléssel nagyon könnyű felírni a $\mathrm{PG}_d(n,q)$ blokkrendszer paramétereit:

$$v = \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q ; \quad k = \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q , \quad \lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q .$$

A további paraméterek $(r,b)$ szintén egyszerűen felírhatók:

$$r = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q ; \quad b = \begin{bmatrix} n+1 \\ d+1 \end{bmatrix}_q .$$

**3.1.12. Példa.** Lemásolhatjuk a 3.1.10. Példát affin terekre. Ekkor az $\mathrm{AG}_d(n,q)$ blokkrendszer pontjai az affin tér pontjai, a blokkok a $d$ dimenziós affin alterek (azaz a vektortér alterek mellékosztályai), a paraméterek pedig:

$$v = q^n, \quad k = q^d, \quad \lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q , \quad r = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q , \quad b = q^{n-d} \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q .$$

Hasonlóan adhatunk további geometriai példákat blokkrendszerekre. Ezek ugyan végtelen osztályok, azonban arra a kérdésre, hogy aritmetikailag megengedett paraméterekre mikor létezik olyan paraméterű blokkrendszer, nagyon kevés információt adnak, hiszen a $\lambda$ nagyon gyorsan végtelenhez tart. Általában a legtöbb (persze sok sporadikus konstrukció mellett), amit erről a kérdésről tudunk, az Wilson nevezetes tétele:

**3.1.13. Tétel. (Wilson tétele)** *Ha $k$ és $\lambda$ rögzített, akkor van olyan $v_0$, hogy $v > v_0$-ra tetszőleges a 3.1.3 által megengedett $v$-re létezik $(v,k,\lambda)$-rendszer.*

A bizonyítás az algebrai és valószínűségi módszer kombinálása, mi ezt nem részletezzük, megtalálható pl. Beth, Jungnickel, Lenz [8, 9] könyvében.

Ismerkedjünk meg a latin négyzetek fogalmával is. Részletesebben a [40] könyvben olvashatunk róluk.

**3.1.14. Definíció.** Egy $n \times n$-es mátrixot *latin négyzet*nek nevezünk, ha sorai és oszlopai valamely $S$ halmaz (pl. az $\{1, \dots n\}$) permutációi. Két latin négyzet, $A$ és $B$ *ortogonális*, ha $a_{ij} = a_{kl}$ esetén $b_{ij} \neq b_{kl}$. □

Ha valaki algebrai szemmel nézi a latin négyzeteket, akkor azok nem mások, mint az ún. *kvázicsoport*ok műveletáblái. Emlékeztetünk arra, hogy a csoportot definiáló axiómákat szokás úgy is megfogalmazni, hogy csoportban az asszociativitás mellett minden $a, b$-re az $ax = b$ ill. az $xa = b$ egyenletek egyértelműen megoldhatók. Ha az asszociativitás nem, de ez az „osztási szabály" teljesül, akkor kvázicsoportról beszélünk. Az egységelemes kvázicsoportokat *loop*nak szokás nevezni. Ezekután nem meglepő, hogy a szokásos algebrai konstrukciók, mint pl. a direkt szorzat, alkalmazhatók latin négyzetekre. Egy speciális kvázicsoport-osztállyal a Steiner-hármasrendszereknél már megismerkedtünk.

A továbbiakban mindig úgy képzeljük, hogy a latin négyzetek elemei az $1, \dots, n$ számok. Szemléletesen az ortogonalitás azt jelenti, hogy ha egymásra helyezzük a két latin négyzetet, akkor minden $(i, j)$ pár pontosan egyszer fordul elő.

Ortogonális latin négyzetekre a fő kérdés az, hogy mennyi a páronként ortogonális latin négyzetek maximális száma. Ezt $N(n)$-nel jelöljük. Könnyű belátni, (l. 3.11. feladat) hogy legfeljebb $n - 1$ páronként ortogonális latin négyzet van. (Ez egyébként a 3.1.15. Tétel bizonyításából is kiolvasható.) $n = 2$-re nincsen két ortogonális latin négyzet, és Euler (a 36 tiszt problémája) azt sejtette (ill. nem teljesen bizonyította), hogy $n = 6$-ra sincs ortogonális latin négyzetpár. E két példa alapján Euler azt sejtette, hogy $n \equiv 2 \pmod 4$ esetén általában sincs két ortogonális latin négyzet. Az $n = 6$ esetet a század elején Tarry precizírozta (megmutatta, hogy nincs ortogonális pár), az általános sejtést viszont a hatvanas években Bose, Shrikhande és Parker megcáfolta.

Lássuk először, hogy mi a kapcsolat latin négyzetek és affin síkok között.

**3.1.15. Tétel.** *Pontosan akkor létezik $n$-edrendű affin sík, ha van $n-1$ páronként ortogonális latin négyzet.*

*Bizonyítás.* Legyenek $A_1, \dots A_{n-1}$ latin négyzeteink, és szokás szerint legyenek az elemek az $1, \dots, n$ számok. Legyen $X = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ és definiáljuk az egyeneseket az alábbi módon:

$$H_i = \{(x, i) \ : \ 1 \leq x \leq n\}, \ \ 1 \leq i \leq n\text{-re},$$

$$V_i = \{(i, y) \ : \ 1 \leq y \leq n\}, \ \ 1 \leq i \leq n\text{-re},$$

$$L_{ij} = \{(x, y) \ : \ (A_j)_{xy} = i\}, \ \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq n-1\text{-re}.$$

Könnyű megmutatni, hogy így olyan illeszkedési struktúrát kapunk, amelyben minden blokk (egyenes) $n$ pontú, minden pont foka $n + 1$, a pontok száma $n^2$, az egyeneseké $n^2 + n$, továbbá minden pontpáron legfeljebb egy egyenes megy át. Ha az egy ponton átmenő egyeneseket tekintjük, akkor azok (a pontot leszámítva) diszjunktak, tehát a pontok száma legalább $1+(n+1)(n-1)$ kell legyen. Mivel pontosan ennyi pontunk van, bármely két ponton át van is blokk, azaz valóban affin síkot kapunk. (Ez lényegében a 3.10. feladat bizonyítása is.)

Vegyük észre, hogy a $H_i, V_j$ egyenesek tulajdonképpen a latin négyzetek egy pozícióját jelölik ki. Az $L_{ij}$ alakú egyenesek azonos $j$-re nem metszik egymást, így ezek felelnek meg egy párhuzamossági osztálynak az affin síkon. Ezen észrevételek alapján könnyű $n-1$ páronként ortogonális latin négyzetet gyártani. ■

Ebből speciálisan következik, hogy $N(q) = q - 1$, ha $q$ prímhatvány. Általában a következőt lehet tudni.

**3.1.16. Tétel. (Chowla–Erdős–Straus)** *$N(n) \to +\infty$, ha $n \to +\infty$.*

A tételt nem bizonyítjuk. Ez a Wilson-tétel megfelelője latin négyzetekre, sőt a Wilson-tétel bizonyításában is kulcsszerepet játszik. A bizonyítást szintén Beth, Jungnickel és Lenz [8, 9] könyvében találhatjuk meg. Ennél erősebb eredmény is igaz. Jelölje $n_r$ azt a legnagyobb méretet, amelyre nincs $r$ páronként ortogonális latin négyzet (tehát $N(n) \geq r$, ha $n > n_r$). Erre (ha $r$ elég nagy) Beth bizonyította, hogy $n_r = O(r^{14.8})$. Illusztrációként egy „pontos” eredmény: $n_{30} \leq 52502$.

## 3.2. Feladatok

3.1. Lássuk be, hogy a Kirkman-féle 15 iskoláslány problémában megkívánt sétarendben bármely két lány pontosan egyszer sétál egy sorban.
3.2. Mutassuk meg, hogy $K_{v+1}$, $v$ páratlan, felbontható $v$ darab diszjunkt 1-faktorra (azaz élkromatikus száma $v$). Mennyi az élkromatikus szám a $v$ páros esetén?
3.3. Bizonyítsuk a Kirkman féle $v \to 2v + 1$ konstrukció helyességét.
3.4. Mutassuk meg, hogy a Kirkman konstrukcióban a $v$ pontú részrendszer komplementere nem tartalmaz teljes blokkot. Mutassuk meg azt is, hogy ilyen tulajdonsággal egy STS($w$)-ben legfeljebb $(w + 1)/2$ pont választható ki.
3.5. Verifikáljuk a Skolem konstrukciót $v = 6m + 1$-re.
3.6. Verifikáljuk a Skolem konstrukciót $v = 6m + 3$-ra.
3.7. Netto konstrukció: Legyen $v = 6m + 1$ prím, $g$ pedig egy primitív gyök modulo $p$. Legyenek a blokkok a

$$\{x, x + g^j, x + g^{m+j} \ : \ j = 0, \ldots m - 1, x = 0, \ldots 6m\}$$

hármasok. Mutassuk meg, hogy így STS($v$)-t kapunk!
3.8. Bizonyítsuk be, hogy egy $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-rendszer projektív sík. (A projektív sík axiómáit l. az 1.1 szakaszban.)
3.9. Bizonyítsuk be, hogy egy $(n^2, n, 1)$-rendszer affin sík. (Az affin sík axiómáit l. az 1.1 szakaszban.)
3.10. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $n - 1$ darab $n \times n$-es páronként ortogonális latin négyzet van.
3.11. Induljunk ki a PG(2,2) Fano-síkból és alkalmazzuk iterálva a Kirkman konstrukciót. Milyen Steiner-hármasrendszereket kapunk így meg?

# 4. fejezet

# A Fisher-egyenlőtlenség

## 4.1. A Fisher-egyenlőtlenség blokkrendszerekre

Emlékezzünk arra, hogy a de Bruijn–Erdős-tétel azt állította, hogy egy lineáris térnek mindig legalább annyi blokkja (egyenese) van, mint pontja. Abban a speciális esetben, ha $\lambda = 1$, ez a tétel blokkrendszerekről állít valamit. A de Bruijn–Erdős-tétel $\lambda > 1$ paraméterű blokkrendszerekre való kiterjesztése igazából előbb megvolt, mint maga a de Bruijn–Erdős-tétel, a statisztikus Fisher találta. (Ez persze annyiban kevesebb a de Bruijn–Erdős-tételnél, hogy csak uniform struktúrákra vonatkozik.) Lássuk tehát a Fisher-egyenlőtlenség bizonyítását.

**4.1.1. Tétel. (Fisher-egyenlőtlenség)** *Ha egy blokkrendszerben $k < v$, akkor $b \geq v$.*

*Bizonyítás.* Legyen $M$ a blokkrendszer illeszkedési mátrixa. Az $A = MM^T$ szomszédsági mátrix nem más, mint az a mátrix, melynek főátlójában $r$-ek, azon kívül $\lambda$-k állnak. Végigosztva minden sort és oszlopot a nemnulla $\lambda$-val, olyan mátrixot kapunk, amely $0 < s_k = \lambda/r < 1$-rel kielégíti az 2.1.5. Lemma feltételeit, azaz nemszinguláris. Innen a 2.1.4. Lemma szerint $b \geq v$ következik. ■

Mivel később szükségünk lesz rá, számítsuk ki explicite a szomszédsági mátrix determinánsát.

**4.1.2. Lemma.** $\det(xI + yJ) = (x + yn)x^{n-1}$ *(a mátrixok $n \times n$-esek).*

*Bizonyítás.* (Ezt már láttuk az előző szakaszban, pl. a 2.5. feladatban, a jelen bizonyítás viszont később is hasznos lineáris algebrai dolgokat elevenít fel.) A csupa egyesből álló $\mathbf{j}$ vektor sajátvektora $A = xI + yJ$-nek, a hozzá tartozó sajátérték $x + yn$. $A$ szimmetrikus, így van sajátvektorokból álló ortonormált

bázisa, sőt olyan is, ami **j**-t tartalmazza. A további **v** báziselemek merőlegesek **j**-re, azaz $\mathbf{v}J = 0$, amiből $\mathbf{v}(xI + yJ) = x\mathbf{v}$, vagyis az $x$ lesz $(n-1)$-szeres sajátérték. ■

**4.1.3. Következmény.** *Blokkrendszer ($k < v$) szomszédsági mátrixának determinánsa $rk(r-\lambda)^{v-1}$. Így az illeszkedési mátrix rangja $v$.* ■

A $b = v$ esetben további érdekes tulajdonságokat kapunk.

**4.1.4. Tétel.** *Egy a $k < v$ feltételnek eleget tevő blokkrendszerben a következő állítások egyenértékűek:*

*(a)* $b = v$;

*(b)* $r = k$;

*(c) bármely két blokk $\lambda$ pontban metszi egymást;*

*(d) bármely két blokk metszete ugyanakkora.*

*Bizonyítás.* (a) és (b) ekvivalenciája a $vk = br$ egyenlőség miatt triviális. Ha $r = k$, akkor $MJ = JM$, azaz $M$ felcserélhető az $MM^T$ mátrixszal is, vagyis $M^2M^T = MM^TM$. Mivel $MM^T$ nemszinguláris, így $M$ sem, azaz $MM^T = M^TM$. Ez viszont éppen azt fejezi ki, hogy a duális illeszkedési struktúra is blokkrendszer, azaz az eredetiben két blokk $\lambda$ pontban metszette egymást. Eszerint (b)-ből következik (c). (c)⇒(d) triviális. Ha (d) teljesül, akkor a blokkrendszer duálisa is blokkrendszer. A Fisher-egyenlőtlenséget az eredeti blokkrendszerre alkalmazva azt kapjuk, hogy $b \geq v$, a duálisra alkalmazva pedig azt, hogy $v \geq b$, azaz $b = v$, vagyis (a) teljesül. ■

Lássuk az előző tétel egy másik bizonyítását. A bizonyításban használt trükk, a variancia-trükk, vagy négyzetes leszámlálási trükk nagyon fontos (bár elemi). A Stanton–Kalbfleisch lemmában ezt a módszert már használtuk.

**4.1.5. Állítás.** *Legyen $B$ egy 2-$(v,k,\lambda)$ blokkrendszer blokkja. A $B$-től diszjunkt blokkok száma kevesebb, mint*

$$b - \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1)+(r-1)}.$$

*Egyenlőség pontosan akkor áll, ha a $B$-t metsző blokkok ugyanannyi, mégpedig $1+(k-1)(\lambda-1)/(r-1)$ pontban metszik $B$-t.*

*Bizonyítás.* Legyen $d$ a $B$-t metsző és tőle különböző blokkok száma. Jelöljük $n_i$-vel ezek közül azon blokkok számát, amelyek $B$-t $i$ pontban metszik. Ekkor

$$\sum_i n_i = d,$$

$$\sum_i in_i = k(r-1),$$

$$\sum_i i(i-1)n_i = k(k-1)(\lambda-1).$$

Ezekből az egyenlőségekből az $n_i$-k minden $i$-ben másodfokú együtthatós kifejezése előállítható, például a

$$\sum_i (i-x)^2 n_i = dx^2 - 2k(r-1)x + k((k-1)(\lambda-1)+(r-1))$$

is. Ez a kifejezés nyilván $x$-től függetlenül nemnegatív, ami csak úgy lehet, ha diszkriminánsa nempozitív. Ebből azonnal jön az állításban szereplő egyenlőtlenség. Egyenlőség csak akkor állhat, ha a diszkrimináns nulla, azaz, ha

$$d = \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1)+(r-1)}.$$

Az egyenlőségből az is következik, hogy $n_i = 0$ minden
$i \neq 1 + (k-1)(\lambda-1)/(r-1)$-re. ■

Ebből az állításból a Fisher-egyenlőtlenség némi számolással kihozható, továbbá az egyenlőség bekövetkeztekor a paraméterek értéke is (l. 4.1. feladat). Ezt legalább vázlatosan nézzük is meg. Azt szeretnénk látni, hogy

$$d = \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1)+(r-1)} \geq v-1.$$

Behelyettesítve, hogy $v-1 = r(k-1)/\lambda$, a

$$\lambda k(r-1)^2 \geq \lambda r(k-1)^2 + r(k-1)(r-k)$$

egyenlethez jutunk. Ez rögzített $k, \lambda$ mellett $r$-ben másodfokú egyenlőtlenség, amelyben $r^2$ együtthatója pozitív. Az egyenlőség két megoldása $r = k$, illetve $r = \lambda$, azaz valóban $r \geq k$.

## 4.2. A Fisher-egyenlőtlenség általánosításai

Nézzük meg most azt, hogy hogyan terjeszthető ki a Fisher-egyenlőtlenség 2-struktúrákra. Ehhez mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a blokkrendszerek létezésére adott szükséges feltételek, illetve a paraméterek összefüggését megadó 3.1.2. Állítás bizonyításában nem használtuk fel, hogy nincsenek többszörös blokkok. Így láthatjuk, hogy uniform 2-struktúra automatikusan $r$-reguláris, ahol $r = \lambda(v-1)/(k-1)$. Hasonlóan, a 3.1.3. Következményben megadott szükséges feltételek 2-$(v,k,\lambda)$-struktúrákra is érvényesek.

**4.2.1. Lemma.** *Ha egy 2-$(v, k, \lambda)$-struktúrában $v > k$, akkor nem fordulhat elő, hogy különböző pontok azonos blokkokra illeszkedjenek.*

*Bizonyítás.* Ha két pont ugyanazokra a blokkokra illeszkedne, akkor $\lambda = r$ lenne, amiből 3.1.2 miatt $v = k$ következne, ami ellentmondás. ■

**4.2.2. Definíció.** Egy **D** 2-struktúrát *valódi*nak (vagy nemdegeneráltnak) nevezünk, ha van olyan blokkja, amelyre egynél több pont illeszkedik, de nem illeszkedik rá minden pont. □

**4.2.3. Lemma.** *Valódi 2-struktúrában minden pont foka nagyobb, mint $\lambda$.*

*Bizonyítás.* $\deg(p) \geq \lambda$ triviális. Tegyük fel, hogy valamely $p$ pontra egyenlőség van, és legyen $q$ egy $p$-től különböző pont. Mivel $\lambda$ olyan blokk van, amely $p$-n és $q$-n átmegy, minden olyan blokk, amely illeszkedik $p$-re, illeszkedik $q$-ra is. Ez elmondható minden $p$-től különböző pontra, azaz a legalább két pontot tartalmazó blokkok minden pontot tartalmaznak. ■

Ha ezt az észrevételt összevetjük a Fisher-egyenlőtlenség első (2.1.6. Lemmán alapuló) bizonyításával, akkor látni fogjuk, hogy a Fisher-egyenlőtlenség érvényes valódi 2-struktúrákra. Ehhez először az illeszkedési mátrixra vonatkozó egyenletet kell módosítanunk.

**4.2.4. Lemma.** *Ha $M$ valódi 2-struktúra illeszkedési mátrixa, akkor*

$$MM^T = \lambda J + \operatorname{diag}(r_i - \lambda),$$

*ahol $r_i$ az $i$-edik pont fokát jelenti.* ■

**4.2.5. Állítás.** *Valódi 2-struktúrára $b \geq v$.* ■

Ennek az állításnak egy másik bizonyítását kapjuk, ha explicite kiszámoljuk a 4.2.4. Lemmában szereplő mátrix determinánsát.

**4.2.6. Állítás.** *Ha $M$ valódi 2-struktúra illeszkedési mátrixa, akkor*

$$\det(MM^T) = \prod_{i=1}^{v}(r_i - \lambda)\left(1 + \lambda\sum_{j=1}^{v}\frac{1}{(r_j - \lambda)}\right). \qquad ■$$

A bizonyítást feladatnak hagyjuk (l. 4.2. feladat, lényegében megcsináltuk a 2.5. feladatban).

A következő állítás azt mutatja, hogy a $b = v$ esetben a 2-$(v, k, \lambda)$-struktúrák automatikusan blokkrendszerek.

**4.2.7. Állítás.** *Valódi négyzetes 2-struktúra nem tartalmazhat többszörös blokkokat.*

*Bizonyítás.* Ha egy 2-struktúra tartalmaz többszörös blokkokat, akkor illeszkedési mátrixa tartalmaz két azonos sort, tehát rangja legfeljebb $b-1$. Másrészt viszont az illeszkedési mátrix rangja $v$, ami a $b=v$ esetben lehetetlen. Jegyezzük meg, hogy ennél többet is beláttunk később Mann tételében, amelyből $b \geq 2v$ következik. ■

Vegyük észre, hogy a Fisher-egyenlőtlenség 4.2.5 nemuniform változata valójában a de Bruijn–Erdős-tétel megfelelője a $\lambda > 1$ esetre. A de Bruijn–Erdős-tétel alapján azt várhatnánk, hogy egyenlőség csak akkor lehet, ha a 2-struktúra uniform, vagyis ha blokkrendszer. Ez azonban nem igaz, amint a következő példa mutatja:

**4.2.8. Példa.** Legyen $\mathbf{D}=(\mathbf{P},\mathbf{B})$ reguláris 2-struktúra és $p$ egy pontja. A $\mathbf{D}^*(p)$ struktúra pontjai legyenek $\mathbf{D}$ pontjai. $\mathbf{D}$ minden $Y$ blokkjához definiáljuk $\mathbf{D}^*(p)$ egy $Y^*$ blokkját a következőképp: Ha $p \in Y$, akkor legyen $Y^*=\mathbf{P}\setminus Y$, ha pedig $p \notin Y$, akkor legyen $Y^* = Y \cup \{p\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathbf{D}^*(p)$ 2-struktúra lesz, melyre $\lambda^* = r - \lambda$. Ha $\mathbf{D}$ négyzetes blokkrendszer, akkor $\mathbf{D}^*(p)$ valódi négyzetes 2-struktúra, melyben kétféle blokkméret van, $k+1$ és $v-k$ (l. a 4.3. feladatot). ■

Eszerint nem várhatjuk a de Bruijn–Erdős-tétel teljes megfelelőjét $\lambda > > 1$-re. Az azonban tipikus a fenti példában, hogy ha egy valódi négyzetes 2-struktúra nem uniform, akkor csak két blokkméret van, melyek összege $v+1$.

**4.2.9. Tétel.** *Legyen* $\mathbf{D}$ *olyan valódi, négyzetes 2-struktúra, amely nem blokkrendszer. Ekkor* $\mathbf{D}$*-ben csak kétféle blokkméret fordul elő, s e két méret összege* $v+1$.

*Bizonyítás.* Írjuk fel a szokásos módon $\mathbf{D}$ illeszkedési, majd szomszédsági mátrixát. Ez nem más, mint

$$MM^T = N + \lambda J, \tag{4.1}$$

ahol $N$ az a diagonális mátrix, melyben a főátlóban a $\deg(p) - \lambda(>0)$ értékek állnak. Ezenkívül $MJ = (N+\lambda I)J$. Fel tudjuk írni $N+\lambda J$ inverzét is, ez nem más, mint

$$(N+\lambda J)^{-1} = N^{-1} - cN^{-1}JN^{-1},$$

ahol $c = \lambda(1+\lambda\sum n_i^{-1})^{-1}$. Ha most (4.1)-t beszorozzuk a jobb oldal inverzével jobbról, $M^{-1}$-gyel balról, akkor azt kapjuk, hogy $M^T(N+\lambda J)^{-1} = M^{-1}$, amit $M$-mel jobbról szorozva

$$M^TN^{-1}M = I + cM^TN^{-1}JN^{-1}M \tag{4.2}$$

egyenlethez jutunk. Ebből az egyenlőségből a főátlóbeli elemek összehasonlításával a

$$\sum_{P_j \in y_i} \frac{1}{n_j} = 1 + c\left(\sum_{P_j \in y_i} \frac{1}{n_j}\right)^2$$

egyenlőséget kapjuk, amely minden $y_i$ blokkra teljesül. Az $s_i = \sum_{P_j \in y_i} 1/n_j$ ismeretlent bevezetve ez azt adja, hogy

$$s_i = 1 + cs_i^2.$$

Ha most (4.2)-t jobbról beszorozzuk $J$-vel, akkor azt kapjuk, hogy

$$M^T(J - c(v-1)N^{-1}J) = J.$$

A bal oldalon az $i$-edik sorban mindenütt $|y_i| - c(v-1)s_i$ áll, így

$$|y_i| - c(v-1)s_i = 1, \;\; \Rightarrow \;\; s_i = \frac{|y_i| - 1}{c(v-1)}.$$

Ha ezt a kifejezést behelyettesítjük a fenti $s_i$-re vonatkozó egyenletbe, akkor $(|y_i| - -1)$-re nézve másodfokú egyenletet kapunk, mégpedig az

$$(|y_i| - 1)^2 - (v-1)(|y_i| - 1) + c(v-1)^2 = 0$$

egyenletet. Eszerint $(|y_i| - 1)$-re tényleg legfeljebb két értéket kaphatunk, melyek összege $v - 1$. ■

Nevezetes sejtés, az ún. *$\lambda$-design sejtés*, hogy a fenti 4.2.8 konstrukcióval megkapjuk az összes négyzetes valódi 2-struktúrát.

Térjünk vissza a Fisher-egyenlőtlenséghez. A Fisher-egyenlőtlenség bizonyításából további érdekes információkat deríthetünk ki. Azt beláttuk, hogy $MM^T = (r-\lambda)I + \lambda J$, és ennek a mátrixnak a sajátértékei $kr$ (1 multiplicitással) és $(r-\lambda)$ ($v-1$ multiplicitással). Azt is tudjuk, hogy $M$ rangja pontosan $v$. Tekintsük most $M^TM$-et, azaz a blokk-szomszédsági mátrixot.

**4.2.10. Lemma.** *Ha $MM^T$ nem szinguláris, akkor $MM^T$ sajátértékei $M^TM$-nek is sajátértékei, méghozzá ugyanazzal a multiplicitással, továbbá 0 lesz még sajátérték, multiplicitása pedig $b - v$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\lambda$ sajátértéke $MM^T$-nek, $\mathbf{v}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Ekkor $\mathbf{v}MM^T = \lambda\mathbf{v}$, és $\lambda \neq 0$. Megszorozva ezt jobbról $M$-mel azt látjuk, hogy $\mathbf{w} = \mathbf{v}M$-re $\mathbf{w}M^TM = \lambda\mathbf{w}$. Itt $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, mert abból $\lambda = 0$ adódna. Így $\mathbf{w}$ sajátvektora $M^TM$-nek, a megfelelő sajátérték éppen $\lambda$. Ha most $\mathbf{v}$ a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér egy bázisán fut végig, akkor a megfelelő $\mathbf{w}$-k lineárisan függetlenek, amiből az állítás már közvetlenül következik. ■

Jegyezzük meg, hogy a fenti érvelés nem használta ki, hogy $MM^T$ nem szinguláris, általában is az a helyzet, hogy $MM^T$-nek és $M^TM$-nek ugyanazok a nemnulla sajátértékei, és multiplicitásuk is ugyanannyi. A 0 sajátérték multiplicitása $(b-v)$-vel nő.

Az előző lemma szerint a $Q = (r-\lambda)I + (\lambda k/r)J - M^TM$ mátrix pozitív szemidefinit, hiszen sajátértékei 0 ($v$ multiplicitással) és $(r-\lambda)$, $b-v$ multiplicitással. Ha tehát tekintjük $Q$ egy főminorját (néhány sor és ugyanezen oszlopok alkotta részmátrix), akkor az is pozitív szemidefinit lesz. Ezt

az észrevételt a blokkok metszetére vonatkozó egyenlőtlenségek igazolására használhatjuk fel. Ha $1 \times 1$-es főminort veszünk, azaz egy blokkot, akkor a $Q$ főátlójában szereplő elemet kapjuk részmátrixként, ami nemnegatív. Ebből visszakapjuk a Fisher-egyenlőtlenséget, hisz $r - \lambda + \lambda k/r - k \geq 0$-ból $r \geq$ $\geq k$ vagy $r \leq \lambda$ következik, ez utóbbi viszont lehetetlen, ha a blokkrendszer nemdegenerált.

Ha $2 \times 2$-es főminort, azaz két különböző blokkot tekintünk, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk.

**4.2.11. Állítás. (Connor, Majumdar)**

$$k + \lambda - r \leq |B \cap C| \leq r - k - \lambda + \frac{2\lambda k}{r}.$$

*Bizonyítás.* Az állítás előtti észrevétel szerint a $Q$ mátrix $B$ és $C$ sorokhoz tartozó főminorának determinánsa nemnegatív. A főátlóban $r - \lambda + \lambda k/r - k$ áll, a másik két elem $\lambda k/r - |B \cap C|$, így egyrészt $r - \lambda + \lambda k/r - k \geq \lambda k/r -$ $- |B \cap C|$, másrészt $r - \lambda + \lambda k/r - k \geq -\lambda k/r + |B \cap C|$. Az első egyenlőtlenség adja a Majumdar- (vagy Connor)-egyenlőtlenségbeli alsó becslést, a második a felsőt. ■

Az egyenlőség esete is jellemezhető, erről szól a 4.4. feladat.

A Connor-féle pozitív szemidefinitségi ötlet egy további következménye a Mann-egyenlőtlenség:

**4.2.12. Állítás. (Mann)** *Ha egy olyan 2-struktúrában, amelyre $v > k$, valamely blokk multiplicitása $m$, akkor $b \geq mv$.*

*Bizonyítás.* L. a 4.5 feladatot. ■

Nézzük meg most a Fisher-egyenlőtlenség egy további változatát, amely párhuzamossággal bíró blokkrendszerekre vonatkozik. Először lássunk egy önmagában is érdekes lineáris algebrai lemmát, a Block-lemmát. Mielőtt magára a lemmára térnénk, néhány definíció következik. A fejezet hátralevő része a Hughes–Piper [34] könyvet követi.

**4.2.13. Definíció.** Particionáljuk egy $M$ mátrix sorait és oszlopait, legyen mondjuk $S = S_1 \cup \ldots S_{v_1}$ és $O = O_1 \cup \ldots \cup O_{b_1}$, ahol $S$ és $O$ a sorok, illetve az oszlopok indexhalmaza. $H_{ij}$ azt a mátrixot jelöli, amelynek sorai $S_i$-be, oszlopai $O_j$-be tartoznak. A felbontást *sortaktikus*nak nevezzük, ha $H_{ij}$ minden sorában az elemek összege ugyanannyi (mondjuk $r_{ij}$). Vezessük még be az $R = (r_{ij})$ mátrixot, ha a felbontás sortaktikus volt. Hasonlóan definiáljuk azt, hogy a felbontás mikor *oszloptaktikus*, és ebben az esetben az oszlopösszegek mátrixát jelölje $C$. Egy felbontást *taktikus*nak nevezünk, ha egyaránt sor- és oszloptaktikus. □

**4.2.14. Lemma. (Block lemma)** *Legyen $M$ egy $v \times b$ mátrix, $S = S_1 \cup \ldots \cup S_{v_1}$ és $O = O_1 \cup \ldots \cup O_{b_1}$ a sorok, illetve az oszlopok egy felbontása. Ha a felbontás*

*sortaktikus, akkor* $\text{rang}(M) - \text{rang}(R) \leq b - b_1$. *Ha a felbontás oszloptaktikus, akkor* $rang(M) - rang(C) \leq v - v_1$.

*Bizonyítás.* Mondjuk az oszloptaktikusságra vonatkozó állítást látjuk be. Ha $\mathcal{R}$ egy $\text{rang}(M) = r$ számú sorból álló független sorrendszer, akkor a fennmaradó $v - r$ sor nyilván legfeljebb $v - r$ pontosztályból tartalmaz sort. Eszerint legalább $v_1 - (v - r)$ teljes pontosztály van az $\mathcal{R}$-be eső sorok között. Ez persze lehet, hogy semmit nem ad, de akkor $v_1 - (v - r) \leq 0 \leq \text{rang}(C)$, azaz ekkor készen vagyunk. Tehát feltehetjük, hogy $v_1 - (v - r) > 0$ és tekintsük $C$ megfelelő sorait (tehát azokat, amelyek teljes pontosztálya $\mathcal{R}$-ben van). Tegyük fel, hogy ezen sorok valamely lineáris kombinációja nullvektor. Egy ilyen lineáris kombináció felemelhető $M$ sorainak egy teljes pont-osztályokat tartalmazó lineáris kombinációjává (felhasználva, hogy a felbontás oszloptaktikus). Ez viszont lehetetlen, hiszen ezek a sorok mind $\mathcal{R}$-ben voltak. Eszerint a szóban forgó $v_1 - (v - r)$ sor lineárisan független, azaz $\text{rang}(C) \geq v_1 - (v - r)$. Ebből a (b)-beli egyenlőtlenség átrendezéssel adódik. ■

**4.2.15. Következmény.** *Ha* $M$ *rangja* $v$ *és a felbontás taktikus, akkor* $0 \leq b_1 - v_1 \leq b - v$.

*Bizonyítás.* Nyilván $\text{rang}(R) \leq v_1$. Eszerint a Block lemma miatt $v = \text{rang}\,(A) \leq \leq \text{rang}\,(R) + b - b_1 \leq v_1 + b - b_1$, azaz $b - v \geq b_1 - v_1$. Hasonlóan kapjuk a $0 \leq (b_1 - v_1)$-et is, az oszloptaktikusság felhasználásával. ■

Abban az esetben, ha $M$ egy illeszkedési struktúra illeszkedési mátrixa, a taktikusságnak világos kombinatorikai jelentése van. Particionálnunk kell a pontokat és a blokkokat, és ha megszorítjuk az illeszkedést akármelyik pont és akármelyik blokkosztályra, akkor a sortaktikusság ezen megszorítás regularitásának, míg az oszloptaktikusság a megszorítás uniformitásának felel meg (l. 4.6. feladat).

Emlékeztetünk arra, hogy a párhuzamosság, amelyet a Kirkman probléma után említettünk, speciális esete az ilyen taktikus felbontásnak: egyetlen pontosztály van, és minden pontra minden osztályból pontosan egy blokk illeszkedik. Ennél általánosabban, egy blokkrendszert *felbonthatónak* nevezünk, ha illeszkedési mátrixának van olyan taktikus felbontása, amelyben egyetlen pontosztály van.

Felbontható, vagy párhuzamossággal rendelkező blokkrendszerekre pontosabbá tehetjük a Fisher-egyenlőtlenséget az alábbi módon.

**4.2.16. Tétel.** *Ha egy blokkrendszer felbontható, és a felbontásban* $x$ *blokkosztály van, akkor* $b \geq v + x - 1$. *Speciálisan, ha a blokkrendszernek van párhuzamossága, akkor* $b \geq v + r - 1$.

*Bizonyítás.* Ez azonnal következik a Block lemmából, hisz esetünkben $v_1 = 1$, $b_1 = x$ és a felbontás taktikus. A párhuzamosság esetén még annyit kell észrevennünk, hogy egy ponton átmenő blokkok különböző osztályba kell tartozzanak, azaz $x = r$. ■

Persze, a párhuzamosság létezése elegendő ugyan a taktikussághoz, azonban párhuzamosságot megadni gyakran nem is olyan egyszerű. A most következő állítások azt mutatják meg, hogyan lehet automorfizmusok segítségével az illeszkedési mátrix taktikus felbontásait származtatni.

**4.2.17. Tétel.** *Ha $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$, akkor $G$ pont és blokk-orbitjai az illeszkedési mátrix egy taktikus felbontását adják.*

*Bizonyítás.* Az olvasóra bízzuk (l. 4.7. feladatot). ■

**4.2.18. Tétel. (Általánosított orbit-tétel)** *Legyen $\mathbf{D}$ olyan 2-struktúra, amelynek $v$ pontja, $b$ blokkja van, és az illeszkedési mátrixának $v$ a rangja. Ha $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ olyan, melynek $v_1$ pontorbitja és $b_1$ blokkorbitja van, akkor $0 \leq b_1 - v_1 \leq b - v$.* ■

Jegyezzük meg, hogy ez azonnal adja 1.2.17-t, a név is innen származik. Ennek bizonyítása is feladat.

Mint említettük, párhuzamosságot nem is mindig könnyű definiálni egy blokkrendszerben, így nézzük meg, hogy a legegyszerűbb esetben, azaz Steiner hármasrendszerekre mit lehet erről mondani. Ekkor minden párhuzamossági osztály $v/3$ blokkot tartalmaz, és mivel $b = v(v-1)/6$, így az osztályok száma $(v-1)/2$. Ebből azonnal következik, hogy felbontható STS csak $v \equiv 3 \pmod 6$ esetén létezhet. Másrészről Ray-Chaudhuri és Wilson belátták, hogy minden ilyen $v$-re létezik is felbontható STS. Azt már maga Kirkman is tudta, hogy minden $v = 3^n$-re van ilyen felbontható STS. Ilyenek például a 3 elemű testre épített affin terek (a szokásos geometriai párhuzamossággal). Az első pillantásra meglepő, hogy a PG($n$,2) projektív terek is felbonthatóak, ha a $v$-re tett szükséges feltétel teljesül, azaz, ha $n$ páratlan. Ez pl. azt jelenti, hogy a PG(3,2) a 15 iskoláslány probléma megoldását adja.

A bizonyítást l. a 4.6. feladatban.

## 4.3. Feladatok.

4.1. Bizonyítsuk be a Fisher-egyenlőtlenséget ill. a négyzetes blokkrendszerek **??**-ben felsorolt tulajdonságait 4.1.5 alapján.
4.2. Számítsuk ki $\det(A)$-t, ha $A = \lambda J + \mathrm{diag}(r_1 - \lambda, \ldots, r_v - \lambda)$, és $r_i > \lambda$.
4.3. Ellenőrizzük a 4.2.8. Példát.
4.4. Jellemezzük az egyenlőség esetét a Connor, Majumdar egyenlőtlenségben.
4.5. Bizonyítsuk be a 4.2.12. Állítást!
4.6. Mutassuk meg, hogy PG($n$,2) pontosan akkor felbontható, ha $n$ páratlan.
4.7. Bizonyítsuk be a 4.2.17. Tételt!
4.8. Bizonyítsuk be a 4.2.18. Tételt!

# 5. fejezet

# $t$-rendszerek

## 5.1. Alapvető tulajdonságok

**5.1.1. Definíció.** A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ egyszerű illeszkedési struktúra $t$-$(v, k, \lambda)$ *rendszer*, $(v > k > 1,\ k \geq t \geq 1)$, ha a pontok száma $v$, minden blokkra $k$ pont illeszkedik és bármely $t$ pont pontosan $\lambda$ blokkban van benne. Ha az egyszerűséget elhagyjuk, vagyis lehetnek többszörös blokkok, akkor (uniform) $t$-$(v, k, \lambda)$ *struktúrá*ról fogunk beszélni. □

A $t = 2$ visszadja a blokkrendszereket, $t = 1$-re pedig egyszerűen a reguláris, uniform hipergráfokat kapjuk. Ez a fejezet a Cameron–van Lint [16] könyvet követi.

**5.1.2. Állítás.** *Legyen* $\mathbf{D}$ *egy* $t$-$(v, k, \lambda)$ *rendszer. Ekkor a*

$$\lambda_i = \lambda \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}$$

*számok egészek minden* $i = 0,1,\ldots,t$*-re. Konkrétan* $\lambda_i$ *az* $i$ *ponton átmenő blokkok számát adja meg.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy $i$ elemű $I \subset \mathbf{P}$ részhalmazt, és számoljuk meg az $I$-n átmenő blokkokat. Ehhez egészítsük ki $I$-t $t$ elemű halmazzá, majd tekintsük az azon átmenő blokkokat. Ekkor $\lambda\binom{v-i}{t-i}$-t kapunk, de egy blokkot pontosan $\binom{k-i}{t-i}$-szer számoltunk. ■

**5.1.3. Példa.** 1) Ha $\mathbf{B}$ a $\mathbf{P}$ halmaz összes $k$ elemű részhalmaza, akkor a teljes $k$-uniform hipergráfot kapjuk, amely minden $t \leq k$-ra $t$-$(v, k, \lambda)$-rendszer, mégpedig $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$-vel, l. az 5.1.2. Állítást is.

2) Az $\mathrm{AG}_2(n,2)$ ($n \geq 3$) blokkrendszer 3-$(2^n,4,1)$-rendszer is. Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy egy $2^n$ elemű elemi Abel csoportban vesszük az összes négyelemű részcsoportot és azok mellékosztályait.

Mielőtt további példákat vagy eredményeket néznénk, megmutatjuk, hogy az illeszkedési struktúra egyszerűsége a definíció fontos része. Ha ezt nem kívánjuk meg, akkor sokkal könnyebben mennek a konstrukciók.

**5.1.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $t < k < v - t$. Ekkor alkalmas $\lambda$-ra létezik olyan $t$-$(v,k,\lambda)$-struktúra, amelyben nem minden $k$ pontú ponthalmaz blokk.*

*Bizonyítás.* Legyen $M$ az a $\binom{v}{k} \times \binom{v}{t}$ mátrix, amelyben a sorokat, illetve az oszlopokat a $v$ elemű alaphalmaz $k$, illetve $t$ elemű részhalmazaival indexeltük, a $(K,T)$ elem pedig pontosan akkor 1, ha $T \subset K$ különben 0. A feltétel szerint $\binom{v}{t} < \binom{v}{k}$ és így $M$ sorai lineárisan összefüggők. Eszerint van olyan racionális koordinátájú $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathbf{v}M = \mathbf{0}$.

Persze feltehetjük, hogy $\mathbf{v}$ egész koordinátájú. Legyen $-m$ a $\mathbf{v}$ legkisebb koordinátája ($m > 0$). Ha $\mathbf{j}$ jelöli a csupa egyesből álló vektort és $\mathbf{w} = \mathbf{v} + m\mathbf{j}$, akkor $\mathbf{w}$ minden koordinátája nemnegatív egész és van olyan koordináta, amely 0. Továbbá

$$\mathbf{w}M = (\mathbf{v} + m\mathbf{j})M = m\mathbf{j}M = m\binom{v-t}{k-t}\mathbf{j}.$$

Ez az egyenlet pont azt adja amit akartunk: ha ugyanis $\mathbf{B}$ az alaphalmaz azon $k$ elemű $K$ részhalmazaiból áll, amelyekre $\mathbf{w}$ $K$-adik koordinátája pozitív, mégpedig az ilyen $K$-k multiplicitása $\mathbf{w}_K$, akkor egyenletünk azt mondja, hogy bármely $t$ elemű részhalmaz pontosan $\lambda = m\binom{v-t}{k-t}$ darab $\mathbf{B}$-beli halmazban van benne (multiplicitással számolva). ■

A helyzet meglehetősen különbözik ettől, ha nincsenek többszörös blokkok. Néhány sporadikus 5-rendszer ismert volt már régóta (ezek a Mathieu-csoportokhoz tartozó Witt-féle rendszerek, velük találkozunk később a Golay-kódoknál), de nemtriviális 6-rendszer sokáig nem volt ismert (semmilyen $\lambda$-ra). Mivel a példák sokszorosan tranzitív csoportokkal voltak kapcsolatban, a sokszorosan tranzitív csoportok nemlétezése bizonyításának egy lehetséges útja lett volna annak belátása, hogy 6-rendszerek nincsenek is. Ez azonban nem így van: először Magliveras és Leavitt konstruált 6-rendszereket, majd újabb és újabb rendszereket konstruáltak mások, így ez az út nem járható. (Jegyezzük meg, hogy a véges egyszerű csoportok osztályozásából viszont kijön, hogy nincsenek 6-tranzitív csoportok, csak az alternáló és a szimmetrikus csoport.) Végül Teirlinck intézte el lényegében a kérdést, aki az alábbi tételt bizonyította.

**5.1.5. Tétel. (Teirlinck tétele)** *Adott $t$-re legyen*

$$\mu = \prod_{i=1}^{t} \left( \left[ \left\{ \binom{i}{n} \ : \ n = 1, \ldots, i \right\} \right] \cdot [\{1, \ldots, i+1\}] \right),$$

*ahol a $[,]$ szimbólum a legkisebb közös többszöröst jelöli. Ekkor bármely $v \equiv t \pmod{\mu}$-re az $X$ $v$-elemű alaphalmaz $(t+1)$-elemű részhalmazait $t$-$(v, t+1, \mu)$-rendszerekre particionálhatjuk. Speciálisan, $t$-$(v, t+1, \mu)$-rendszerek léteznek $v \equiv t \pmod{\mu}$, $\lambda \equiv 0 \pmod{\mu}$, és $v > \lambda + t$ esetén.* ■

A tételt nem bizonyítjuk, az messze meghaladná a jegyzet kereteit.

Most a Fisher-egyenlőtlenség $t$-rendszerekre való kiterjesztéseire térünk rá. Ezt a $t = 4$ esetben Petrenjuk látta be, az általános eset bizonyítása Ray-Chaudhuri és Wilson érdeme.

**5.1.6. Tétel.** *Legyen* $\mathbf{D}$ *$t$-$(v, k, \lambda)$-rendszer, ahol $t = 2s$ és $k \leq v - s$. Ekkor $b \geq \binom{v}{s}$.*

*Bizonyítás.* Az illeszkedési mátrix egy általánosítását fogjuk használni. A sorokat a blokkokkal, az oszlopokat az $s$ pontú részhalmazokkal indexeljük, és egy $(B, S)$ pozícióba pontosan akkor írunk 1-et, ha $S \subset B$. Ennek megfelelően legyen $\mathbf{r}_B$ az $M$ $B$-edik sora, $\mathbf{e}_S$ pedig az a vektor, amelynek $S$-edik pozíciójában 1 áll, különben 0. Nyilván az $\mathbf{e}_S$-ek alkotják a $\binom{v}{s}$ dimenziós valós $V$ vektortér természetes bázisát. Azt kellene belátnunk, hogy $M$ sorai generátorrendszert alkotnak $V$-ben. Legyen $0 \leq i \leq s$-re

$$\mathbf{y}_i = \sum_{|B \cap S| = i} \mathbf{r}_B = \sum_{j=0}^{i} \sum_{|S' \cap S| = j} \sum_{S' \subset B, |B \cap S| = i} \mathbf{e}_{S'} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{s-j}{i-j} \nu_{2s-j, s+i-j} \left( \sum_{|S' \cap S| = j} \mathbf{e}_{S'} \right),$$

ahol $\nu_{m,n}$ azon blokkok számát jelenti, amelyek egy adott $m$ pontú $M$ halmazt egy adott $n$ pontú $N$ részhalmazában metszenek. A szita-formula segítségével belátható, hogy $\nu_{m,n}$ nem függ az $N \subset M$ pártól (csak $n$-től és $m$-től), ha $n \leq m \leq t$ (l. az 5.1. feladatot). Legyen végül

$$\mathbf{x}_j = \sum_{|S' \cap S| = j} \mathbf{e}_{S'}.$$

Ezt a jelölést bevezetve a fenti egyenlőségek $s+1$ lineáris egyenletet adnak az $\mathbf{x}_j$-kre, melyeknek jobb oldala éppen az $\mathbf{y}_j$. Ennek az egyenletrendszernek a mátrixa trianguláris mátrix, s a diagonális elemek, a $\nu_{2s-i,s}$ elemek nem

nullák. Így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagy másképpen fogalmazva, az $\mathbf{x}_j$-k kifejezhetők az $\mathbf{y}_j$-k lineáris kombinációjaként. Speciálisan $x_s = \mathbf{e}_S$ is előáll az $\mathbf{y}_j$-k kombinációjaként, vagyis az $\mathbf{y}_j$-k tényleg generátorrendszert alkotnak. ■

Természetesen, ha $t = 2s + 1$, akkor ugyanez az egyenlőtlenség érvényes, hiszen egy $t$-rendszer egyben $(t-1)$-rendszer is.

Ray-Chaudhuri és Wilson a duális eredményt is belátták.

**5.1.7. Tétel. (Ray-Chaudhuri, Wilson)** *Legyen $s \le k \le v - s$ és legyen $\mathbf{B}$ egy $V$ $v$ pontú halmaz $k$ elemű részhalmazainak olyan családja, melyre $|B \cap B'|$ legfeljebb $s$ értéket vesz fel, ha $B \neq B' \in \mathbf{B}$. Ekkor $\mathbf{B} \le \binom{v}{s}$.* ■

Ezt a változatot nem bizonyítjuk, legfőképpen azért, mert az Extremális Kombinatorika előadásban szokott szerepelni, továbbá megtalálható a Babai–Frankl-könyvben [3] is, ahol további variánsait (pl. mod $p$) is elolvashatja az érdeklődő olvasó, de egy vázlat szerepel az 5.3. feladatban is.

## 5.2. Feladatok

5.1. Mutassuk meg, hogy az 5.1.6 bizonyításában szereplő $\nu_{m,n}$ valóban csak $m$-től és $n$-től függ.

5.2. Mutassuk meg, hogy $t$-rendszerben a $t+1$ pontot elkerülő és azon átmenő blokkok számának összege nem függ a pontok választásától.

5.3. Legyen $\Omega = \{0,1\}^n$. Tekintsük az $\Omega \mapsto \mathbf{R}$. függvényeket. $I \subset \{1,\dots,n\}$-re legyen $f(I) := f(v_I)$, ahol $v_I \in \Omega$ az $I$ incidencia-vektora. Legyen

$$x_I := \prod_{i \in I} x_i.$$

Ekkor

a) $x_I(J) = 1$, ha $I \subseteq J$, 0 különben.

b) Legyen $f : \Omega \to \mathbf{R}$ függvény. Tegyük fel, hogy $f(I) \neq 0$, ha $|I| \le r$. Ekkor

$$\{x_I f \ : \ |I| \le r\}$$

lineárisan független.

c) Legyen $L = \{\ell_1,\dots,\ell_s\}$, $V = \{1,\dots,v\}$, $\mathbf{B} = \{A_1,\dots,A_m\}$, ahol $|A_1| \le \dots |A_m|$, $v_i$ pedig jelölje $A_i$ incidencia-vektorát ($i = 1,\dots,m$-re). Legyen

$$f_i(x) = \prod_{k=1}^{s} ((v_i, x) - \ell_k) \quad (x \in \Omega).$$

Ekkor az

$$\left\{ f_1, \dots, f_m, x_I \left( \sum_{j=1}^{m} x_j - k \right) \ : \ I \subseteq \{1, \dots, v\}, |I| \leq s-1 \right\}$$

függvények lineárisan függetlenek.

d) Lássuk be az 5.1.7. Tételt!

5.4. Idézzük fel a Ray-Chaudhuri–Wilson-tétel nemuniform változatának bizonyítását (elsőben szerepelt!)!

[Legyen $\mathcal{F}$ egy hipergráf $n$ ponton, $L = \{\ell_1, \dots, \ell_s\}$ nemnegatív, $n$-nél kisebb egészek halmaza. Ha bármely két különböző $A, B \in \mathcal{F}$-re $|A \cap B| \in L$, akkor

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.]$$

# 6. fejezet

# Négyzetes blokkrendszerek

## 6.1. Alapvető tulajdonságok

Idézzük fel, hogy egy blokkrendszer pontosan akkor négyzetes, ha a blokkok száma azonos a pontokéval ($b = v$). Láttuk, hogy ez egyenértékű azzal, hogy $r = k$, és azzal is, hogy bármely két blokk metszete $\lambda$ pontú. Célunk az lesz, hogy négyzetes blokkrendszerek paraméterei közötti további összefüggéseket találjunk. Emlékeztetünk arra, hogy a 4.1.3. Következmény miatt egy blokkrendszer $M$ illeszkedési mátrixára $\det(MM^T) = rk(r-\lambda)^{v-1}$. Esetünkben $k = r$, így ($\det(M) = \det(M^T)$-t is használva) azt kapjuk, hogy

$$(\det(M))^2 = (k-\lambda)^{v-1}k^2.$$

**6.1.1. Következmény. (Schützenberger)** *Ha létezik négyzetes* 2-$(v,k,\lambda)$-*rendszer, akkor* $(k-\lambda)^{v-1}$ *négyzetszám.* ■

**6.1.2. Definíció.** Négyzetes 2-$(v,k,\lambda)$-rendszerekre az $n = (k-\lambda)$ mennyiséget a blokkrendszer *rend*jének nevezzük. A későbbiekben az $n$ mindig ezt fogja jelenteni (négyzetes blokkrendszerekre). □

**6.1.3. Állítás.** *Legyen* **D** *négyzetes* 2-$(v,k,\lambda)$-*rendszer* ($1 < k < v-1$). *Ekkor*

$$4n-1 \leq v \leq n^2+n+1.$$

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy $(v-1)\lambda = r(k-1)$, ami esetünkben a

$$v = 1 + k(k-1)/\lambda = \lambda + 2n - 1 + n(n-1)/\lambda$$

összefüggést adja. (Ha $n = 1$, akkor ebből $r = k = v - 1$ adódna, így feltehetjük, hogy $n > 1$.) Ebből

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(v - 2n \pm \sqrt{(v-2n)^2 - 4n(n-1)}\right);$$

az egyenlet két megoldása $(\lambda, \lambda')$ **D**-nek, illetve komplementumának felel meg. Mivel $\lambda, \lambda' \geq 1$, így $v - 2n - 2 \geq \sqrt{(v-2n)^2 - 4n(n-1)}$, amit négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $v \leq n^2 + n + 1$. Egyenletünk diszkriminánsa is nemnegatív, amiből $(v-2n)^2 - 4n(n-1) \geq 0$ adódik. Így $(v-2n)^2 \geq$ $\geq (2n-1)^2 - 1$, és $v \geq 2n$-et is figyelembe véve ez a $v - 2n \geq 2n - 1$ egyenlőtlenséget adja, amiből a $v$-re vonatkozó alsó becslés azonnal következik. ■

A szereplő korlátok végtelen sok $n$-re élesek. A felső becslést a projektív síkok, az alsót az ún. Hadamard-féle blokkrendszerek valósítják meg. Ezekről nemsokára többet is megtudunk.

Most rátérünk egy jóval mélyebb tétel igazolására. Ez mindmáig az egyetlen általános szükséges feltétel négyzetes blokkrendszerek létezésére. A 10-edrendű sík nemlétezése mutatja, hogy ez a feltétel sajnos nem elegendő. Mielőtt a bizonyításra rátérnénk, lássunk egy Lagrange-tól eredő elemi számelméleti lemmát, valamint egy elemi azonosságot.

**6.1.4. Lemma. (Lagrange)** *Minden pozitív egész szám előáll négy négyzetszám összegeként.* ■

Ezen kívül szükségünk lesz az alábbi elemi számelméleti azonosságra is:

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \tag{6.1}$$

ahol

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4; \\ y_2 &= b_2x_1 + b_1x_2 - b_4x_3 + b_3x_4; \\ y_3 &= b_3x_1 + b_4x_2 + b_1x_3 - b_2x_4; \\ y_4 &= b_4x_1 - b_3x_2 + b_2x_3 + b_1x_4. \end{aligned}$$

Az azonosság szemléletes tartalma az, hogy két kvaternió szorzatának normája megegyezik a normák szorzatával. Ez azt is jelenti, hogy az $x \mapsto y$ lineáris transzformáció (azaz a $b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$-val való szorzás) nem szinguláris. Mivel a $b$-k alkotta mátrix elemei egészek, így inverz mátrixa racionális elemű. Erre az észrevételre szükségünk lesz a bizonyítás során.

**6.1.5. Tétel. (Bruck–Chowla–Ryser)** *Tegyük fel, hogy $v$ páratlan és létezik négyzetes 2-$(v, k, \lambda)$-rendszer. Ekkor a*

$$z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

*diofantoszi egyenletnek van nemtriviális egész megoldása.*

*Bizonyítás.* Soroljuk fel a pontokat: $p_1, \ldots, p_v$ és a blokkokat: $B_1, \ldots, B_v$ és legyen $M$ az ennek megfelelő illeszkedési mátrix. Tulajdonképpen az $MM^T = nI + \lambda J$ mátrixegyenletet lineáris kifejezésekre vonatkozó azonosság formájában fogjuk felírni. Ehhez vezessük be az

$$L_i = \sum_{j=1}^{v} m_{ji}x_j, \quad (i = 1, \ldots, v)$$

kifejezéseket. Ezekre az

$$L_1^2 + \ldots + L_v^2 = n(x_1^2 + \ldots + x_v^2) + \lambda(x_1 + \ldots + x_v)^2 \tag{6.2}$$

azonosság érvényes. Ehhez azt kell észrevenni, hogy minden ${x_i}^2$ $k$-szor fordul elő a bal oldalon, mert a $p_i$ pontra $k$ blokk illeszkedik, és hasonlóan az $x_ix_j$ szorzat $2\lambda$-szor fordul elő, mert a $p_i, p_j$ pontokra $\lambda$ blokk illeszkedik. Ezt az azonosságot fogjuk redukálni, a 6.1.4. Lemma és az utána említett azonosság segítségével.

Mivel $v$ páratlan, két esetet különböztetünk meg: $v \equiv 1 \pmod 4$ és $v \equiv 3 \pmod 4$.

**1. eset:** $v \equiv 1 \pmod 4$.

Négyesével írjuk fel a 6.1.4. Lemma és a (6.1) azonosság alapján az $n(x_i^2+x_{i+1}^2+x_{i+2}^2+x_{i+3}^2)$ kifejezéseket négy négyzetszám összegeként. Legyen mondjuk $n = b_1^2 + \ldots + b_4^2$ és

$$(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)(x_i^2+x_{i+1}^2+x_{i+2}^2+x_{i+3}^2) = y_i^2+y_{i+1}^2+y_{i+2}^2+y_{i+3}^2.$$

A rövidség kedvéért írjunk $x_1 + \ldots + x_v$ helyett $w$-t. Ekkor az

$$L_1^2 + \ldots + L_v^2 = y_1^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \tag{6.3}$$

azonossághoz jutunk, ahol minden kifejezés az $x$-ek függvénye. Mivel a (6.1) azonosság mátrixos alakjában szereplő $x \mapsto y$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, így az előző egyenlőséget tekinthetjük az $y$-ok (és $x_v$) kifejezésének, mégpedig minden szereplő kifejezés homogén és az együtthatók racionálisak. Olyan (racionális együtthatós) kifejezését fogjuk $y_1$-nek ebbe az azonosságba helyettesíteni, amely „rövidíti" azt. Nézzük meg, hogy $L_1$-ben, mint $y_1, \ldots, y_{v-1}, x_v$ homogén lineáris kifejezésében mi $y_1$ együtthatója. Ha ez nem 1, akkor fejezzük ki $y_1$-et az $L_1 = y_1$ egyenletből. Természetesen a megoldás $y_1 =$(a többi változó racionális együtthatós homogén lineáris kifejezése) alakban írható. Ha ezt behelyettesítjük (6.3)-be, akkor az

$$L_2^2 + \ldots + L_v^2 = y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \tag{6.4}$$

egyenletet kapjuk, amelyben továbbra is minden az $y_2, \dots y_{v-1}, x_v$ homogén lineáris kifejezése. Ha véletlen $y_1$ együtthatója 1 volt $L_1$-ben, akkor az $L_1 = = y_1$ helyett az $L_1 = -y_1$ egyenletet oldjuk meg és helyettesítjük vissza (6.3)-be. Természetesen így is (6.4)-nak megfelelő alakú egyenlethez jutunk.

A megrövidített egyenletre ezt az eljárást ismételjük: rendre megoldjuk az $L_2 = \pm y_2$, …, $L_{v-1} = \pm y_{v-1}$ egyenletek valamelyikét $y_2$, majd …, $y_{v-1}$-re. Ezeket a racionális együtthatós homogén lineáris kifejezéseket rendre visszahelyettesítve végül az

$$L_v^2 = nx_v^2 + \lambda w^2$$

egyenlethez jutunk, ahol most már $L_v$ és $w$ csupán $x_v$-től függ, mégpedig homogén módon, továbbá racionális együtthatósan, azaz $L_v$ és $w$ az $x_v$ változó racionális számszorosa. Leosztva $x_v^2$-tel és felszorozva a nevezők legkisebb közös többszörösével valóban a $z^2 = nx^2 + \lambda y^2$ egy nemtriviális egész megoldásához jutunk.

**2. eset:** $v \equiv 3 \pmod 4$.

Először is vezessünk be egy $x_{v+1}$ új változót és adjunk hozzá (6.2) mindkét oldalához $nx_{v+1}^2$-et. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$L_1^2 + \ldots + L_v^2 + nx_{v+1}^2 = n(x_1^2 + \ldots + x_v^2 + x_{v+1}^2) + \lambda(x_1 + \ldots + x_v)^2. \quad (6.5)$$

Ez pontosan olyan, mint az 1. esetben kezelt egyenlet. Az ottani eljárást megismételve az

$$nx_{v+1}^2 = y_{v+1}^2 + \lambda w^2$$

egyenlethez jutunk, amiből az $nx^2 = z^2 + \lambda y^2$ egyenlet egy nemtriviális megoldását kapjuk. Ez most is pont az, ami kellett, mert $v \equiv 3 \pmod 4$ miatt $(-1)^{(v-1)/2} = -1$. ■

A $\lambda = 1$ esetben (azaz projektív síkokra) nagyon könnyen kezelhető a Bruck–Chowla–Ryser-feltétel. Ezt az eredményt korábban bizonyította Bruck és Ryser. Mielőtt a tételt kimondanánk, egy számelméleti állítást lássunk (l. Turán–Gyarmati Számelmélet jegyzet [53], vagy a Freud–Gyarmati Számelmélet könyvet [24]).

**6.1.6. Lemma.** *Egy pozitív egész szám pontosan akkor írható fel legfeljebb két négyzetszám összegeként, ha minden $4k+3$ alakú prímosztója páros kitevőn szerepel.* ■

**6.1.7. Tétel.** *Ha létezik $n$-edrendű projektív sík és $n \equiv 1$ vagy $2 \pmod 4$, akkor $n$ felírható két négyzetszám összegeként.*

*Bizonyítás.* Jegyezzük meg, hogy $v = n^2 + n + 1$ mindig páratlan, és $n \equiv 1$ vagy $2 \pmod 4$ pontosan akkor, ha $v \equiv 3 \pmod 4$. Ekkor a Bruck–Chowla–Ryser-tétel azt mondja, hogy az $nx^2 = y^2 + z^2$ egyenletnek van nemtriviális

megoldása. Mivel a jobb oldalon a $4k+3$ alakú prímosztók páros kitevőn szerepelnek az előző lemma miatt, így ugyanez igaz $n$-re is, vagyis $n$ is két négyzetszám összege. ■

**6.1.8. Megjegyzés.** Mivel $n = 6$ nem két négyzetszám összege, így nem létezik 6-odrendű projektív sík. Persze ezt már Euler is „tudta", hisz nincs 6-odrendű ortogonális latin négyzetpár. Az $n = 10$ mindmáig az egyetlen olyan érték, amely teljesíti a Bruck–Chowla–Ryser-tétel feltételeit, mégsem létezik 10-edrendű projektív sík. Ezt a nyolcvanas évek végén igazolta számítógéppel Lam, Swiercz és Thiel.

A következőkben az lesz a célunk, hogy a $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$ projektív tereket, mint négyzetes blokkrendszereket karakterizáljuk. A bizonyításokat elhagyjuk, a 6.1–3 feladatokban az érdeklődő olvasó maga is megteheti. Ez a szakasz Frank De Clerck [19] jegyzetét, illetve áttételesen a Hughes–Piper könyvet [34] követi.

A projektív terek jellemzéséhez először az „egyenes" fogalmát fogjuk bevezetni.

**6.1.9. Definíció.** Legyen $p$ és $q$ két különböző pontja a $\mathbf{D}$ blokkrendszernek. A két pont által meghatározott $e_{pq}$ *egyenes* a két pontot tartalmazó blokkok metszete, azaz

$$e_{pq} = \bigcap_{p,q \in B \in \mathbf{B}} B. \square$$

Jegyezzük meg, hogy Steiner-rendszerekben maguk a blokkok az egyenesek. A következő állítás azt mutatja, hogy ezek az egyenesek jól vannak definiálva.

**6.1.10. Állítás.** *Blokkrendszerben egy egyenes bármely pontpárja egyértelműen meghatározza az egyenest, azaz* $p', q' \in e_{p,q}$, $p' \neq q'$*-re* $e_{p'q'} = e_{p,q}$. ■

**6.1.11. Állítás.** *Egy $L$ egyenes méretére érvényes a* $2 \leq |L| \leq (b-\lambda)/(r-\lambda)$ *egyenlőtlenség. Továbbá* $|L| = (b-\lambda)/(r-\lambda)$ *pontosan akkor ha minden blokk metszi $L$-et.* ■

Természetesen a projektív terekben ez a helyzet, minden hipersík metsz minden egyenest. Ha felidézzük a projektív tereket definiáló axiómákat, akkor sejthetjük, hogy valamiképpen a sík fogalmát is érdemes megfognunk. Ez a következőképpen történik.

**6.1.12. Definíció.** Legyen $p, q, r$ a $\mathbf{D}$ blokkrendszer három olyan pontja, amelyek nincsenek egy egyenesen (azaz $r \notin e_{pq}$). A $\Pi_{pqr}$ *sík* nem más, mint a három pontot tartalmazó blokkok metszete. (Ha ilyen nincs, akkor legyen a $\Pi_{pqr}$ sík a teljes ponthalmaz.) □

A $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$ blokkrendszernek az az egyik jellemző tulajdonsága, hogy bármely három nem egy egyenesen fekvő pont egyértelműen meghatároz egy síkot. Ezt általában nem várhatjuk, csak 3-rendszerek esetében.

**6.1.13. Tétel. (Dembowski–Wagner)** *Ha* $\mathbf{D}$ *nemtriviális négyzetes* 2*-*$(v,k,\lambda)$*-rendszer, akkor a következő állítások egyenértékűek:*

*(a)* $\mathbf{D} = PG_{n-1}(n,q)$ *valamely* $n \geq 2$*-re és* $q$ *prímhatványra, vagy* $\mathbf{D}$ *projektív sík;*

*(b) minden egyenes metsz minden blokkot;*

*(c) minden egyenes* $(b-\lambda)(r-\lambda)$ *pontú;*

*(d) minden sík ugyanannyi blokkban van benne.* ■

**6.1.14. Következmény.** *Ha egy* $\lambda > 1$ *paraméterű négyzetes blokkrendszernek van a síkokon tranzitív automorfizmuscsoportja, akkor izomorf a* $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$*-val valamilyen* $n > 2$*-re.* ■

**6.1.15. Megjegyzés.** A Dembowski–Wagner-tételhez hasonló eredmények ismertek az affin terekre is, ezek kimondásától is eltekintünk.

Említsük meg azt, hogy a projektív terek jellemzéséhez a paraméterek ismeretén túl további feltétel is kell, amint azt az alábbi tétel mutatja.

**6.1.16. Tétel. (Kantor)** *Legyen* $q$ *prímhatvány és* $n > 2$ *egész. Ekkor létezik olyan blokkrendszer, melynek paraméterei ugyanazok, mint* $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$ *paraméterei, mégsem izomorf vele.*

*Bizonyítás.* L. a 6.4. feladatot. ■

A projektív síkok esete nem véletlenül maradt ki a tételből. Ismert például, hogy a 2, 3, 4, 5, 7 és 8-adrendű síkok izomorfia erejéig egyfélék, így ekkor nem is igaz a megfelelő tétel. Általában a véges geometriák egyik fontos megoldatlan problémája, hogy vannak-e más prímrendű síkok, mint a $\mathrm{PG}(2,p)$ síkok. Erről szinte semmi nem ismert. Ha viszont $q$ prímhatvány és $q > 8$, akkor mindig vannak nem testre épített síkok is. $q = 9$-re pontosan ismerik is ezek számát: négy sík van. Ezt is a 10-edrendű síknál megismert Lam, Swiercz, Thiel trió látta be számítógéppel.

Természetes más megszorításokat tenni a blokkrendszerünkre, például az automorfizmuscsoportra. Ilyenek az alábbi tételek.

**6.1.17. Tétel. (Kantor)** *Legyen* $\mathbf{D}$ *olyan blokkrendszer, melynek paraméterei ugyanazok, mint* $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$*-é* $(n > 2)$*. Ekkor* $\mathbf{D} = PG_{n-1}(n,q)$ *pontosan akkor, ha* $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ *2-tranzitív a pontokon.* ■

**6.1.18. Tétel. (Ostrom–Wagner)** *Egy projektív sík pontosan akkor izomorf a testre épített* $\mathrm{PG}(2,q)$ *síkkal, ha automorfizmuscsoportja kétszeresen tranzitív a pontokon.* ■

**6.1.19. Megjegyzés.** Olyan blokkrendszer, amelynek paraméterei $\mathrm{PG}_1(3,2)$-ével megegyeznek, pontosan 80 van. Olyan blokkrendszer, melynek paraméterei megegyeznek $\mathrm{PG}_2(3,2)$-ével, 5 darab van.

## 6.2. Hadamard blokkrendszerek

A négyzetes blokkrendszerek egy másik fontos (végtelen) családja az Hadamard-féle blokkrendszerek családja.

**6.2.1. Definíció.** A négyzetes 2-$(4\lambda+3, 2\lambda+1, \lambda)$ blokkrendszereket *Hadamard-féle blokkrendszer*nek hívjuk. □

**6.2.2. Definíció.** Egy $n \times n$-es $H$ mátrixot *Hadamard-mátrix*nak nevezünk, ha minden eleme $\pm 1$ és $HH^T = nI$. □

Természetesen $HH^T = nI$-ből $H^TH = nI$ is következik. Az elnevezés onnan származik, hogy Hadamard bizonyította az alábbi determináns-egyenlőtlenséget:

*Ha egy $n \times n$-es mátrix elemeire $|a_{ij}| \leq 1$ teljesül, akkor $det(A) \leq n^{n/2}$ és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a mátrix Hadamard-féle.*

Az állítás elég szemléletes, hisz $\det(A)$ a mátrix sorai által kifeszített parallelotóp térfogata. Minden sorvektor hossza legfeljebb $\sqrt{n}$ és a parallelotóp térfogata legfeljebb az élek hosszának szorzata. Az is látszik, hogy az egyenlőséghez szükséges, hogy minden élhossz $\sqrt{n}$ legyen, valamint hogy a sorok ortogonálisak legyenek egymásra.

**6.2.3. Példa.** A $\mathrm{PG}_{n-1}(n,2)$ projektív tér Hadamard-féle blokkrendszer.

**6.2.4. Példa.** Az alábbi mátrixok

$$(1)\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hadamard-mátrixok.

A példában szereplő első két mátrixot kivéve az Hadamard-mátrixok mérete néggyel osztható. Ehhez vegyük észre, hogy Hadamard-mátrix bármely sorát vagy oszlopát végigszorozhatjuk $(-1)$-gyel anélkül, hogy elrontanánk a $HH^T = nI$ egyenlőséget. Eszerint feltehető, hogy az Hadamard-mátrix első sora és oszlopa csupa $(+1)$-ből áll. Ugyanígy a sorok vagy oszlopok cseréje sem befolyásolja az Hadamard tulajdonságot, így azt is feltehetjük, hogy a második sorban (ha van ilyen) először $+1$-ek, majd $-1$-ek következnek. Mivel ez a sor ortogonális a csupa egyesből álló első sorra, így máris kapjuk, hogy $n = 2m$ és a második sor elején $m$ darab $(+1)$-es és utána $m$ darab $(-1)$-es szerepel. Ha van egy további sor, akkor legyen $x$ az egyesek száma az első $m$ pozícióban, $y$ pedig az egyesek száma a második $m$ pozícióban. Mivel a sor ortogonális az elsőre kapjuk, hogy $x + y = m$. A második sorral vett skaláris szorzat pedig $x + (-1)(m - x) - y + (m - y) = 0$. Ebből $x = y$ adódik, azaz $m = 2x$, vagyis $n$ valóban osztható 4-gyel. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

**6.2.5. Tétel.** *Hadamard-mátrix rendje 1,2 vagy osztható 4-gyel.* ■

Ha az Hadamard-mátrix első sora és oszlopa csupa (+1)-ből áll, akkor azt szokták mondani, hogy normalizált alakban van felírva. Fontos megoldatlan sejtés, hogy minden néggyel osztható $n$-re létezik Hadamard-mátrix. Néhány direkt illetve rekurzív konstrukciót mi is látni fogunk. Pillanatnyilag a legkisebb olyan $n$, amelyre nem ismert $n \times n$-es Hadamard-mátrix $n = 428$.

A most következő tétel azt mutatja, hogy a fent definiált dolgok nem véletlenül kapták ugyanazt a nevet.

**6.2.6. Tétel.** *Pontosan akkor létezik $4n \times 4n$-es Hadamard-mátrix, ha van négyzetes 2-$(4n-1, 2n-1, n-1)$ blokkrendszer.*

*Bizonyítás.* A 6.2.5. Tétel előtti okoskodás szerint feltehető, hogy az első sor és oszlop csupa (+1)-ből áll, azaz a mátrix normalizált. Töröljük ezt a sort és oszlopot és a maradékban a $-1$ helyett írjunk 0-t. Könnyen verifikálható, hogy így négyzetes blokkrendszer illeszkedési mátrixát kapjuk. Valóban, minden megmaradó sorban és oszlopban $4n/2 = 2n$ db $+1$ volt, amelyből az első oszlopbeli (+1)-t töröltük, tehát a blokkrendszerben $r = 2n - 1$. Ugyanígy a 6.2.5. Tétel bizonyításában azt is láttuk, hogy két sorban $4n/4 = n$ közös $+1$-es van, amiből $\lambda = n - 1$. Mivel a struktúra négyzetes, $r = k$, tehát valóban a kívánt paraméterű blokkrendszert kapjuk. (Jegyezzük meg, hogy sorok helyett oszlopokkal elmondva az okoskodást, a négyzetességre való hivatkozás nélkül megkaphattuk volna $k$-t is.) A másik irányt a konstrukció megfordításával láthatjuk be, igazából az előző irány lépéseinek megfordításának ellenőrzésével. (l. 6.5. feladat). ■

Jegyezzük meg, hogy izomorf Hadamard-féle blokkrendszerek ekvivalens mátrixokból származnak, de visszafelé ez nem igaz.

A most következő rekurzív konstrukció nagyon egyszerű.

**6.2.7. Állítás.** *Ha $H_n$ $n \times n$-es Hadamard-mátrix, $H_m$ $m \times m$-es Hadamard-mátrix, akkor $H_n \otimes H_m$ is Hadamard-mátrix.*

*Bizonyítás.* Csupán a Kronecker-szorzat fogalmát kell felidézni: egy $A$ $n \times n$-es és egy $B$ $m \times m$-es mátrix szorzata a

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ & & \dots & \\ a_{n1}B & a_{12}B & \dots 1 & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

mátrix. Eszerint az eredmény valóban $nm \times nm$-es mátrix. Két sor ortogonalitását kell ellenőriznünk abban a két esetben, amikor a két sor ugyanazon $A$-beli sornak megfelelő részben van (ekkor a $B$ Hadamard tulajdonsága miatt lesz ortogonális a két sor), illetve akkor, amikor különböző részben. A részleteket l. a 6.6. feladatban. ■

Elindulva egy $2 \times 2$-es Hadamard-mátrixból és ezt önmagával Kronecker-szorozva minden 2-hatványra kapunk Hadamard-mátrixot. Ez a Sylvester-konstrukció, melyről meg lehet mutatni, hogy a neki megfelelő Hadamard blokkrendszer éppen a PG($n$,2) projektív tér (l. 6.7. feladat).

Most lássunk egy véges testeket használó direkt konstrukciót.

**6.2.8. Példa.** Legyen $q \equiv 3 \pmod 4$ prímhatvány. Legyen $F = \mathrm{GF}(q)$ a $q$ elemű véges test és $S = \{u^2 \ : \ 0 \neq u\}$ a nemnulla négyzetelemek halmaza („kvadratikus maradékok"). Definiáljuk a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$ blokkrendszert a következőképpen:

Legyen $\mathbf{P} = F$, $\mathbf{B} = \{S + x \ : \ x \in F\}$. Ezt *Paley-féle* blokkrendszernek nevezik.

Nem magától értetődő, de megmutatható (l. 6.8. feladat), hogy így blokkrendszert kapunk. A paraméterek: $v = q$, $k = (q-1)/2$, $\lambda = (q-3)/4$. Ez utóbbi az, aminek a meghatározása nem triviális. Két ponton, mondjuk $u$-n és $v$-n átmenő blokkok számát kell meghatározzuk. Mivel a testelemekkel való eltolások a struktúra automorfizmusai, így ez ugyanaz, mint a 0 és $v-u$ elemeken átmenő blokkok száma. Ugyanígy, mivel a négyzetelemekkel való szorzás is automorfizmus, elég egy rögzített négyzetelemre, mondjuk $v-u = 1$-re, és egy rögzített nem-négyzetelemre, mondjuk $v-u = (-1)$-re meghatározni a $0, v-u$ pontokon átmenő blokkok számát. Itt azért választhattuk a nem-négyzetelemet $(-1)$-nek, mert $q \equiv 3 \pmod 4$. Magyarán szólva az a kérdés, hogy hány olyan $a$ van, amelyre $x^2 + a = 0$, és $y^2 + a = 1$, azaz hányszor lesz $y^2 - x^2 = 1$, ha $x, y \neq 0$. A másik esetben ugyanez a kérdés, csak 1 helyett $(-1)$-gyel. De ez a két érték megegyezik, hiszen ha $y^2 - x^2 = 1$, akkor $x^2 - y^2 = -1$. Tehát van egy minden pontpárra érvényes $\lambda$ érték. Ez az $r(= k) = \lambda(v-1)/(k-1)$ összefüggésből számolható.

Mivel 12 az a legkisebb rend, amelyre nem lehet a Sylvester konstrukcióval Hadamard-mátrixot gyártani, így erre az esetre konkrétan megadjuk a Paley-konstrukcióval kapható Hadamard-mátrixot.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix}.$$

Mielőtt rátérnénk a bisíkok ismertetésére, jegyezzük meg, hogy az Hadamard-féle blokkrendszerek mutatják, hogy a 6.1.3. Állításban az alsó becslés végtelen sokszor pontos.

## 6.3. Bisíkok

Mindezidáig $\lambda = 1$ az egyetlen olyan rögzített $\lambda$, amelyre végtelen sok ilyen $\lambda$-jú négyzetes blokkrendszert ismerünk. A következő esetben, azaz ha $\lambda = 2$, már csak néhány példát ismerünk. Egy $\lambda = 2$ paraméterű négyzetes blokkrendszert *bisík*nak szoktak nevezni. Tehát egy bisík rendje $n = k-2$ a pontok száma $v = \frac{k(k-1)}{2} + 1$, ami megegyezik a blokkok számával is. $k = 3,4,5$-re pontosan egy ilyen bisík létezik. $k = 6$-ra pontosan három, $k = 9$-re négy, míg $k = 11$-re csak annyit tudunk, hogy legalább négy nemizomorf bisík van. $k = 13$-ra pedig csak két nem-izomorf bisíkot ismerünk. Ez a teljes listája a ma ismert összes bisíknak, sem azt nem tudjuk, hogy van-e végtelen sok, sem azt, hogy olyan rendekre, amelyekre aritmetikailag létezhet bisík, arra létezik-e. Természetesen az általános négyzetes blokkrendszerekre vonatkozó szükséges feltételek itt is érvényesek, és a következőt adják.

**6.3.1. Következmény.** *Ha $k \equiv 2$ vagy $3 \pmod 4$, akkor $n = k - 2$ négyzetszám kell legyen. Ha $k \equiv 0$ vagy $1 \pmod 4$, akkor az*

$$x^2 = (k-2)y^2 + (-1)^{k(k-1)/4} 2z^2$$

*diofantoszi egyenletnek létezik nemtriviális egész megoldása.* ■

**6.3.2. Következmény.** *Ha $n(= k-2) \leq 11$, akkor $n = 1,2,3,4,7,9$ vagy $11$.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás csak a megelőző következményt használja, a részleteket l. a 6.9. feladatban. ■

Lássunk most egy elemi, de igen hasznos módszert bisíkok vizsgálatára. A módszer Hussaintól származik, és a bisíkok létezését egyszerű szerkezetű gráfcsaládok létezésére vezeti vissza.

Legyen tehát **B** bisík, $p$ egy pontja, $B$ pedig egy $p$-n át nem menő blokk. Definiálunk egy $\Gamma(p)$ gráfot a következőképpen: legyenek a pontok $B$ pontjai, az $x, y \in B$ pontokat pedig kössük össze éllel, ha az $x, y$ pontokon átmenő ($B$-től különböző) blokk tartalmazza $p$-t. Mivel két ponton pontosan két blokk megy át, így valóban egy egyszerű gráfot definiáltunk $B$ pontjain. Ha ezeket a $\Gamma(p)$ gráfokat az összes $p \notin B$-re tekintjük, akkor a bisík *Hussain gráfjait* kapjuk. Ezek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek.

**6.3.3. Tétel.** *Ha* **D** *olyan bisík, melynek blokkmérete $k$, akkor egy rögzített $B$ blokkhoz tartozó Hussain-gráfok rendszere (mely az összes $p \notin B$-re van definiálva, és így $(k-1)(k-2)/2$ gráfból áll) eleget tesz az alábbiaknak:*

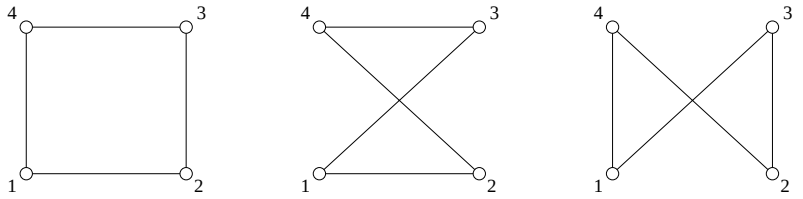
1. *valamennyi gráf másodfokú reguláris,*

2. *két különböző gráfnak pontosan két közös éle van.*

*Bizonyítás.* Tekintsük valamelyik Hussain-gráf egy $x$ pontját. Ez akkor van az $y \in B$ ponttal összekötve, ha $x, y$ és $p$ egy blokkban vannak. Mivel $x$-en és $p$-n pontosan két blokk megy át, így adott $x$-hez pontosan két $y$ szomszédot találunk. Ha két különböző gráfot (pl. a $p$ és $q$ pontokhoz tartozókat) tekintünk, akkor ezeknek a közös élei a $p, q$ pontokat tartalmazó két blokknak $B$-vel való metszéspontjai alkotta élek lesznek. ■

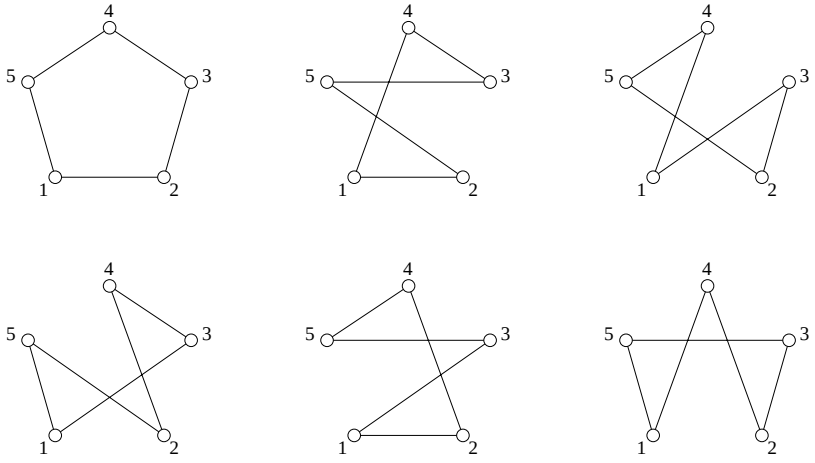
Megfordítva, elég könnyű azt is belátni, hogy ha $k$ csúcson meg tudunk adni $(k-1)((k-2)/2$ olyan gráfot, amelyek teljesítik a fenti tétel két feltételét, akkor azok bisíkot határoznak meg. Ha tehát adva vannak a $V = \{1,2\ldots,k\}$ (közös) csúcshalmazon a $H_i$ Hussain-gráfok ($i = 1, \ldots, \binom{k-1}{2}$), akkor a következőképp lehet a blokkrendszert visszakapni: a pontok $V$ elemei, valamint az $(i)$ indexek, ahol $i = 1, \ldots, \binom{k-1}{2}$. A blokkok maga a $V$ halmaz, továbbá minden $\{a, b\} \subset V$, $a \neq b$-re azon $(i)$ indexek halmaza, amelyekre $\{a, b\}$ éle $H_i$-nek, hozzávéve az $a, b$ pontokat. Ezt a blokkot $B_{\{a,b\}}$ jelöli. Ekkor bármely két ponton pontosan két blokk megy. Valóban, ez nyilvánvaló akkor, ha $a, b \in V$. Ha az $a \in V$ és $(i)$ pontokon átmenő blokkokat keressük, akkor nézzük a $H_i$-ben $a$-ból kiinduló két élt, $\{a, b\}$-t és $\{a, c\}$-t. Az ezekhez tartozó két blokk, $B_{\{a,b\}}$ és $B_{\{a,c\}}$ lesz a keresett két blokk. Ha mindkét pont $(i)$ ill. $(j)$ típusú, akkor $H_i$-nek és $H_j$-nek két közös éle van, az ezekhez tartozó blokkok lesznek a keresett blokkok. Ehhez hasonlóan lehet belátni (csak kicsit egyszerűbb), hogy bármely ponton át pontosan $k$ darab blokk megy át. Mivel a duális blokkrendszerre $b = v$, így $k = r$ is teljesül, azaz a most konstruált blokkrendszerben minden blokk $k$ elemű (a további részletekért l. a 6.10. feladatot).

A következő $k = 4$-re megadott Hussain-gráf rendszer mutatja a 2-rendű bisík létezését. Az egyértelműséget is könnyű látni ezen a módon (l. 6.11. feladat), l. 6.1. ábra.




6.1. ábra. Hussain-gráfok $k = 4$-re

A $k = 4$-es bisík a Fano-sík komplementere. $k = 5$-re a $\lambda = 2$-höz tartozó Hadamard-blokkrendszer egyben bisík is. Az unicitás igazolása és a Hussain-gráfok rendszerének felrajzolása a 6.12. feladat, a gráfokat azért mi is megadjuk a 6.2. ábrán.




6.2. ábra. Hussain-gráfok $k = 5$-re

$k = 6$-ra Hussain megmutatta, hogy pontosan három nem-izomorf Hussain-gráf rendszer van. A szóban forgó bisíkok konstrukciójára az erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek kapcsolatáról szóló részben visszatérünk.

## 6.4. Feladatok

6.1. Lássuk be 6.1.9-at.
6.2. Lássuk be 6.1.10-et.
6.3. Lássuk be 6.1.12-et.
6.4. Lássuk be 6.1.16-et.
6.5. Mutassuk meg, hogy ha létezik Hadamard-féle blokkrendszer, akkor létezik Hadamard-mátrix is, és megfordítva.
6.6. Igazoljuk, hogy két Hadamard mátrix Kronecker-szorzata is az.
6.7. Mutassuk meg, hogy a kételemű Hadamard-mátrix önmagával vett tenzorszorzatának megfelelő Hadamard blokkrendszer izomorf $\mathrm{PG}_{n-1}(n,2)$-vel.
6.8. Lássuk be, hogy a Paley-konstrukció valóban Hadamard-mátrixot ad.
6.9. Mutassuk meg, hogy bisíkokra $n \leq 11$-ből $n = 1,2,3,4,7,9$ vagy 11 következik.
6.10. Igazoljuk, hogy Hussain-gráfok teljes rendszeréből bisíkot kapunk.
6.11. A $k = 4$ paraméterű bisík egyértelműségét igazoljuk Hussain-gráfokkal.
6.12. A $k = 5$-ös bisík egyértelműségét mutassuk meg Hussain-gráfokkal.

# 7. fejezet

# Blokkrendszerek konstrukciói más blokkrendszerekből

## 7.1. Derivált, reziduális blokkrendszerek

**7.1.1. Definíció.** *(A derivált rendszer)* Legyen $p$ a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \in)$ $t$-$(v, k, \lambda)$-rendszer egy pontja és legyen $\mathbf{P}_p = \mathbf{P} \setminus \{p\}$, $\mathbf{B}_p = \{L \in \mathbf{B} \ : \ p \in L\}$. Ekkor $\mathbf{D}_p = (\mathbf{P}_p, \mathbf{B}_p, \in)$ könnyen láthatóan $(t-1)$-$(v-1, k-1, \lambda)$-rendszer lesz (az ellenőrzést l. a 7.1. feladatban). Ezt hívjuk $\mathbf{D}$ $p$ pontra vonatkozó *derivált rendszer*ének. □

**7.1.2. Definíció.** *(A pont-reziduális rendszer)* Legyen $p$ a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \in)$ $t$-$(v, k, \lambda)$-rendszer egy pontja és legyen $\mathbf{P}^p = \mathbf{P} \setminus \{p\}$, $\mathbf{B}^p = \{L \in \mathbf{B} \ : \ p \notin L\}$. Ekkor $\mathbf{D}^p = (\mathbf{P}^p, \mathbf{B}^p, \in)$ könnyen láthatóan $(t-1)$-$(v-1, k, \lambda')$-rendszer lesz, ahol $\lambda' = \lambda(v-k)/(k-t+1)$ (az ellenőrzést l. a 7.2. feladatban). Ezt hívjuk $\mathbf{D}$ $p$ pontra vonatkozó *pont-reziduális rendszer*ének. □

**7.1.3. Definíció.** *(A blokk-reziduális rendszer)* Legyen $B$ a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \in)$ négyzetes blokkrendszer egy blokkja és legyen ${}^B\mathbf{P} = \mathbf{P} \setminus B$, ${}^B\mathbf{B} = \mathbf{B} \setminus \{B\}$. Ekkor ${}^B\mathbf{D} = ({}^B\mathbf{P}, {}^B\mathbf{B}, \in)$ is 2-$(v', k', \lambda)$ blokkrendszer lesz, ahol $v' = v-k$, $k' = k - \lambda$ (a további paraméterek $r' = r$, $b' = b - 1$, az ellenőrzést l. a 7.3. feladatban). Ezt hívjuk $\mathbf{D}$ $B$ blokkra vonatkozó *blokk-reziduális rendszer*ének. □

Ezek a konstrukciók nem nagyon hasznosak, mert nagyobb $t$ paraméterű rendszerből készítenek kisebbet. Sokkal érdekesebb, hogy vajon ezek megfordíthatók-e. Mielőtt erre rátérnénk, lássunk néhány példát.

**7.1.4. Példa.** $\mathrm{PG}_1(n,q)$ derivált rendszere egy $q^n+\ldots+q$ pontú $q$-uniform, reguláris hipergráf. A pont-reziduális rendszer $(q+1)$-uniform hipergráf, amely szintén reguláris (mi a pontok foka? l. a 7.4. feladatot).

$\mathrm{AG}_2(n,2)$ derivált rendszere $\mathrm{PG}_1(n-1,2)$, a pont-reziduális rendszer pedig egy blokkrendszer 2-$(2^{n-1}, 4, 2^{n-1}-2)$ paraméterekkel (l. 7.5. feladat).

**7.1.5. Példa.** A $\mathrm{PG}_{n-1}(n,q)$ blokkreziduálisa éppen $\mathrm{AG}_{n-1}(n,q)$. Ez a motiváló példa a blokkreziduális konstrukcióra, hiszen projektív térből egy hipersík elhagyásával kapunk affin teret.

Ha egy blokkrendszer keletkezhet valami másik blokkrendszer blokkreziduálisaként, akkor $k+\lambda-r=0$ teljesül rá. Egy ennek a feltételnek eleget tevő blokkrendszert *kvázireziduális*nak szoktak nevezni. A fő kérdés természetesen az, hogy mikor lesz egy kvázireziduális blokkrendszer valaminek a reziduálisa. Ez annak természetes kiterjesztése, hogy affin térből az ideális hipersík bevezetésével projektív teret kaphatunk. Erről a kiterjesztésről részletesebben a 8. fejezetben lesz szó.

A legérdekesebb a deriválás megfordítása: ha adott egy $t$-$(v,k,\lambda)$-rendszer, található-e olyan $(t+1)$-$(v+1,k+1,\lambda)$-rendszer, amelynek ő a deriváltja.

**7.1.6. Definíció.** Ha **D** derivált rendszere (valamely pontjára) **E**, akkor **D**-t az **E** *bővítésé*nek nevezzük. Ha **E**-nek van bővítése, akkor *bővíthető*nek nevezzük. □

**7.1.7. Állítás.** *Ha egy $t$-$(v,k,\lambda)$-rendszer bővíthető, akkor $k+1$ osztja $b(v+1)$-et.*

*Bizonyítás.* A bővítésben egy pont foka éppen $b$, egy blokk mérete $k+1$, a pontok száma pedig $(v+1)$, ahonnan az állítás 1.2.10 szerint azonnal adódik. ■

Az affin síkok mindig eleget tesznek a bővíthetőség fenti oszthatósági feltételének, a projektív síkok azonban általában nem.

**7.1.8. Állítás.** *Ha egy $n$-edrendű projektív sík bővíthető, akkor $n=2,4$.*

*Bizonyítás.* Az előző oszthatósági feltételből $n+2$ osztója kell legyen $(n^2+n+1)(n^2+n+2)$-nek. Kis számolással kapjuk, hogy ekkor $n+2$ osztója 12-nek, azaz $n=2,4$, vagy 10. Mivel 10-edrendű projektív sík nem létezik, a bizonyítást befejeztük. ■

Az $n=2$ eset elég egyszerű: ekkor a Fano-sík egyben Hadamard-féle blokkrendszer, így bővíthető is. Azt is belátjuk majd, hogy a bővítés egyértelmű (l. a 7.1.10. Állítást).

Az affin síkok és a PG(2,4) projektív sík bővítésére a kódokról szóló 10. fejezetben részletesebben visszatérünk.

Általánosságban négyzetes blokkrendszerek bővítéséről a következő mondható.

**7.1.9. Tétel. (Cameron)** *Ha egy nemtriviális négyzetes* 2-$(v, k, \lambda)$ *blokkrendszer bővíthető, akkor az alábbi lehetőségek valamelyike teljesül:*

*(a)* $v = 4\lambda + 3$, $k = 2\lambda + 1$, *azaz a blokkrendszer Hadamard-féle.*

*(b)* $v = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$, $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$,

*(c)* $v = 495$, $k = 39$, $\lambda = 3$.

*Bizonyítás.* Mivel a bizonyítás elég hosszú, röviden összefoglaljuk a lényegét: először a bővíthetőségből származó oszthatósági feltételt nézzük meg, majd definiálunk egy segéd-blokkrendszert, amelyből egy további oszthatósági feltételt kapunk. Végül erre a segéd-blokkrendszerre a Fisher-egyenlőtlens´eget alkalmazva korlátozzuk a lehetséges paraméterértékeket.

Legyen $\mathbf{D}$ az eredeti, $\mathbf{D}^*$ a bővített blokkrendszer. Ez utóbbi egy 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$-rendszer, blokkjainak száma $b^* = v(v + 1)/(k + 1)$ (l. 1.2.10. Következmény). Mivel $\mathbf{D}$ négyzetes, így $v = (k^2 - k + \lambda)/\lambda$, amit behelyettesítve

$$b^* = \frac{(k^2 - k + \lambda)(k^2 - k + 2\lambda)}{\lambda^2(k + 1)}$$

adódik, s ebből a $k+1|(k^2-k+\lambda)(k^2-k+2\lambda)$ oszthatósági feltételt kapjuk. Mindkét oldalt modulo $(k + 1)$ tekintve ebből az derül ki, hogy

$$k + 1 \text{ osztja } 2(\lambda + 1)(\lambda + 2)\text{-t.} \tag{7.1}$$

Definiáljunk egy újabb **D'** blokkrendszert $\mathbf{D}^*$ segítségével. Ehhez jegyezzük meg, hogy $\mathbf{D}^*$-ban két blokk vagy 0, vagy pontosan $\lambda + 1$ pontban metszi egymást. Valóban, ha két blokk metszi egymást akkor a metszésponthoz tartozó derivált rendszer négyzetes 2-$(v, k, \lambda)$-rendszer lesz, azaz ebben két blokk pontosan $\lambda$ pontban metszi egymást (l. 4.1.4). (Említsük meg, hogy nem okvetlenül kapjuk vissza $\mathbf{D}$-t!).

Rögzítsük $\mathbf{D}^*$ egy $B^*$ blokkját. A **D'** illeszkedési struktúra pontjai a $B^*$-ra nem illeszkedő pontok, a blokkok pedig az $B^*$-ot nem metsző $\mathbf{D}^*$-beli blokkok. Megmutatjuk, hogy ez a struktúra blokkrendszer lesz. Azt kell belátnunk, hogy két különböző ponton ($A$ és $C$) mindig ugyanannyi blokk megy át. Ehhez számoljuk meg a **D'**-ből „kimaradó" blokkokat, vagyis a $(Q, B')$ párokat, ahol $Q$ a $B^*$ egy pontja $B'$ pedig az $A, C, Q$-t tartalmazó $\mathbf{D}^*$-beli blokk. Ez egyrészt az $A, C$-n átmenő, $B^*$-ot metsző blokkok $m_{A,C}$ száma szorozva $(\lambda + 1)$-gyel, másrészt viszont $Q$-t $(k + 1)$-féleképpen választhatjuk, és $A, C, Q$-n pontosan $\lambda$ db $B'$ blokk megy (amelyek automatikusan metszik

$B^*$-ot). Így $m_{A,C}(\lambda+1) = (k+1)\lambda$. Ebből $m = m_{A,C} = \lambda(k+1)/(\lambda+1)$, ami nem függ az $A, C$ pontok választásától. Kaptuk tehát, hogy **D'**-ben két ponton $k - m = (k-\lambda)/(\lambda+1)$ blokk megy át. (Ehhez még arra kell emlékeznünk, hogy a bővítésben két pontra annyi blokk illeszkedik, mint ahány blokk egy ponton megy át **D**-ben.) Ráadásként az is kiderült, hogy

$$(\lambda+1) \quad \text{osztja} \quad (k+1)\text{-et.}$$

Megkaptuk a beígért két oszthatósági feltételt, még egy egyenlőtlenséget írunk fel **D** paramétereire a Fisher-egyenlőtlenség segítségével. Ha **D'** degenerált, azaz egyetlen blokkja van, akkor $v = 2k+1$. A $v = (k^2-k+\lambda)/\lambda$ összefüggésből $k = 2\lambda+1$ adódik, azaz **D** Hadamard-féle blokkrendszer. Ha $v > 2k+1$, akkor $\mathbf{D}'$ nemdegenerált, azaz alkalmazható rá a Fisher-egyenlőtlenség, vagyis

$$\frac{k-\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{(v-k)(v-k-1)}{(k+1)k} \geq v-k.$$

(Itt a bal oldalon megint használtuk a blokkok számát megadó 1.2.10. Következményt.) Behelyettesítve $v = (k^2-k+\lambda)/\lambda$-t, azt kapjuk, hogy

$$(k-\lambda)(k\lambda-1) \geq \lambda(\lambda+1)(k+1).$$

Kis számolással ebből az adódik, hogy

$$k+1 \geq (\lambda+1)(\lambda+2).$$

Most felhasználjuk, hogy $\lambda+1$ osztja $(k+1)$-et, mondjuk legyen $k+1 = s(\lambda+1)$. Visszaemlékezve az első (7.1) oszthatósági feltételre látjuk, hogy $s$ osztja $2(\lambda+2)$-t. A legutolsó egyenlőtlenség szerint viszont $s \geq \lambda+2$, azaz két lehetőségünk van: $s = \lambda+2$ vagy $s = 2(\lambda+2)$. Ha $s = \lambda+2$, akkor $k = \lambda^2+3\lambda+1$, és ez éppen a (b) eset a bizonyításban. A másik esetben kicsit tovább is tudunk menni.

Ha $s = 2(\lambda+2)$, akkor $k = 2\lambda^2+6\lambda+3$. Mivel **D** négyzetes, így $\lambda$ osztja $k(k-1)$-et, amiből kis számolással (mod $\lambda$), $\lambda|6$ következik. Ha $\lambda = 1$, akkor a paraméterek 10-edrendű projektív sík paraméterei, ami viszont nem létezik. (Az igazsághoz tartozik, hogy azt, hogy nincs bővíthető 10-edrendű projektív sík, jóval hamarabb belátták, mint azt, hogy egyáltalán nincs 10-edrendű projektív sík.) A $\lambda = 2{,}6$ esetekben $v$ páros, de nem négyzetszám lenne, ami 6.1.1 szerint lehetetlen. Egyedül a $\lambda = 3$, $k = 39$, $v = 495$ eset marad, ami a (c) lehetőség a tételben. ■

Végezetül megemlítjük, hogy a (b) esetben Bagchi egy 1988-as eredménye szerint $\lambda \neq 2$.

A bizonyításból Hadamard-féle blokkrendszerek bővítéséről is kiolvashatunk érdekes információkat.

**7.1.10. Tétel.** *Az Hadamard-féle blokkrendszereknek egyértelmű bővítése van.*

*Bizonyítás.* Azt a Cameron-tétel bizonyításából kiolvashatjuk, hogy a bővítésben a blokkok komplementumait kell hozzávenni a blokkok halmazához, ami pont azt jelenti, hogy a bővítés egyértelmű. Képletben a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$-ből a $\mathbf{D}^* = (\mathbf{P} \cup \{\infty\}, \mathbf{B}^*)$ bővítést kapjuk, ahol

$$\mathbf{B}^* = \{B \cup \{\infty\}, \mathbf{P} \setminus B \ : \ B \in \mathbf{B}\ \}.$$

Így csak azt kell ellenőriznünk, hogy ezen a módon tényleg 3-rendszer keletkezik. Magyarán szólva azt kell kiszámolnunk, hogy az eredeti Hadamard-blokkrendszerben három ponthoz hány olyan blokk van, amely nem megy át rajtuk. Az 5.1. feladatban általában is megmutattuk, hogy egy $t$-rendszerben a $t+1$ pontot elkerülő blokkok száma csak a $t$-rendszer paramétereitől, valamint a $t+1$ ponton átmenő blokkok számától függ. A konkrét esetben, ha $c_3$ jelöli a mindhárom ponton átmenő blokkok számát, $c_0$ az ezeket elkerülő blokkokét, akkor a szitaformula segítségével azt kapjuk, hogy

$$c_0 = b - 3r + 3\lambda - c_3.$$

Behelyettesítve $b = 4\lambda+3$-at, $r = 2\lambda+1$-et azonnal adódik, hogy $c_0 + c_3 = \lambda$, de $c_0 + c_3$ éppen a bővítésben a három ponton átmenő blokkok száma. ■

Még egy további érdekes blokkrendszer-család van, amelynek elemei bővíthetők, ez az affin síkok családja. Az $\mathrm{AG}(2, q)$ affin sík bővítése az ún. *inverzív sík* (más néven Mőbius-sík), amelyet a következőképpen lehet elképzelni. Vegyünk a 3-dimenziós $\mathrm{AG}(3, q)$ térben egy elliptikus másodrendű felületet. Intuitíve „gömb"-re érdemes gondolnunk. Ennek $q^2 + 1$ pontja van. Legyenek a blokkok ennek a gömbnek a síkmetszetei (persze az egypontú metszeteket nem tekintjük). Minden ilyen síkmetszet „kör" (vagyis irreducibilis kúpszelet), azaz a blokkok $q + 1$ pontúak. Három ponton egy és csak egy sík megy át, a neki megfelelő blokk lesz a három ponton átmenő blokk. Ha a gömböt az északi sarkból levetítjük a déli sark érintősíkjára, akkor az északi sarkon átmenő síkmetszetek (körök) egyenesekbe mennek át, így láthatjuk, hogy az affin sík egy bővítése a Mőbius-sík. Két további érdekes megjegyzés: Thas megmutatta, hogy $\mathrm{AG}(2, q)$, $q$ páratlan bővítése egyértelmű. Másrészt viszont nem ismert olyan nem testre épített affin sík, amely bővíthető lenne. Az esetleg ismeretlen fogalmakról az 1.1 szakaszban, illetve ennél sokkal részletesebben a [40] könyvben olvashatunk.

## 7.2. Négyzetes blokkrendszerek polaritásai

Ebben a rövid szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy egy négyzetes blokkrendszer polaritásának hány autokonjugált pontja lehet. Emlékeztetünk arra, hogy polaritásnak másodrendű korrelációt, azaz bijektív, illeszkedéstartó,

pontot blokkba, blokkot pontba vivő másodrendű leképezést neveztünk. Polaritás persze csak akkor létezhet, ha a blokkrendszer izomorf a duálisával.

Mint azt az illeszkedési struktúrákról szóló szakaszban már láttuk, a blokkrendszernek pontosan akkor van polaritása, ha van szimmetrikus illeszkedési mátrixa. Ekkor a polaritásnál az $i$. pontnak éppen az $i$. blokk felel meg. Legyen $M$ egy ilyen szimmetrikus illeszkedési mátrix ($M = M^T$). Ebben az esetben a 2-struktúrákat leíró mátrix-egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$MM^T = M^2 = \lambda J + \mathrm{diag}(\deg(p_i) - \lambda).$$

Mivel

$$\det(M^2 - xI) = \det\left((M - \sqrt{x}I)(M + \sqrt{x}I)\right) = \det(M - \sqrt{x}I) \cdot \det(M + \sqrt{x}I),$$

azonnal láthatjuk az alábbi észrevételt.

**7.2.1. Állítás.** *Az $M$ szimmetrikus illeszkedési mátrix sajátértékei éppen a $\lambda J + \mathrm{diag}(\deg(p_i) - \lambda)$ mátrix sajátértékeinek négyzetgyökei.* ■

Blokkrendszerekre viszont lényegében már meghatároztuk a sajátértékeket (l. 4.1.3. Következmény), az eredményt most csak megismételjük.

**7.2.2. Állítás.** *Legyen $M$ a $\mathbf{D}$ négyzetes blokkrendszer illeszkedési mátrixa. Ekkor $MM^T$ sajátértékei $k^2$ (1 multiplicitással), valamint $n = k - \lambda$, $v - 1$ multiplicitással.* ■

**7.2.3. Definíció.** Legyen $\sigma$ a $\mathbf{D}$ négyzetes blokkrendszer polaritása. A $p$ pontot ($B$ blokkot) *autokonjugált*nak nevezzük, ha illeszkedik a $p^\sigma$ blokkra ($B^\sigma$ pontra). □

Ha $p$ az $i$. pont volt, akkor neki az $i$. blokk felel meg, így könnyen látható, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy az $M$ mátrix $p$ ponthoz tartozó diagonális eleme 1, vagyis az autokonjugált pontok száma megegyezik $M$ nyomával, $\mathrm{tr}(M)$-mel. Mivel a nyom másrészt a sajátértékek összege, a következő állítást kapjuk.

**7.2.4. Tétel.** *Legyen $\mathbf{D}$ négyzetes $(v, k, \lambda)$-blokkrendszer, $\sigma$ egy polaritása. $\sigma$ autokonjugált pontjainak száma*

$$k + s\sqrt{n} - (v - 1 - s)\sqrt{n}, \quad \textit{alakú, ahol} \quad \frac{1}{2}(v - 1 - \frac{k}{\sqrt{n}}) \leq s \leq v - 1.$$

*Bizonyítás.* A 7.2.1. Állítás miatt $M$ sajátértékei csupán $k$, $-k$, $\sqrt{n}$ és $-\sqrt{n}$ lehetnek, mivel $M^2$ sajátértékei $k^2$ és $n$. $k^2$ multiplicitása 1, és $\mathbf{j}$ sajátvektora $M$-nek mégpedig $k$ sajátértékkel, így $\mathbf{j}$ multiplicitása 1, és $-k$ nem sajátértéke

$M$-nek. Ha $\sqrt{n}$ multiplicitása $s$, akkor $-\sqrt{n}$ multiplicitása $v-1-s$, amiből az egyenlőtlenség következik. Az $s$-re vonatkozó feltételekből $s \leq v-1$ triviális, a másik pedig abból következik, hogy az autokonjugált pontok száma nemnegatív. ■

**7.2.5. Következmény.** *1) Ha $n$ nem négyzet, akkor $v$ páratlan és a polaritásnak $k$ fixpontja van.*

*2) Ha $\sigma$-nak nincs autokonjugált pontja, akkor $n$ négyzet és $\sqrt{n}$ osztja $\lambda$-t.*

*Bizonyítás.* Az eddigiek alapján feladatnak hagyjuk (l. 7.6. feladat). ■

Jegyezzük meg, hogy $q$-adrendű projektív síkokra ebből következik, hogy minden polaritásnak van autokonjugált pontja, továbbá, hogy nem négyzetrendű sík polaritásának $q+1$ autokonjugált pontja van. Projektív síkokra mindig ez a helyzet (akkor is, ha a rend négyzet), legalább $q+1$ autokonjugált pont van. A másik egyenlőtlenség is lényegesen javítható projektív síkokra, legfeljebb $q\sqrt{q}+1$ autokonjugált pont van. Mindkét extrém eset elő is fordul (legalábbis az ismert síkokon).

## 7.3. Feladatok

7.1. Ellenőrizzük, hogy a derivált blokkrendszer valóban blokkrendszer.
7.2. Ellenőrizzük, hogy a pont-reziduális blokkrendszer valóban blokkrendszer.
7.3. Ellenőrizzük, hogy a blokk-reziduális blokkrendszer valóban blokkrendszer.
7.4. Mi $\mathrm{PG}(n,q)$ derivált rendszere ill. pont-reziduális rendszere; mi a pontok foka stb.
7.5. $\mathrm{AG}_2(n,2)$ deriváltja $\mathrm{PG}_1(n-1,2)$. Mi a pont-reziduális rendszere?
7.6. Lássuk be a 7.2.5. Következményt.
7.7. Felhasználva azt, hogy az $(x_1,x_2,x_3)$ pontnak megfeleltetve az $[x_1,x_2,x_3]$ egyenest a $\mathrm{PG}(2,q)$ projektív sík egy polaritását kapjuk, (ha $q$ páratlan), konstruáljuk olyan $q^2+q+1$ pontú gráfot, amelyben nincsen négyszög és $(q^2+q-1)(q+1)/2$ éle van.

(Megjegyzés: Füredi belátta, hogy ennél nem is lehet több.)

# 8. fejezet

# Erősen reguláris gráfok

## 8.1. Alapvető tulajdonságok

Ebben a fejezetben további magyarázat nélkül használjuk a szokásos gráfelméleti terminológiát. Az előforduló gráfok egyszerűek, azaz hurok és többszörös él nélküliek, ezt a továbbiakban nem hangsúlyozzuk külön.

**8.1.1. Jelölés.** Ha $x$ csúcsa a $G$ gráfnak, akkor $G(x)$-szel fogjuk jelölni az $x$-szel összekötött csúcsok halmazát (az $x$-et magát nem beleértve).

**8.1.2. Definíció.** A $\Gamma$ gráfot $(n, k, \lambda, \mu)$ *paraméterű erősen reguláris* gráfnak nevezzük, ha a csúcsok száma $n$, a gráf $k$-adfokú reguláris, két összekötött pont közös szomszédainak száma $\lambda$, két összekötetlen ponté pedig $\mu$. □

**8.1.3. Állítás.** *Ha létezik $(n, k, \lambda, \mu)$ paraméterű erősen reguláris gráf, akkor*

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu.$$

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy $x$ csúcsot és számoljuk meg kétféleképpen az $\{y, z\}$ éleket, ahol $y$ össze van kötve $x$-szel, $z$ pedig nincs. ■

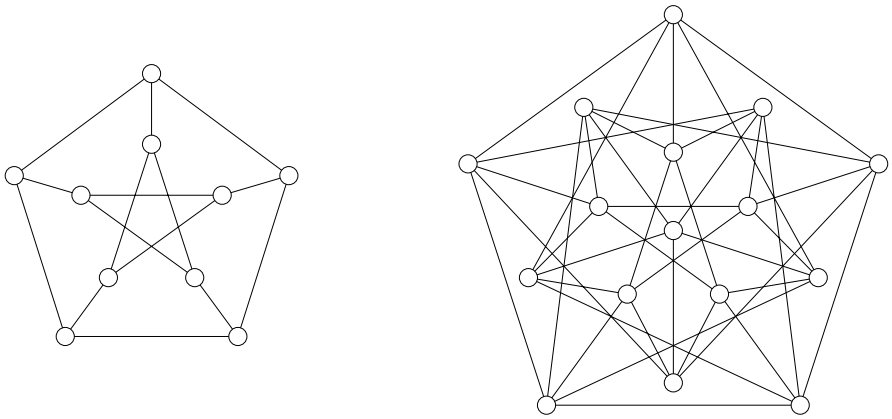
**8.1.4. Állítás.** *Erősen reguláris gráf komplementere is erősen reguláris, a paraméterek: $\bar{k} = n - 1 - k$, $\bar{\lambda} = n - 2k + \mu - 2$, $\bar{\mu} = n - 2k + \lambda$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\Gamma$ egy $(n, k, \lambda, \mu)$ paraméterű erősen reguláris gráf. Nyilván $\bar{\Gamma}$-nak is $n$ csúcsa van, $(n-1-k)$-adfokú reguláris. A $\bar{\lambda}$ meghatározásához azt kell megszámolnunk, hogy $\Gamma$-ban két nem szomszédos ponthoz hány olyan csúcsot találunk, amelyek egyikkel sincsenek összekötve. Ez $\bar{\lambda} = (n-k-2) - (k-\mu) = n - 2k + \mu - 2$, ami valóban nem függ a csúcsok választásától. Hasonlóan kapjuk, hogy $\bar{\mu} = n - 2k + \lambda$. ■

**8.1.5. Megjegyzés.** Ez újabb szükséges feltételeket ad erősen reguláris gráf létezésére, ti. $n \geq 2k - \mu + 2$ és $n \geq 2k - \lambda$ kell legyen.

Hasonlóan a blokkrendszerekhez itt is az lesz a fő kérdés, hogy egyrészt a paraméterekre minél több megszorítást találjunk, másrészt pedig a szükséges feltételek szűrőjén átment paraméter-halmazokra konstruáljunk is erősen reguláris gráfot.

Mielőtt folytatnánk a szükséges feltételek keresését, lássunk néhány példát.



8.1. ábra. A Petersen- és a Clebsch-gráf

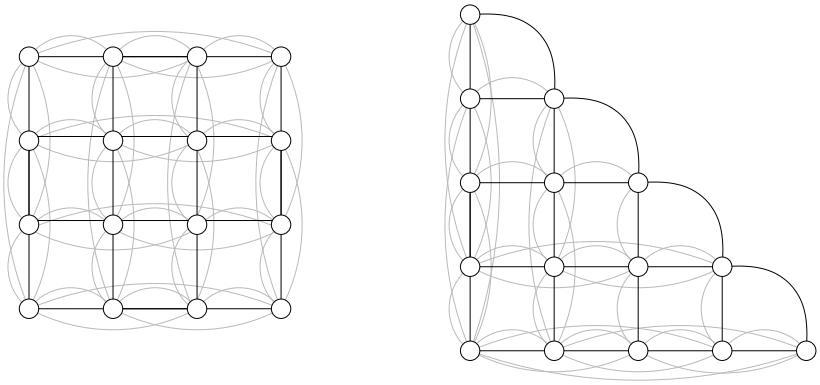
**8.1.6. Példa.** A $T(m)$ *trianguláris gráf* ($m \geq 4$): csúcsai egy $m$ elemű halmaz 2-elemű részhalmazai, két ilyet összekötünk, ha nem diszjunktak. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $T(m)$ a $K_m$ teljes gráf élgráfja. Az előző ábrán is látható *Petersen-gráf* $T(5)$ komplementere. $T(m)$ erősen reguláris, paraméterei

$$n = m(m-1)/2, \quad k = 2(m-2), \quad \lambda = m-2, \quad \mu = 4.$$

**8.1.7. Példa.** Az $L_2(m)$ *négyzetháló gráf* nem más, mint $K_m \oplus K_m$, azaz csúcsai a $(v, v')$ párok, ahol $v, v' \in V$, ($|V| = m$) és két különböző csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha valamelyik koordinátában megegyeznek. $L_2(m)$ is erősen reguláris, paraméterei

$$n = m^2, \quad k = 2(m-1), \quad \lambda = m-2, \quad \mu = 2.$$

Ezeket a gráfokat úgy is lerajzolhatjuk, hogy csak a tartalmazott klikkeket rajzoljuk le egy vonallal, és úgy képzeljük, hogy egy folyamatos vonalon belül bármely két pont össze van kötve.



8.2. ábra. Az $L_2(4)$ négyzetháló és a $T(6)$ trianguláris gráf

A 8.2. ábrán ezek a vastag vonalak, de vékonyan a klikkek további éleit is feltüntettük. A 8.2. ábra $L_2(4)$-et és $T(6)$-ot mutatja.

Jegyezzük meg, hogy a szélmalom-tételben (l. később) $u = 2{,}3$-ra éppen $L_2(3)$ és $T(6)$ komplementere szerepel.

**8.1.8. Példa.** $r$ darab diszjunkt $m$ pontú teljes gráf ($K_m$) uniója erősen reguláris, a paraméterek:

$$n = rm, \;\; k = m - 1, \;\; \lambda = m - 2, \;\; \mu = 0.$$

Ezt a gráfot $rK_m$-mel fogjuk jelölni. $\mu = 0$-ra minden erősen reguláris gráf ilyen (alkalmas $r, m$-re, l. 8.5. feladat). Ha ugyanis egy pont 2 hosszú úton elérhető $x$-ből, akkor 1 hosszú úton is, mert $\mu = 0$. Ezt ismételve kapjuk, hogy $x$ szomszédai mind össze vannak kötve. Ugyancsak erősen reguláris $rK_m$ komplementere, azaz az $r$ osztályú teljes Turán-gráf (ahol az osztályok mérete $m$). Az $rK_2$ speciális esetben a gráfot *létrá*nak, komplementerét *koktélparti gráf*nak szokás nevezni és ezt a komplementert $CP(r)$-rel jelöljük.

További példák még később is szerepelni fognak, most azonban térjünk rá a szükséges feltételek vizsgálatára.

Legyen $A$ a $\Gamma$ szomszédsági mátrixa. Csak emlékeztetőül: $a_{ij} = 1$ ha az $i$-edik és $j$-edik csúcs szomszédok, különben 0. Idézzük fel azt is, hogy $A^s$-ben az $(i, j)$ elem az $i$-edik és $j$-edik csúcs közti $s$ hosszúságú utakat számolja (l. a 8.6. feladatot is).

Mivel az okoskodások a szomszédsági mátrix sajátértékeit használják, foglaljuk össze, hogy mik azok a legfontosabb tulajdonságok, amelyeket tudunk. Ezelőtt lássuk az alapvető fontosságú Perron–Frobenius-tételt. Egy $n \times n$-es

mátrixot irreducibilisnek nevezünk, ha permutációmátrixszal való konjugálással nem hozható $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ alakra, ahol $O$ a csupa nulla mátrix. Nemnegatív elemű mátrixokra azt is mondhatjuk ehelyett, hogy minden $i, j$-re legyen olyan $k$, amelyre a mátrix $k$-adik hatványának $(i, j)$-edik eleme pozitív. Ez persze nem jelenti azt, hogy van a mátrixnak olyan hatványa, amely pozitív elemű (ilyenkor a mátrixot primitívnek szokás nevezni).

**8.1.9. Tétel. (Perron–Frobenius)** *Ha az $A$ mátrix elemei nemnegatívak és $A$ primitív, azaz létezik olyan $A^k$ hatványa, amelyben minden elem pozitív, akkor van olyan $k > 0$ sajátérték, amely egyszeres multiplicitású, a hozzá tartozó sajátvektor minden koordinátája pozitív, és a többi sajátértékre $|\varrho| < k$ teljesül. A $k$-hoz tartozó sajátvektor pozitív konstansszorzótól eltekintve egyértelmű is.*

*Ha a mátrix nemnegatív elemű és irreducibilis, akkor is létezik a $k > 0$ sajátérték, amely egyszeres és a hozzá tartozó sajátvektor koordinátái pozitívak. Ha a mátrixnak $h$ darab $k$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek $k$-nak a $h$-adik egységgyökökkel való szorzatai.*

A tételben a sajátérték akár bal, akár jobb oldali sajátérték lehet. Ha az irreducubilis mátrixnak definiáljuk a $d$ periódusát, mint azon $s$ értékek legnagyobb közös osztóját, amelyre $(A^s)_{ii} > 0$ (minden $i$-re), akkor ez a $d$ periódus éppen a Perron–Frobenius-tételben szereplő $h$ érték. Megmutatható, hogy ez a periódus nem függ az $(i, i)$ diagonális elem megválasztásától. Nemcsak a legnagyobb abszolút értékű sajátvektorra, hanem a teljes spektrumra igaz, hogy invariáns a $h$-adik egységgyökökkel való szorzásra. Ha $A$ összefüggő, nem páros gráf szomszédsági mátrixa, akkor primitív is, hiszen $A^s$-ben az $(i, j)$-edik elem az $i$-edik csúcsból a $j$-edikbe vezető $s$ hosszú sétákat számolja, és elég nagy $s$-re biztos van ilyen séta. Páros gráfok esetén mindig csak páros vagy páratlan $s$-ekre van ilyen, ha azonban van páratlan kör a gráfban, akkor azt be tudjuk fűzni egy ilyen sétába. Összefüggő páros gráf esetén a szomszédsági mátrix irreducibilis, periódusa 2. Ez tehát azt jelenti, hogy ilyenkor $-k$ is sajátérték. Perron a pozitív elemű mátrixokra bizonyított hasonló állítást, a tételről részleteket Rózsa [49] könyvében a 9. fejezetben találhatunk, egy nagyon jó rövid összefoglaló van Brouwer, Cohen, Neumaier [13] könyvében a 3.1. szakaszban.

**8.1.10. Állítás.** *Legyen $\Gamma$ egyszerű gráf, legyen $A$ a szomszédsági mátrixa, és legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ennek sajátértékei. Végül legyen $\Delta$ a maximális fok. Ekkor*

1. *A sajátértékei valósak (és $n$ db van).*
2. $|\lambda_i| \leq \Delta$.

3. *Ha* $\Gamma$ *összefüggő, akkor a legnagyobb sajátérték egyszeres multiplicitású.*

4. *Ha* $\Gamma$ $k$*-reguláris, akkor* $k$ *sajátérték.*

5. *Ha* $\Gamma$ $k$*-reguláris páros gráf, akkor* $-k$ *is sajátérték.*

Az állítások közül (1), (4) és (5) egyszerű. Jegyezzük meg, hogy (4) és (5) megfordítható, azaz ha $\Delta$ sajátérték, akkor $\Gamma$ reguláris, ha pedig $-\Delta$ sajátérték és $\Gamma$ összefüggő, akkor $\Gamma$ reguláris páros gráf. Ezt nem nehéz látni, hiszen tekintsük a Perron–Frobenius-tételbeli $k$ sajátértéket és a hozzá tartozó pozitív $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ sajátvektort. Válasszuk ki a legnagyobb abszolút értékű koordinátát, legyen ez $v_i$. Ha $\mathbf{v}$-t megszorozzuk $A$-val akkor az eredmény $i$-edik koordinátája azon $v_j$-k összege lesz, amelyek $i$-vel össze vannak kötve. Azaz legfeljebb $\Delta$-szor adunk össze legfeljebb $|v_i|$ abszolút értékű számokat, és így $kv_i$-t kapunk. Ez csak úgy lehetséges, ha $k = \Delta$, és minden $i$-vel összekötött $j$-re $v_j = v_i$. Azt is jegyezzük meg, hogy a legnagyobb sajátérték egyszeressége a Perron–Frobenius-tétel következménye (l. 8.1.9. Tétel) az előző indoklást ismételten alkalmazva azt kapjuk, hogy összefüggő gráfokra a $\Delta$-hoz tartozó sajátvektor $\mathbf{1}$. Ehhez nagyon hasonló okoskodás adja a $(-\Delta)$-ra vonatkozó eredményt, ott $i$ szomszédain $v_j = -v_i$ jönne és azt kapnánk, hogy a sajátvektor konstans a páros gráf két osztályának megfelelő koordinátákon. A későbbiekben a sajátértékeket a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ módon rendezzük.

Ha $\Gamma$ $(n, k, \lambda, \mu)$ paraméterű erősen reguláris gráf, akkor $A^2$ nagyon egyszerű szerkezetű: a főátlóban $k$-k állnak, a főátlón kívül pedig $\lambda$-k, illetve $\mu$-k, aszerint, hogy a két pont össze volt-e kötve $\Gamma$-ban. Ha $I$ jelöli az egységmátrixot, $J$ pedig a csupa egyesből álló mátrixot, akkor tehát

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A). \tag{8.1}$$

A gráf regularitása is felírható mátrixosan:

$$AJ = JA = kJ. \tag{8.2}$$

Érdemes megemlíteni, hogy ezek az egyenletek pontosan leírják az erősen reguláris gráfokat, azaz ha egy gráf szomszédsági mátrixa eleget tesz ezeknek az egyenleteknek, akkor az erősen reguláris.

Lineáris algebrából tudjuk, hogy felcserélhető szimmetrikus mátrixok egyszerre diagonalizálhatók (egy ortogonális mátrixszal). Ilyenek esetünkben $A$ és $J$. A csupa egyesből álló $\mathbf{j}$ vektor $A$-nak és $J$-nek is sajátvektora, a megfelelő sajátértékek $k$ és $n$. Alkalmazva $\mathbf{j}$-re (8.1)-et azt kapjuk, hogy

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu,$$

amit más módon már beláttunk a 8.1.3. Állításban. Vegyük $A$ egy további sajátvektorát, ami másik $\varrho$ sajátértékhez tartozik. Egy ilyen $\mathbf{v}$ sajátvektor

**j**-re merőleges, így $J$-nek is sajátvektora, 0 sajátértékkel. Alkalmazva (8.1)-et **v**-re azt kapjuk, hogy

$$\varrho^2 = (k-\mu) + (\lambda-\mu)\varrho. \tag{8.3}$$

Ez az egyenlőség másodfokú egyenletet ad $\varrho$-ra. A két gyököt $r$-rel és $s$-sel fogjuk jelölni, mégpedig úgy, hogy $r > s$ legyen. Eszerint

$$r, s = \frac{1}{2}\left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}\right). \tag{8.4}$$

Említsük meg azt is, hogy ez az okoskodás használható akkor is, ha a $k$ sajátérték multiplicitása nem 1 (azaz a 8.1.10 szerint ha $\Gamma$ nem összefüggő). Ha ugyanis $k$ multiplicitása legalább kettő, akkor **v**-t tudnánk **j**-re ortogonálisan választani a $k$ sajátértékhez tartozó sajátaltérben, vagyis akkor $k$ is kielégíti a (8.3) egyenletet. Jegyezzük meg, hogy ez csak $\mu = 0$ vagy $k$ esetén lehet, és megmutatható, hogy csak az $rK_m$, illetve a $T(mr, r)$ $r$ osztályú Turán-gráf esetén lehet, további információkat a 8.7. feladat és a 8.1.7. Példa tartalmaz. Ez azonban a továbbiakat nem befolyásolja. Ha $r$ és $s$ multiplicitását $f$-fel és $g$-vel jelöljük, akkor ezekre az

$$n = f + g + 1, \quad 0 = \mathrm{Trace}(A) = k + fr + gs.$$

egyenletrendszert írhatjuk föl. Ez az $r = k$ esetben is érvényes, ekkor $k$ multiplicitása $1+f$ lesz. Mivel $k = \lambda = \mu$ nem lehetséges, így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Mivel $f, g$ természetes számok, beláttuk az alábbi tételt.

**8.1.11. Tétel.** (Integralitási (vagy egészségi) feltétel) *Az*

$$f, g = \frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

*számok nemnegatív egészek.* ■

Mielőtt az integralitási feltétel következményeivel foglalkoznánk, lássunk néhány újabb példát erősen reguláris gráfra.

**8.1.12. Példa.** A most következő példával nem először és nem utoljára találkozunk. Ehhez hasonló ötletet használtunk az Hadamard-mátrixokra vonatkozó Paley konstrukcióban is. A $P(q)$ *Paley-gráf* csúcsai a $\mathrm{GF}(q)$ véges test elemei, $q \equiv 1 \pmod 4$. Két csúcsot összekötünk, ha különbségük nemnulla négyzetelem. Mivel $-1$ négyzetelem, ha $q \equiv 1 \pmod 4$, így ez egyszerű irányítatlan gráf lesz. Nem teljesen magától értetődő (l. 8.8. feladat), hogy erősen reguláris. A paraméterek

$$n = q, \quad k = (q-1)/2, \quad \lambda = (q-5)/4, \quad \mu = (q-1)/4.$$

A most következő konstrukció permutáció-csoportokkal van kapcsolatban.

**8.1.13. Példa.** Legyen $G$ tranzitív permutációcsoport a $V$ jegyhalmazon. Ekkor $G$ a természetes módon (komponensenként) hat $V\times V$-n, azaz $(x,y)^g = (x^g, y^g)$. Ennél a hatásnál a diagonális persze orbit. Ha $G$ 2-tranzitív, akkor a diagonálison kívüli elemek egy orbitban vannak. Általában, a $V \times V$-n az orbitok számát a permutációcsoport *rang*jának szokták nevezni. (Tehát $G$ akkor és csak akkor 2-tranzitív, ha rangja 2.) Tegyük fel, hogy $G$ 3 rangú, azaz a diagonálison kívül pontosan két további orbit van: $O_1$ és $O_2$. Tegyük fel továbbá, hogy $G$ páros rendű, és legyen $\tau \in G$ egy involúció (másodrendű elem). Legyen $x \in V$ olyan, hogy $x\tau \neq x$, és persze $(x\tau)\tau = x$ (ilyen elem van). Tekintsük az $(x, y)$; $y = x\tau$ párt. Legyen ez mondjuk $O_1$-ben. Ekkor $G$ $O_1$-en való tranzitivitása miatt $O_1$ minden párjára van olyan elem, amely felcseréli a pár tagjait, azaz $O_1$ szimmetrikus a diagonálisra. Ekkor viszont tekinthetjük azt a $\Gamma$ gráfot, amelynek élei azon $\{x, y\}$ párok, ahol $(x, y) \in O_1$. $\Gamma$ regularitása egyszerűen $G$ $V$-n való tranzitivitásából, az erősen regularitás meg abból következik, hogy összekötött pontpár átvihető tetszőleges összekötöttbe (mert $O_1$ orbit). Hasonlóan okoskodhatunk összekötetlen pontpárokra is, mert $O_2$ orbit. Az ilyen gráfokat 3 rangú gráfoknak hívják.

**MESE.** A 3 rangú permutációcsoportok ismertek (modulo egyszerű csoportok karakterizációja). Sajnos azonban a legtöbb erősen reguláris gráf NEM 3 rangú. Ennek ellenére több olyan eredmény ismert, amelyet csoportelmélészek találtak 3 rangú csoportokra, de valójában erősen reguláris gráfokra vonatkoznak.

Lássunk még néhány sporadikus konstrukciót is. Semmiképpen sem törekszünk teljességre, a legjellegzetesebb konstrukciós ötleteket azonban igyekszünk érzékeltetni.

**8.1.14. Példa.** A *Clebsch-gráf* csúcsai az {1,2,3,4,5} halmaz páros sok elemű részhalmazai. Két ilyet összekötünk, ha szimmetrikus differenciájuk 4 elemű. Ellenőrizhető (l. 8.9. feladat), hogy a Clebsch-gráf (16,5,0,2) paraméterű erősen reguláris gráf. Ez a gráf szerepel a 8.1. ábrán.

**8.1.15. Példa.** A *Gewirtz-gráf* egy (56,10,0,2) paraméterű erősen reguláris gráf lesz (l. 8.10. feladat). A csúcsok halmaza $V = \{\infty\} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, ahol $\mathcal{P}$ az $Alt(6)$ alternáló csoport 3-Sylow részcsoportjainak halmaza, $\mathcal{Q}$ pedig $Alt(6)$ involúcióinak halmaza. Élek: $\infty$-t pontosan a $\mathcal{P}$ elemeivel kötjük össze, $P \in \in Syl_3(Alt(6))$ és $q$ akkor és csak akkor legyenek összekötve, ha $q$ normalizálja $P$-t (azaz $q^{-1}Pq = P$), végezetül két involúciót $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$-t pontosan akkor kötünk össze, ha szorzatuk negyedrendű (azaz $|q_1q_2| = 4$). Hogy a dolgot konkrétabban lássuk, azonosítsuk a 3-Sylow részcsoportokat orbitjaikkal (ez tehát a 6 elemű alaphalmaz két 3-elemű halmazra való partícióját jelenti), és hasonlóan az involúciókat is tekintsük mint transzpozíció-párokat. Ennek segítségével hosszadalmasan, de mechanikusan ellenőrizhető, hogy az involúció

normalizálja-e a Sylow részcsoportot. Például a

$$\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\} \text{ és } q=(12)(45)$$

össze vannak kötve, hiszen $q^{-1}(123)q=(132)=(123)(123)$, és hasonlóan a Sylow-részcsoport többi elemére is. Involúciók esetén pl. $(12)(34)$ és $(23)(56)$ össze van kötve, mert szorzatuk $(1342)(56)$ negyedrendű. Ez a konstrukció Simstől származik.

A Gewirtz-gráf egy másik konstrukciója a negyedrendű projektív sík bővítésekor használatos hiperoválisosztályokat (azaz $\mathrm{PSL}(3,q)$ orbitjait a hiperoválisokon, l. 10.2 szakasz) használja. A csúcsok egy osztály hiperoválisai (tehát 56 csúcs van), és két hiperoválist összekötünk, ha diszjunktak.

Folytassuk a szükséges feltételekkel kapcsolatos vizsgálódásainkat. Mivel az

$$f,g=\frac{1}{2}\left(n-1\pm\frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4(k-\mu)}}\right)$$

multiplicitások egészek, így két lehetőségünk van: a zárójelen belüli tört számlálója nulla, azaz $(n-1)(\mu-\lambda)=2k$, vagy a gyökjel alatt négyzetszám áll és még néhány oszthatósági feltétel is teljesül.

Az első esetben $n=1+2k/(\mu-\lambda)>1+k$, azaz csak $\mu=\lambda+1$ lehet, továbbá $n=2k+1$. A 8.1.3 feltétel szerint ebből $k(k-\mu)=k\mu$ jön, vagyis $k=2\mu$, $n=2k+1=4\mu+1$. Az ilyen gráfokat szokták *konferenciagráfok*nak is hívni. Erre az esetre van Lint és Seidel egy további, a Bruck–Chowla–Ryser-tételre (l. 6.1.5) emlékeztető, szükséges feltételt is belátott:

**8.1.16. Tétel. (van Lint, Seidel)** *Konferencia-gráfban, azaz egy*

$$(n-1)(\mu-\lambda)=2k$$

*-nak eleget tevő erősen reguláris gráfban, $n$ két négyzetszám összege kell legyen.*

A tételt nem bizonyítjuk.

Jegyezzük meg, hogy például a Paley-gráfok (l. 8.1.12) ilyenek, így konferenciagráf létezik, ha $n\equiv 1 \pmod 4$ prímhatvány. További példák is ismertek, pl. $n=45,225$ esetén.

A második esetben a gyökjel alatti kifejezés négyzetszám, mondjuk $(\mu-\lambda)^2+4(k-\mu)=u^2$. Továbbá $u$ osztja $(n-1)(\mu-\lambda)-2k$-t, végül a hányados ugyanolyan paritású, mint $n-1$. Ez az „általános eset”. Ennek egy nagyon fontos következménye, hogy az $r,s$ sajátértékek is egészek, hiszen ugyanez a kifejezés áll a gyök alatt $r$ és $s$ kifejezésében (l. (8.4)), továbbá $\lambda-\mu$ és a gyök alatt álló kifejezés egyszerre páros vagy páratlan, azaz ha a gyökvonás eredménye egész, akkor $r,s$ már automatikusan egész számok.

**8.1.17. Következmény.** *Ha egy erősen reguláris gráf nem konferenciagráf, akkor az $r, s$ sajátértékek egészek.* ■

Jegyezzük meg, hogy abban az esetben, ha $n$ négyzetszám, akkor az $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$ feltételnek eleget tevő gráfok a második esetbe is beletartoznak. A $P(9)$ Paley-gráf (amely egyébként izomorf az $L_2(3)$ négyzetháló gráffal) ilyen példa.

## 8.2. További korlátok

Az eddigiekben azt láttuk, hogy az erősen reguláris gráf paraméterei meghatározzák a sajátértékeket és azok multiplicitását. A fordított esetben az nyilvánvaló, hogy a sajátértékek meghatározzák a paramétereket (ne feledjük, hogy $k$ is sajátérték!), hiszen ők a $\varrho^2 = (k-\mu)+(\lambda-\mu)\varrho$ másodfokú egyenlet gyökei, s így $r+s = \lambda-\mu$, $rs = -(k-\mu)$, ahonnan $\lambda = k+r+s+rs$, $\mu = k+rs$, végül $n$-et 8.1.3-mal határozhatjuk meg. Eszerint a sajátértékek meghatározzák $f$-et és $g$-t is.

Általában viszont csupán a multiplicitások ismerete nem elegendő a paraméterek meghatározásához, de vannak olyan speciális esetek amikor valamit tudunk mondani (persze még egy adat szükséges). A következő eredményt először Wielandt bizonyította 3 rangú gráfokra. A bizonyítás felhasználja a nevezetes Perron–Frobenius-tételt, l. 8.1.9. Tétel.

**8.2.1. Tétel. (Wielandt)** *Legyen $\Gamma$ erősen reguláris gráf $n = 2m$ csúcson és tegyük fel, hogy a sajátértékek multiplicitása $1, m-1$ és $m$. Ekkor vagy $\Gamma$ vagy komplementere a létragráf (l. 8.1.8. Példa), vagy $\Gamma$ vagy komplementere az alábbi paraméterű: $n = 4s^2+4s+2$, $k = s(2s+1)$, $\lambda = s^2-1$, $\mu = s^2$ (valamilyen pozitív egész $s$-re).*

*Bizonyítás.* Mivel a komplementer gráf foka $2m-k-1$, így esetleg áttérve a komplementerre feltehetjük, hogy $k < m$. Nézzük $\Gamma$ szomszédsági mátrixát $A$-t, valamint $A^2$-et és $A^3$-t, és számítsuk ki a nyomukat. Ez egyfelől a diagonális elemek összege, másfelől a sajátértékeké, amiből három egyenletet fogunk kapni. $A$ diagonális elemei 0-k, $A^2$-é $k$-k, míg $A^3$-ben a diagonális elemek az egy ponton átmenő háromszögek száma, így $k\lambda$. Tehát:

$$\begin{aligned} k+(m-1)r+ms &= 0,\\ k^2+(m-1)r^2+ms^2 &= 2mk,\\ k^3+(m-1)r^3+ms^3 &= 2mk\lambda. \end{aligned}$$

A Perron–Frobenius-tétel esetünkben azt adja, hogy $|r| \le k$. Az első egyenlet szerint $k \equiv r \pmod m$, azaz $r = k$ vagy $r = k-m$. Az első esetben $s = -k$, $2mk^2 = 2mk$, vagyis $k = 1$ és a gráf a létra vagy komplementere (l. 8.11.

feladat). A második esetben $k = m-1-s$, $r = -1-s$ és a második egyenletből az is következik, hogy $m = 2s^2 + 2s + 1$, végül $\lambda$ értékét a harmadik egyenlet adja meg. ■

A Wielandt-tétel második esete is előfordul, $s = 1$ esetén pl. a Petersen-gráfot (és csak azt, l. 8.12. feladat) kapjuk. Delsarte és Goethals, valamint Turyn példái mutatják, hogy abban az esetben, ha $2s+1$ prímhatvány, vannak ilyen paraméterű gráfok.

Folytassuk a szükséges feltételek tanulmányozását: először lássunk egy gyakran használt elemi lemmát, amely arról szól, hogy pozitív definit mátrixok Gram-mátrixként előállíthatók.

**8.2.2. Lemma. (Delsarte, Goethals, Seidel)** *Legyen $A = (a_{ij})$ pozitív szemidefinit valós $n \times n$-es, $d$ rangú mátrix. Ekkor vannak olyan $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \in \mathbf{R}^d$ vektorok, melyekre $a_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ $(i, j = 1, \dots n)$.*

*Bizonyítás.* A „főtengelytranszformáció" miatt található olyan nemszinguláris valós $P$ mátrix, amellyel

$$PAP^T = \begin{pmatrix} I_d & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Ha $P$ inverzét $Q$-val jelöljük, akkor

$$A = Q \begin{pmatrix} I_d & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^T = Q_1 I_d Q_1^T,$$

ahol $Q_1$ az az $n \times d$-es mátrix, mely $Q$ első $d$ oszlopát tartalmazza. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok egyszerűen a $Q_1$ sorai lesznek. ■

A most következő tétellel, illetve a hozzá kapcsolódó kérdésekkel kapcsolatban l. Babai–Frankl [3] könyvének 1.2. szakaszát. Ehhez hasonló témáról az elsőéves anyagban is volt szó (l. Elekes [20]), olyan ponthalmazokról, amelyekben csak kétféle távolság fordul elő. A bizonyítás második fele ennek gömbi megfelelőjével foglalkozik.

**8.2.3. Tétel.** *Legyen $\Gamma$ erősen reguláris gráf, melyre mind $\Gamma$, mind $\bar{\Gamma}$ összefüggő. Ha $\Gamma$ szomszédsági mátrixának van $f(> 1)$ multiplicitású sajátértéke, akkor $n \le f(f+3)/2$.*

*Bizonyítás.* Az $A$ szomszédsági mátrixának három sajátaltere van. Ezeken a sajátaltereken az $I$, $A$ és $J - I - A$ mátrixok skalárral való szorzások. Megfordítva, ha egy mátrixnak ez a három altér sajátaltere, akkor az a fenti három mátrixnak lineáris kombinációja. Tekintsük azt az $E$ mátrixot, amely az $f$ dimenziós sajátaltéren 1, a másik kettőn 0. Legyen ez az $E$ mondjuk $E = \alpha I + \beta A + \gamma(J - I - A)$. Ekkor $E$ pozitív szemidefinit, így az előző

lemma alapján találunk egy $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{R}^f$ vektorrendszert, amelynek ez a Gram-mátrixa, azaz $e_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Ebből meg tudjuk határozni a $\mathbf{v}_i$ vektorok hosszát és az egymással bezárt szögeket. Így $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = \alpha$, mert az $E$ mátrix főátlójában $\alpha$-k állnak. Hasonlóan a $\mathbf{v}_i$ és $\mathbf{v}_j$ vektorok által bezárt szög cosinusa vagy $\gamma/\alpha$ vagy $\beta/\alpha$, mert a főátlón kívüli elemek (azaz $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$), mind $\beta$-k vagy $\gamma$-k és a cosinus kiszámolásához a vektorok abszolút értékeivel osztanunk kell. Természetesen eloszthatjuk a vektorokat $\sqrt{\alpha}$-val, és így egységnyi abszolút értékű vektorokból álló olyan $S$ vektor-halmazunk lesz, amelyben bármely kettő kétféle szög valamelyikét zárja be. Még azt is vegyük észre, hogy a vektorok páronként különbözőek, mert mind $\Gamma$, mind $\bar{\Gamma}$ összefüggő (részletesen l. a 8.19. feladatot).

A bizonyítás befejező része egyszerűen ilyen vektorhalmazokról szól. Minden $\mathbf{v} \in S$-re definiáljuk az $f_{\mathbf{v}}$ függvényt az alábbi módon:

$$f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{((\mathbf{v}, \mathbf{x}) - \beta)((\mathbf{v}, \mathbf{x}) - \gamma)}{(1 - \beta)(1 - \gamma).}$$

Persze $f_{\mathbf{v}}$ az egységnyi abszolút értékű vektorokon van értelmezve. Ha ezt $\mathbf{x}$ koordinátáival felírjuk, akkor másodfokú polinomot kapunk. Másrészt az $f_{\mathbf{v}}$ függvények lineárisan függetlenek, ha ugyanis egy ilyen $f_{\mathbf{v}}$-be az $S$ egy $\mathbf{w}$ elemét helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$f_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{v} = \mathbf{w}, \\ 0, & \text{ha } \mathbf{v} \neq \mathbf{w}. \end{cases}$$

Ha tehát egy $\sum_{v \in S} \lambda_v f_{\mathbf{v}}$ lineáris kombináció $\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{w}$ behelyettesítésével látjuk, hogy $\lambda_w = 0$, vagyis az $f_{\mathbf{v}}$-k valóban függetlenek. Másfelől ezek benne vannak abban a vektortérben amelyet az $f$ darab lineáris és $f(f+1)/2$ homogén másodfokú függvény feszít ki. Konstansokat nem kell figyelembe venni, mert $x_1^2 + \ldots + x_f^2 = 1$, azaz a konstans lecserélhető másodfokúra. Más függvény viszont nem ad azonosan 0-t az egységnyi abszolút értékű vektorokra megszorítva. Eszerint valóban

$$n = |S| = f + \frac{1}{2} f(f+1) = \frac{1}{2} f(f+3). \qquad \blacksquare$$

A bizonyítás lelke az olyan vektorok számának becslése, amelyek csak két szöget határoznak meg. Delsarte, Goethals és Seidel a használt becslést „abszolút korlát”-nak nevezte, mert a becslés nem függ a meghatározott szögek nagyságától.

Egy további korlát a *Krein-feltétel*, ezt először (Krein egy eredményét felhasználva) 3 rangú gráfokra bizonyította Scott.

**8.2.4. Tétel. (Krein-feltételek)** *Legyen $\Gamma$ erősen reguláris gráf, melyre mind $\Gamma$, mind $\bar{\Gamma}$ összefüggő. Ha $\Gamma$ szomszédsági mátrixának sajátértékei $k, r, s$, akkor*

*(a)* $(r+1)(k+r+2rs) \leq (k+r)(s+1)^2$,

*(b)* $(s+1)(k+s+2rs) \leq (k+s)(r+1)^2$.

A bizonyítás nagyon számolós, így most elhagyjuk. ■

Még egy további szükséges feltételt említünk erősen reguláris gráfok létezésére, a bizonyítást szintén elhagyjuk.

**8.2.5. Tétel.** („Karom korlát") *Ha* $\mu \neq s^2$, $\mu \neq s(s+1)$, *akkor* $2(r+1) \leq$ $\leq s(s+1)(\mu+1)$. ■

Igen gyakran az a helyzet, hogy egy erősen reguláris gráfot meghatároznak paraméterei. Erre már több konkrét példát láttunk eddig is, most ezt a négyzetháló gráfokra fogjuk megmutatni. A megfelelő állítást a trianguláris gráfok esetére a következő fejezetben bizonyítjuk, mert ezt majd ott használjuk a Hall–Connor-tétel bizonyításában.

**8.2.6. Tétel.** *Legyen* $\Gamma$ *egy* $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ *paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor* $n > 4$*-re* $\Gamma$ *izomorf az* $L_2(n)$ *négyzetháló gráffal.*

*Bizonyítás.* Válasszuk ki $\Gamma$ egy $x$ pontját és tekintsük a $\Gamma(x)$ gráfot. Ez egy $2(n-1)$ csúcsú $(n-2)$-edfokú reguláris gráf. Vegyünk ebben a gráfban két nem összekötött csúcsot, $y$-t és $z$-t. Jelöljük $m$-mel ezek $\Gamma(x)$-beli közös szomszédainak számát. Nyilván $m \leq 1$. Mivel $\deg(y) = \deg(z) = n-2$, így $n-2-m$ olyan csúcs van amely csak $y$-nal van összekötve, de $z$-vel nincs, és megfordítva. Eszerint viszont marad $2(n-1) - 2 - m - 2(n-2-m) = m$ olyan csúcs, amely sem $y$-nal, sem $z$-vel nincs összekötve.

Tekintsük először $m = 1$ esetet. Jelölje $w$ azt a pontot, amelyik sem $y$-nal, sem $z$-vel nincs összekötve. Ekkor $w$-nek és $y$-nak csak egy közös szomszédja lehet. Hasonlóan $w$-nek és $z$-nek is. Másrészt minden $w$-től különböző pont vagy $y$-nal vagy $z$-vel össze van kötve, ami csak úgy lehet, ha $n-2 \leq 2$.

Így $n > 4$-re csak $m = 0$ fordulhat elő. Ez magyarul azt jelenti, hogy $\overline{\Gamma(x)}$ nem tartalmaz háromszöget. $\overline{\Gamma(x)}$ egy $(n-1)$-reguláris gráf $2(n-1)$ ponton, így a Turán-tétel szerint csak akkor lehet háromszögmentes, ha teljes páros gráf. Az eredeti $\Gamma(x)$-re ez azt jelenti, hogy ő két diszjunkt klikk uniója.

Vegyük hozzá $x$-et a $\Gamma(x)$-beli két klikkhez. Így minden ponton két klikk megy át, azaz összesen $2n^2/n = 2n$ ilyen $n$ pontú klikkünk van, melyek egymást nulla vagy egy pontban metszik. Három ilyen klikk közül mindig van két diszjunkt, mert ellenkező esetben a két klikk közös pontjához tartozó $\Gamma(x)$ gráf két diszjunkt klikkje között menne a harmadik klikk valamelyik éle. Ez azt jelenti, hogy egy rögzített klikket metsző klikkek páronként diszjunktak és lefedik az összes pontot. Ebből azonnal adódik, hogy a klikkek két osztályba sorolhatók és a gráf $L_2(n)$. ■

Jegyezzük meg, hogy $n = 2,3$-ra közvetlenül láthatjuk az állítást, míg $n = 4$-re van ellenpélda, az ún. Shrikhande-gráf, l. 8.3.13. Példa.

## 8.3. Erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek

**8.3.1. Tétel.** *Legyen $\Gamma$ olyan erősen reguláris gráf, amelyre $\lambda = \mu$. Ekkor $\Gamma$ szomszédsági mátrixa $A = M$ tekinthető egy négyzetes 2-$(n, k, \lambda)$ blokkrendszer illeszkedési mátrixának.*

*Bizonyítás.* Mivel $A = A^T$, így

$$A^2 = AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J,$$

és ez a mátrixegyenlet pontosan azt fogalmazza meg, hogy $A = M$ négyzetes blokkrendszer illeszkedési mátrixa. ■

**8.3.2. Tétel.** *Legyen $\Gamma$ olyan erősen reguláris gráf, amelyre $\mu = \lambda + 2$, és legyen $A$ a $\Gamma$ szomszédsági mátrixa. Ekkor $M = A + I$ egy négyzetes 2-$(n, k + 1, \lambda + 2)$ blokkrendszer illeszkedési mátrixa.*

*Bizonyítás.* Most is $M = M^T$, azaz

$$MM^T = M^2 = (A+I)^2 = A^2+2A+I = (k-\lambda-2)I-2A+(\lambda+2)J+2A+I,$$

és mivel ez nem más, mint $(k - \lambda - 1)I + (\lambda + 2)J$, az állítás adódik. ■

Jegyezzük meg, hogy ezeket az észrevételeket megfogalmazhatjuk a polaritások nyelvén is, hiszen a kapott blokkrendszerek illeszkedési mátrixa automatikusan szimmetrikus lesz.

**8.3.3. Tétel.** *Akkor és csak akkor létezik olyan négyzetes $(v, k, \lambda)$ blokkrendszer, melynek van olyan polaritása, ahol semelyik pont sem illeszkedik a hozzárendelt blokkra, ha van $(v, k, \lambda, \lambda)$ paraméterű erősen reguláris gráf.*

*Akkor és csak akkor létezik olyan négyzetes $(v, k, \lambda)$ blokkrendszer, amelynek van olyan polaritása, ahol mindegyik pont illeszkedik a hozzárendelt blokkra, ha van $(v, k - 1, \lambda - 2, \lambda)$ paraméterű erősen reguláris gráf.*

A bizonyítást l. a 8.13. feladatban. ■

Talán érdemes megemlíteni, hogy a második esetre van motiváló geometriai példa, három (vagy általában páratlan) dimenziós projektív térben vannak ún. nullpolaritások (vagy szimplektikus polaritások), amelyeknél minden pont illeszkedik a neki megfelelő poláris (hiper)síkra. Ilyenek segítségével kapjuk pl. a $W(q)$ általánosított négyszögeket, l. [40].

**8.3.4. Tétel.** *Rögzített $\lambda$-ra csak véges sok $\mu = \lambda$-nak eleget tevő erősen reguláris gráf létezik.*

*Bizonyítás.* Egy ilyen gráf nem lehet konferenciagráf, azaz a 8.1.11 Integralitási feltétel szerint $k = \lambda + u^2$ kell legyen valamilyen $u$-ra, amely osztja $\lambda$-t. Mivel eszerint $u \leq \lambda$, így $k \leq \lambda(\lambda + 1)$ és $v \leq \lambda^2(\lambda + 2)$. ■

Jegyezzük meg, hogy a bizonyításban adott felső becslések élesek, ha $\lambda$ prímhatvány, akkor vannak is ilyen gráfok l. a Cameron–van Lint könyvet [16].

A másik esetben, amikor $\mu = \lambda+2$ nem ismert hasonló végességi eredmény, még $\lambda = 0$-ra sem, pedig ebben az esetben csak három gráfot ismerünk.

Nézzük, hogyan hozhatók kapcsolatba bisíkokkal ezek az erősen reguláris gráfok. Az $L_2(4)$ gráf és a Shrikhande-gráf (16,6,2,2) paraméterű gráfok, így ezek (nem-izomorf) negyedrendű ($k = 6$-os) bisíkokat adnak. Másrészt a Clebsch-gráf (16,5,0,2) paraméterű, így ő is negyedrendű bisíkot ad meg. Más negyedrendű bisík nincs is.

A Gewirtz-gráf (56,10,0,2) paraméterű erősen reguláris gráf így 9-edrendű bisíkot határoz meg. Ismert, hogy pontosan 4 nem-izomorf 9-edrendű bisík van.

Egy másik olyan témakör, ahol a blokkrendszerek elméletében erősen reguláris gráfokat használunk, a kvázireziduális blokkrendszerek. Idézzük fel, hogy egy négyzetes blokkrendszer reziduálisa a belőle egy blokk (és annak összes pontjai) törlésével kapható blokkrendszer. Természetesen az eljárás prototípusa az, ahogy projektív síkból affin síkot nyerünk. Ha egy blokkrendszer valaminek a reziduálisa, akkor paramétereire teljesül az $r = k+\lambda$ összefüggés.

**8.3.5. Definíció.** Egy blokkrendszert *kvázireziduális*nak nevezünk, ha paramétereire $r = k + \lambda$. □

Természetesen a fő kérdés az, hogy vajon egy kvázireziduális blokkrendszer reziduálisa-e valami más blokkrendszernek. Könnyű megmutatni, hogy $\lambda = 1$ esetén kvázireziduális blokkrendszer csak az affin sík lehet, az pedig projektív sík reziduálisa. $\lambda = 2$-re is igaz ez (ez a Hall–Connor-tétel, amelyet rövidesen bizonyítunk). $\lambda = 3$-ra azonban már nem igaz, hogy minden kvázireziduális blokkrendszer reziduális volna. Az alábbi Bhattacharyatól származó példa ellenpélda: a pontok halmaza $\{1,\dots,16\}$, a blokkokat pedig az alábbi táblázat tartalmazza.

| | | |
|---|---|---|
| $B_1 = \{1,2,7,8,14,15\}$ | $B_9 = \{4,5,7,8,12,15\}$ | $B_{17} = \{1,2,3,11,12,15\}$ |
| $B_2 = \{3,5,7,8,11,13\}$ | $B_{10} = \{2,4,9,10,11,13\}$ | $B_{18} = \{2,6,7,9,14,16\}$ |
| $B_3 = \{2,3,8,9,13,16\}$ | $B_{11} = \{3,6,7,10,11,14\}$ | $B_{19} = \{1,4,5,13,14,16\}$ |
| $B_4 = \{3,5,8,9,12,14\}$ | $B_{12} = \{1,2,3,4,5,6\}$ | $B_{20} = \{2,5,6,11,12,16\}$ |
| $B_5 = \{1,6,7,9,12,13\}$ | $B_{13} = \{1,4,7,8,11,16\}$ | $B_{21} = \{1,3,9,10,15,16\}$ |
| $B_6 = \{2,5,7,10,13,15\}$ | $B_{14} = \{2,4,8,10,12,14\}$ | $B_{22} = \{4,6,8,9,11,15\}$ |
| $B_7 = \{3,4,7,10,12,16\}$ | $B_{15} = \{5,6,8,10,15,16\}$ | $B_{23} = \{1,5,9,10,11,14\}$ |
| $B_8 = \{3,4,6,13,14,15\}$ | $B_{16} = \{1,6,8,10,12,13\}$ | $B_{24} = \{11,12,13,14,15,16\}$ |

Ekkor **D** egy (16,6,3) blokkrendszer, amely kvázireziduális. Jegyezzük meg, hogy annak, hogy egy ilyen blokkrendszer nem lehet négyzetes blokkrendszer blokkreziduálisa a triviális oka az, ha két blokk egymást több, mint $\lambda$ pontban metszi. Esetünkben ezek a blokkok $B_5$ és $B_{16}$, melyek 4 pontban metszik egymást.

A jelen jegyzetben csak a $\lambda = 2$ esetet vizsgáljuk meg részletesen, azonban általános $\lambda$-ra a helyzet nem annyira elszomorító, mint azt a Bhattacharya-féle példa alapján gondolhatnánk. Nevezetesen Bose, Shrikhande és Singhi belátták az alábbi szép aszimptotikus eredményt.

**8.3.6. Tétel. (Bose, Shrikhande, Singhi)** *Van olyan $\lambda$-tól függő $g(\lambda)$, hogy $k > g(\lambda)$ esetén minden kvázireziduális blokkrendszer reziduális.*

Konkrétan $g(3) = 76$-ot adták meg, különben pedig $\lambda \geq 10$-re $\lambda^4$, $4 \leq \lambda \leq 9$-re $\lambda^5$ nagyságrendű $g(\lambda)$-t. Részletesen l. az eredeti cikket [12].

A $\lambda = 2$ eset részletes vizsgálatát kezdjük az alábbi észrevétellel:

**8.3.7. Tétel.** *Legyen* **D** *kvázireziduális blokkrendszer, melyre $\lambda = 2$. Ekkor*

$$v = \frac{k(k+1)}{2}, \quad r = k+2, \quad \lambda = 2, \quad b = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

*Továbbá két különböző blokknak 1 vagy 2 közös pontja van.*

*Bizonyítás.* A paraméterek meghatározása triviális (l. 3.1.2), csak a blokkok metszetére vonatkozó állítást kell igazolnunk. Legyen $B$ rögzített blokk és jelölje $n_i$ a $B$-t $i$ pontban metsző blokkok számát ($i = 0, \ldots, k$). Ekkor a variancia-trükköt (négyzetes leszámlálást) alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_i n_i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1,$$

$$\sum_i i n_i = k(r-1) = k(k+1),$$

$$\sum_i i(i-1) n_i = k(k-1)(\lambda - 1) = k(k-1).$$

Itt az első egyenlet a blokkokat, a második az illeszkedő pont-blokk, a harmadik az illeszkedő pontpár-blokk párokat számolja meg, ahol a szóban forgó pontok $B$-beliek, a blokkok $B$-től különbözőek.

Átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\sum_i (i-1)(i-2) n_i = 0.$$

Ebből az látszik, hogy $i \neq 1,2$-re $n_i = 0$, amint bizonyítani akartuk. (A harmadik egyenletből az is következik, hogy $n_2 = k(k-1)/2$ és így $n_1 = 2k$.) ■

A most következő definíció a négyzetes blokkrendszer általánosítása. Emlékeztetünk arra, hogy négyzetes (más szóhasználattal szimmetrikus) blokkrendszerben bármely két blokk metszete $\lambda$ volt.

**8.3.8. Definíció.** Egy blokkrendszer *kváziszimmetrikus*, ha létezik két egész szám $\mu_1$ és $\mu_2$, hogy bármely két blokk $\mu_1$ vagy $\mu_2$ pontban metszi egymást. Ezeket a blokkrendszer *metszési számai*nak nevezzük. □

Ezzel a definícióval az előző állítás azt mondja, hogy $\lambda = 2$ paraméterű kvázireziduális blokkrendszer kváziszimmetrikus és $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. A kváziszimmetrikus blokkrendszerek azért érdekesek, mert erősen reguláris gráfot tudunk definiálni segítségükkel.

**8.3.9. Tétel.** *Legyen* $\mathbf{D}$ *kváziszimmetrikus blokkrendszer* $\mu_1, \mu_2$ *paraméterekkel. Legyen a* $\Gamma$ *gráf csúcsainak halmaza* $\mathbf{D}$ *blokkjainak halmaza és kössünk össze két blokkot, ha metszetük* $\mu_2$ *elemű. Ekkor* $\Gamma$ *erősen reguláris.*

*Bizonyítás.* Legyen $M$ a $\mathbf{D}$ blokkrendszer illeszkedési mátrixa, $A$ a tételbeli $\Gamma$ szomszédsági mátrixa. Azt akarjuk belátni, hogy $A^2$ az $A, I, J$ kombinációja. Tegyük fel, hogy $\mu_2 > \mu_1$ (különben áttérhetünk a komplementerre). Ekkor a $\Gamma$ gráf $A$ szomszédsági mátrixa nem más, mint

$$A = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(M^T M - \mu_1 J - (k - \mu_1)I).$$

Mivel $MM^T = nI + \lambda J$, ahol $n = r - \lambda$, így

$$\begin{aligned}(M^T M)^2 &= M^T(nI + \lambda J)M \\ &= nM^T M + \lambda k^2 J.\end{aligned}$$

Ily módon

$$\begin{aligned}(\mu_2 - \mu_1)^2 A^2 = (M^T M)^2 + \mu_1^2 bJ + (k - \mu_1)^2 I - \mu_1(M^T MJ + JM^t M) \\ -2(k - \mu_1)M^T M + 2\mu_1(k - \mu_1)J.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}M^T MJ = rkJ = JM^T M; \\ (M^T M)^2 = nM^T M + \lambda k^2 J, \\ \text{és} \qquad M^T M = (\mu_2 - \mu_1)A + \mu_1 J + (k - \mu_1)I,\end{aligned}$$

azt találjuk, hogy $A^2$ előáll az erősen reguláris gráfoknál megszokott alakban, vagyis

$$A^2 = \alpha I + \beta A + \gamma J.$$

Itt konkrétan

$$\alpha = \frac{1}{(\mu_2-\mu_1)^2}\left(n(k-\mu_1)-(k-\mu_1)^2\right),$$
$$\beta = \frac{1}{(\mu_2-\mu_1)}\left(n-2(k-\mu_1)\right),$$
$$\gamma = \frac{1}{(\mu_2-\mu_1)^2}\left(n\mu_1+\lambda k^2-2\mu_1 rk\right).$$

Tehát $\Gamma$ valóban erősen reguláris. ■

A tételben szereplő $\Gamma$ gráfot a blokkrendszer *blokkgráfjá*nak szokás hívni.

**8.3.10. Következmény.** *Steiner-rendszer blokkgráfja erősen reguláris.* ■

**8.3.11. Tétel. (Hall–Connor)** $\lambda = 2$ *paraméterű kvázireziduális blokkrendszer reziduális, ha* $k \neq 6$.

*Bizonyítás.* Azt már láttuk, hogy egy ilyen blokkrendszer blokkgráfja erősen reguláris, mert a blokkok 1 vagy 2 pontban metszik egymást. Tekintsük azt a gráfot, ahol két blokkot pontosan akkor kötünk össze, ha metszetük egypontú. Ennek a paraméterei $v = r(r-1)/2$, $k = 2(r-2)$, $\lambda = r-2$, $\mu = 4$. A $v,k$-ra vonatkozó állítást a 8.3.7. Tétel bizonyításának a végén láttuk, a $\lambda$-t, $\mu$-t az előző tételből lehet kiolvasni (l. 8.14. feladat). Ezek éppen a $T(r)$ trianguláris gráf paraméterei, és ebből $r \neq 8$ esetén következik is, hogy a gráf izomorf $T(r)$-rel. Eszerint viszont megindexelhetjük a blokkokat az $S = \{1,\dots,r\}$ halmaz kételemű részhalmazaival úgy, hogy két blokk pontosan akkor metszi egymást 1 pontban, ha a megfelelő kételemű halmazok is egy pontban metszik egymást. Bővítsük **D**-t $S$ elemeivel és tegyük hozzá a blokkokhoz $S$-et és minden blokkhoz az őt megindexelő kételemű halmazt. Az eddig elmondottakból könnyű látni, hogy így négyzetes blokkrendszert kapunk $\lambda = 2$-vel és az $S$-re vonatkozó blokkreziduális éppen **D**. ■

**Megjegyzés.** A $k \neq 6$ megszorítás nem szükséges. Connor ugyanis megmutatta, hogy nincsen 2-(21,6,2) paraméterű blokkrendszer.

Hogy a bizonyítás teljes legyen, lássuk be, hogy a trianguláris gráfokat paramétereik meghatározzák.

**8.3.12. Tétel.** *Legyen* $\Gamma$ *egy*

$$\left(\binom{r}{2}, 2(r-2), r-2, 4\right)$$

*paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor* $\Gamma$ *izomorf a trianguláris gráffal, ha* $r > 8$.

*Bizonyítás.* A bizonyítás nagyjából az $L_2(n)$ gráfokra vonatkozó bizonyítást követi, így csak vázoljuk (részletesen l. a 8.18. feladatot). Vegyünk egy $x$

pontot, és tekintsük a $\Gamma(x)$-et. Ez egy $2(r-2)$ csúcsú, $(r-2)$-edfokú reguláris gráf. Legyen $y, z$ ennek két össze nem kötött pontja. Először megmutatjuk, hogy $y, z$ közös szomszédainak $m$ száma $\Gamma(x)$-ben csak 3 vagy 2 lehet. Nyilván $m \leq 3$, hisz $x$ közös szomszéd $\Gamma$-ban. Olyan csúcs amely $y$-nal (ill. $z$-vel) össze van kötve $\Gamma(x)$-ben, de $z$-vel (ill. $y$-nal) nincs, pontosan $r-2-m$ van. Így $\Gamma(x)$-ben $m-2$ olyan csúcs van, amely sem $y$-nal, sem $z$-vel nincs összekötve. Tehát $2 \leq m$. Ha $m = 3$ volna, akkor tekintsük azt a $w$ pontot, amely sem $y$-nal, sem $z$-vel nincs összekötve. Mivel minden $w$-vel összekötött csúcs $y$-nal vagy $z$-vel össze van kötve, így $r - 2 \leq 3 + 3$, ellentmondás.

Eszerint $m = 2$ mindig, azaz $\Delta = \bar{\Gamma}(x)$ nem tartalmaz háromszöget. Azt se nehéz látni, hogy $\Delta$ páros gráf, részletesen l. 8.18. feladat.

Ez azt jelenti, hogy minden $x$-re $\Gamma(x)$ két nagy $(r-2$ méretű) klikket tartalmaz. Vegyük hozzá ezekhez az $x$-et. Így minden csúcs benne van pontosan két „nagy" klikkben, melyeknek mérete $r-1$. Ugyanez az okoskodás mutatja, hogy minden él benne van egy nagy klikkben.

A nagy klikkek száma $2\binom{r}{2}/(r-1) = r$. Mivel bármely két nagy klikknek legfeljebb egy közös csúcsa van, így pontosan egy van. Ha a „nagy" klikkeket pontoknak, a csúcsokat blokkoknak tekintünk, akkor egy 2-$(r,2,1)$ blokkrendszert kapunk, amely nem lehet más, mint az összes pár alkotta blokkrendszer, ami megadja az izomorfizmust $\Gamma$ és a trianguláris gráf között. ■

Jegyezzük meg, hogy igazából elegendő az $r \neq 8$ feltétel is, az $r \leq 7$ esetek elintézhetők (l. 8.15. feladat).

Minden bisík legalább egy reziduális blokkrendszert határoz meg, s ahhoz a blokkrendszerhez tartozik egy blokkgráf. Noha a gráfok egy végtelen családhoz tartoznak, bisíkok, mint láttuk csak a $k = 3,4,5,6,9,11$ és 13 értékekre ismertek. A $k = 5$-ös bisík Hadamard-féle, blokkgráfja a Petersen-gráf.

Még egy olyan nevezetes blokkrendszer-osztály van, amely kváziszimmetrikus. Nevezetesen ha egy **D** 3-rendszer bővítése egy **E** négyzetes blokkrendszernek, akkor ilyen (l. 8.16. feladat). Ha visszaemlékszünk, akkor a Cameron-tétel (7.1.9) bizonyítása ezt az észrevételt használta.

Ebben a szakaszban több olyan tételt is láttunk, hogy bizonyos gráfokat a paramétereik meghatároznak. Azonban az is tipikus volt, hogy bizonyos kivételes paraméterekre ez nem volt igaz. Most egy olyan konstrukciót lássunk, amely mind a négyzetháló, mind a trianguláris gráf esetében alkalmas a kivételes példák előállítására.

A konstrukció az ú. n. *switching*: Legyen $Y$ a $\Gamma$ gráf csúcsainak egy halmaza. Ha két pont egyike $Y$-beli, másika nincs $Y$-ban, akkor cseréljük meg összekötöttségüket (ha tehát él volt köztük, akkor ne legyen, ha viszont nem volt, akkor kössük őket össze). Ne változtassunk semmit azon párok esetén, ahol mindkét csúcs $Y$-beli, vagy egyik sem.

Nyilvánvaló, hogy az $Y$-ra vonatkozó switching azonos a $V(\Gamma)\backslash Y$-ra vonatkozóval, továbbá ha előbb $Y_1$-re majd $Y_2$-re végezzük el a switchinget, akkor

az ugyanaz, mintha $Y_1 \triangle Y_2$-re végeznénk el egyszerre. Ily módon a switching ekvivalencia-relációt hoz létre. A switching-et lényegében Seidel vezette be, és vizsgálta először szisztematikusan. A motiváció az ú. n. 2-gráfok témaköre volt, melyet G. Higman talált ki a $Co_3$ sporadikus egyszerű csoport 2-tranzitív hatásának vizsgálatára. Később Seidel, Taylor és mások vizsgálták behatóan. A 2-gráfok $k$-reguláris gráfok (mint 1-$(n,2,k)$-rendszerek) bővítésével vannak kapcsolatban, bővebben l. a 8.31. feladatsort.

**8.3.13. Példa.** Lássuk, hogyan kaphatjuk meg az ú. n. *Shrikhande-gráfot.* Ezt az $L_2(4)$ négyzetháló gráfból kaphatjuk meg switching segítségével, ha $Y$-nak a négy diagonális pontot választjuk. A Shrikhande-gráf paraméterei ugyanazok, mint az $L_2(4)$-é.

**8.3.14. Példa.** Most a $T(8)$ trianguláris gráfból induljunk ki. Mivel a trianguláris gráfok csúcsai egy nyolcelemű halmaz kételemű részhalmazai, az $Y$ halmaz pontjait tekinthetjük egy a nyolc ponton értelmezett gráfnak is, ha minden párt egy élnek gondolunk. Ily módon $Y$-nak az alábbi három gráf választható:

(1) egy 1-faktor (négy diszjunkt él);

(2) egy nyolc hosszú kör, végül

(3) egy diszjunkt ötszög és háromszög.

Mindegyik esetben a $T(8)$-éval azonos (28,12,6,4) paraméterű erősen reguláris gráfot kapunk. Ennek ellenőrzése a 8.30. feladat.

A fenti példák mutatják, hogy $L_2(4)$ és $T(8)$ esetén nem véletlenül nem működött a karakterizációs tételek bizonyítása.

Fejezzük be ezt a fejezetet egy a témakörre nézve tipikus tétellel.

**8.3.15. Tétel. (Seidel)** *Azon erősen reguláris gráfok, melyeknek legkisebb sajátértéke $-2$, a következők:*

*(a) $T(m)$ trianguláris gráf, $m \geq 5$;*

*(b) $L_2(m)$ négyzetháló gráf, $m \geq 3$;*

*(c) $CP(m)$ koktélpartigráf, $m \geq 2$;*

*(d) a Petersen-gráf;*

*(e) a Clebsch-gráf komplementere;*

*(f) a Schläfli-gráf komplementere;*

*(g) a Shrikhande-gráf;*

*(h) a három Chang-gráf.*

A tételben szereplő gráfokat egy kivétellel már ismerjük, ez a kivétel a Schläfli-gráf, mellyel a következő szakaszban a szélmalom-tételben fogunk megismerkedni.

## 8.4. Erősen reguláris gráfokkal kapcsolatos tételek

**8.4.1. Tétel.** („Szélmalom-tétel") *Legyen* $\Gamma$ *olyan nemüres gráf, amelyre az alábbi megszorítás teljesül:*

$(*)$ *Bármely* $\{x, y\}$ *él benne van olyan* $\{x, y, z\}$ *háromszögben, amely azt tudja, hogy minden további csúcs* $x, y, z$ *közül pontosan eggyel van összekötve.*

*Ekkor* $\Gamma$ *az alábbi gráfok valamelyike:*

*(a) egy csúcsról lelógó háromszögek uniója („szélmalom"),*

*(b) három speciális gráf valamelyike, ahol a csúcsok száma 9, 15, illetve 27.*

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy $\Gamma$-nak nincs olyan csúcsa, amely minden további csúccsal össze lenne kötve, mert akkor szélmalmunk kell legyen.

Ez a kiinduló észrevétel az általános esetben is: legyen $x$ a legnagyobb fokú csúcs. Az $\{x\} \cup \Gamma(x)$ által feszített részgráf szélmalom. Máris következik, hogy $x$ foka páros, azaz $\deg(x) = 2u$ $(u \geq 1)$. Ha $u = 1$, akkor minden csúcs foka 2, és a gráf diszjunkt körök uniója. A feltételek miatt ez csak úgy lehet, ha egyetlen háromszögünk van, amit viszont fentebb kizártunk. Tehát $u \geq \geq 2$. Sorszámozzuk meg az $x$-ről lelógó háromszögeket: $T_1, \ldots, T_u$, és legyen $T_i = \{x, y_{i,0}, y_{i,1}\}$, $(i = 1, \ldots, u)$.

Tekintsünk most egy olyan $z \neq x$ csúcsot, amely nincs összekötve $x$-szel. A $(*)$ feltétel szerint $z$ az $y_{i,0}$ és $y_{i,1}$ közül pontosan az egyikkel van összekötve minden $i = 1, \ldots, u$-ra. Így a $z$ pontot jellemezhetjük egy $u$ hosszú 0–1 vektorral, amelynek $i$-edik koordinátája $\varepsilon$, ha $z$ az $y_{i,\varepsilon}$-nal van összekötve. Jelöljük ezt a vektort $\mathbf{v}(z)$-vel. Ezeknek a $\mathbf{v}(z)$ vektoroknak az alábbi tulajdonságai vannak ($z$ mindig $x$-szel össze nem kötött csúcsot jelöl):

(1) Ha $z$ és $z'$ szomszédos, akkor $\mathbf{v}(z)$ és $\mathbf{v}(z')$ pontosan egy pozícióban egyezik meg.

(2) Ha $z$ és $z'$ nem szomszédos, de van olyan közös szomszédjuk, amely nincs összekötve $x$-szel, akkor $\mathbf{v}(z)$ és $\mathbf{v}(z')$ pontosan két pozícióban nem egyezik meg.

(3) Ha $z$ és $z'$ nem szomszédos és minden közös szomszédjuk össze van kötve $x$-szel, akkor $\mathbf{v}(z)$ és $\mathbf{v}(z')$ megegyezik.

Lássuk mondjuk (1) bizonyítását: Ebben az esetben a $z$ és $z'$ össze vannak kötve, így $z, z'$ benne vannak egy olyan háromszögben, amelynek valamelyik csúcsával $\Gamma$ minden pontja össze van kötve, így $x$ is. Mivel $x$ sem $z$-vel, sem $z'$-vel nincs összekötve, így a háromszög harmadik csúcsa kell $x$ valamelyik

szomszédja, mondjuk $y_{i,\varepsilon}$ legyen. $z$-nek és $z'$-nek nem lehet több közös szomszédja, hiszen az a $z, z', y_{i,\varepsilon}$ háromszög két csúcsával is össze lenne kötve. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v}(z)$ és $\mathbf{v}(z')$ pontosan az $i$-edik pozícióban egyezik meg.

Teljesen hasonlóan bizonyítható (2) és (3) is (l. 8. 1-2. feladatokat).

Tegyük fel, hogy $u \geq 3$. Válasszunk egy $z \notin \Gamma(x)$ pontot. Ekkor $z$ a $\Gamma(x)$-nek pontosan $u$ pontjával van összekötve, és ezek a szomszédok egymással nincsenek összekötve. Mivel $z$ szomszédai is valahány $z$-ről „lelógó" háromszöget alkotnak, így $\deg(z) = 2u$ és $z$-nek pontosan $u$ olyan szomszédja van, amelyek nincsenek $\Gamma(x)$-ben. Válasszunk ezek közül egyet, mondjuk $z'$-t. Megismételve ezt az eljárást $z'$-re, válasszuk ki annak egy ($z$-től különböző) $z''$ szomszédját, ami nincs $\Gamma(x)$-ben. Az (1) bizonyításában használt gondolatmenet (vagy maga (1)) azonnal adja, hogy $z$ és $z''$ nem lehetnek összekötve. Végül válaszszunk egy negyedik $z'''$ pontot, amely $z''$-vel van összekötve. A $z, z', z'', z'''$ út szomszédos pontjaihoz tartozó vektorok pontosan egy koordinátában egyeznek meg. Legyenek ezek a koordináták az $i$-edik $z, z'$ esetén, a $j$-edik $z', z''$ esetén, végül a $k$-adik $z'', z'''$ esetén. Jegyezzük meg, hogy itt $i, j, k$ különbözőek. Mivel (1), (2), (3) az összes lehetőséget kimerítik és a $z$-hez és $z'''$-höz rendelt vektor csupán ezen három koordinátában egyezik meg, így csak $u = 3$ vagy $u - 2 = 3$ lehet.

Összefoglalva, $u = 2,3,5$ lehet csak.

Mindhárom esetben elegendő információnk van ahhoz, hogy rekonstruáljuk (egyértelműen) a gráfot. Először is jegyezzük meg, hogy a gráfok $2u$-adfokú regulárisak, mint azt már lényegében láttuk a bizonyítás során. $u = 2$-re a gráf $L_2(3) = K_3 \oplus K_3$, vagyis a csúcsok egy $3 \times 3$-as mátrix elemei, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha egy sorban vagy egy oszlopban vannak. $u = 3$-ra a csúcsok egy 6-elemű halmaz kételemű részhalmazai, két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő halmazok diszjunktak. Természetesen nemcsak azt kell ellenőriznünk, hogy ezek a gráfok kielégítik a feltételt, hanem az egyértelműséget is (l. 8.3. feladat). Végezetül az $u = 5$ esetben annyit jegyzünk meg, hogy a $\mathbf{v}(z)$ vektorok pontosan azok a vektorok lesznek, amelyekben páros sok 1-es szerepel. Eszerint gráfunk 1+10+16=27 pontú lesz. Ezt a gráfot *Schläfli-gráf*nak nevezzük (l. 8.4. feladat). ■

A szereplő kivételes gráfok mind regulárisak, sőt ennél több is teljesül: a $(*)$ feltételben szereplő háromszög egyértelmű, azaz minden él pontosan egy háromszögben van benne. Hasonlóan azt is láttuk a bizonyítás során, hogy két össze nem kötött pontnak pontosan $u$ közös szomszédja van.

Eszerint a 8.4.1. Tétel azt mondja, hogy $(6u-3, 2u, 1, u)$ paraméterű erősen reguláris gráfok csak az $u = 2,3,5$ esetben léteznek és a gráfok egyértelműek. Valóban, ez a korábbi ismereteinkből következik.

Nézzük, mit ad a 8.1.11 feltétel a szélmalom-tétel következményére. A gráfokra $n = 6u - 3$, $k = 2u$, $\lambda = 1$, $\mu = u$ volt. 8.1.11 szerint

$$3u - 2 \mp \frac{(3u-1)(u-2)}{u+1}$$

nemnegatív egész kell legyen. Ebből könnyen látszik, hogy $u+1$ osztja 12-t, azaz $u = 2,3,5$ vagy 11 lehet. Az első három eset, mint tudjuk elő is fordul, a negyediket az abszolút korlát (l. 8.2.3) zárja ki.

Egy szintén erősen reguláris gráfokkal kapcsolatos kérdést old meg az alábbi tétel:

**8.4.2. Tétel.** („Barátság-tétel") *Tegyük fel, hogy egy $n$ emberből álló közösségben bármely két embernek pontosan egy közös barátja van. Ekkor $n$ páratlan, és valamennyi $n \geq 3$ páratlan számra van is ilyen gráf: a $v_1$ ember mindenkinek a barátja, a többiek közül pedig $v_{2i}$ és $v_{2i+1}$ barátok (minden $i$-re) és más nem.*

*Bizonyítás.* Legyen $G$ a gráfunk, és minden $x \in G$-re tekintsük az $x$ szomszédainak $G(x)$ halmazát. Ha $u$ és $v$ két különböző pont, akkor ezeket pontosan egy $G(x)$ fogja tartalmazni, mégpedig a közös szomszédjukhoz tartozó. Így $(V(G), \{G(x) : x \in V(G)\}$ lineáris tér, melyre $v = b$. Ha ez a lineáris tér degenerált, akkor van egy $|V(G)| - 1$ pontú halmaz (ez lesz $G(v_1)$), a többi halmaz kételemű, ami azt jelenti, hogy a $v_1$-et és a belőle kiinduló éleket törölve egy diszjunkt élekből álló gráfot kapunk. Ez pontosan az, amit a tétel állít. Ha a lineáris tér projektív sík, akkor a $G$ szomszédsági mátrixa ennek egy olyan szimmetrikus illeszkedési mátrixa lenne, amelynek főátlójában csupa nulla állna. Más szóval ez egy olyan polaritást jelentene, aminek nincs autokonjugált pontja (vö. a 7.1. szakasszal). A 7.2.5. Következmény miatt ez nem lehetséges. ■

Lássunk egy olyan bizonyítást is a barátság-tételre, amely nem a lineáris terekre, hanem az erősen reguláris gráfokról tanultakra épít. Ezt csak vázlatosan nézzük meg. Ugyanakkor a bizonyítás lényege megegyezik az előzőével. Először is nem nehéz belátni, hogy a feltételeknek megfelelő gráfban két nem összekötött csúcs foka azonos (és így persze a gráf reguláris, ha nincs olyan pont, ami minden más ponttal össze lenne kötve). Ehhez legyen $x, y$ két nem összekötött csúcs, $u$ ezek közös szomszédja, $u_x$, illetve $u_y$ pedig $x$ és $u$, illetve $y$ és $u$ közös szomszédja. Ha tekintjük $G(x) \setminus \{u, u_x\}$-et és $G(y) \setminus \{u, u_y\}$-t, akkor ezen két halmaz minden egyes pontjából pontosan egy él megy a másikba. Tehát ezen halmazok egyforma elemszámúak, és így $x$ és $y$ foka azonos. Ha van olyan pont, ami minden más ponttal össze van kötve, akkor gráfunk a szélmalomgráf, különben van egy $\lambda = \mu$-nek eleget tevő er osen reguláris gráf. Ilyen gráfokra láttuk, hogy $k \leq \lambda(\lambda + 1)$, azaz $k \leq 2$ és a gráf csak a háromszög lehet. ■

A tétel ezen a néven Wilf egy 1971-es dolgozatában szerepel G. Higmanra, mint forrásra való hivatkozással. Valószínűleg az igazi forrás Erdős, Rényi és

T. Sós 1966-os „On a problem of graph theory" c. dolgozata, amely hasonló, sőt némileg általánosabb extremális kérdésekkel foglalkozik (*Studia Sci. Math. Hung.* **1** (1966), 215–235). Az említett dolgozat néhány állítását feladatként is megtalálhatjuk a jelen fejezet végén. A tételre elemi (lineáris algebrát nem használó) bizonyítások is születtek, többek között Hammersley, Brunat és Huneke adott ilyet. A legelegánsabb ilyen bizonyítás Hunekeé [35].

Folytassuk ezt a fejezetet egy különösen szép gráffal, mellyel valószínűleg gráfelméletből már találkoztunk 5 bőségű $r$-reguláris gráfoknál. Ez az előbb említett Erdős–Rényi–T. Sós dolgozat kérdéséhez is szorosan kapcsolódik.

**8.4.3. Tétel.** 5 *bőségű* $r$ *reguláris gráfnak legalább* $r^2+1$ *csúcsa van. Ha itt egyenlőség van, akkor* $r = 2,3,7$ *vagy* 57 *lehet.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy csúcsot. Ennek $r$ szomszédja van, amelyek mind különbözőek. Mivel a gráf 5 bőségű, ezen szomszédok szomszédai is páronként különbözőek, vagyis valóban van $1+r+r(r-1) = r^2+1$ csúcs legalább. Két összekötött csúcsnak nyilván nincs közös szomszédja, mert akkor lenne háromszög. Ha viszont két összekötetlen pontot tekintünk, akkor az előző okoskodásban az egyenlőség azt jelenti, hogy a második csúcs az elsőnek másodszomszédja. Akkor viszont az első csúcsnak pontosan egy olyan szomszédja van, amelynek a második csúcs szomszédja. Tehát a gráf erősen reguláris, paraméterei: $n = r^2+1$, $k = r$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Az integralitási feltétel azonnal adja, hogy $r = 2,3,7$ vagy 57 lehet csak. ■

Az $r = 57$ eset mind a mai napig megoldatlan, $r = 2$-re az ötszög, $r = 3$-ra a Petersen-gráf az (egyértelmű) megoldás. $r = 7$-re a következő ú. n. *Hoffmann–Singleton-gráf*: azonosítsuk PG(3,2) egyeneseit egy 7 elemű halmaz rendezetlen hármasaival oly módon, hogy két egyenes pontosan akkor legyen metsző, ha a megfelelő hármasoknak pontosan egy közös eleme van. A $\mathcal{H}$ gráf csúcsai a PG(3,2) 15 pontja és 35 egyenese (azaz a gráfunk tényleg 50 pontú). A pontok páronként nem illeszkednek, egy pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha PG(3,2)-ben rajta van, két egyenes pedig akkor van összekötve, ha a nekik megfeleltetett hármasok diszjunktak. A 8.20. feladatban ellenőrizhetjük, hogy így tényleg (50,7,0,1) paraméterű erősen reguláris gráfot kaptunk. A Hoffmann–Singleton-gráf egy ettől különböző előállítását részletesen megtalálhatjuk [7]-ben.

A 6 bőségű eset ennél egyszerűbb, ekkor a következő igaz.

**8.4.4. Tétel.** (Kárteszi) 6 *bőségű* $r$ *reguláris gráfnak legalább* $2(r^2-r+1)$ *csúcsa van. Ha itt egyenlőség van, akkor a gráf egy* $q = r-1$ *rendű projektív sík illeszkedési gráfja, és persze megfordítva.*

*Bizonyítás.* Induljunk ki egy élből, és kezdjük el ennek két végpontjából (két irányban) felépíteni a gráfot. Mivel a bőség hat, ezért a két végpont szomszédai és a szomszédok szomszédai is különbözőek. Ez mindkét oldalon

$1+(r-1)+(r-1)^2$ pont, amiből az egyenlőtlenség következik. Ha itt egyenlőség van, akkor megszínezhetjük jól a csúcsokat két színnel (ennek ellenőrzése a 8.42. feladat). Mivel gráfunk nem tartalmaz négy hosszú kört, alkalmazhatjuk Reiman 8.4.5. Tételét, ami azt adja, hogy a gráf projektív sík illeszkedési gráfja kell legyen. (Csak emlékeztetőül, az illeszkedési gráf egyik osztálya a pontoknak, a másik az egyeneseknek felel meg, az élek a pont-egyenes illeszkedéseket jelentik). Esetünkben az élek száma $r(r^2 - r + 1)$, ami pont egyenlőséget ad a következő 8.4.5. Tételben. ■

A teljesség kedvéért lássuk az előző bizonyítás végén használt Reimann-tételt, a gráfos megfogalmazásban. Elsőben tanultunk (l. Elekes [20]) egy Erdőstől származó becslést négy hosszú kört nem tartalmazó gráfok élszámáról. Abban az esetben, ha $n$ csúcsú egyszerű gráf helyett olyan páros gráfokra szorítkozunk, amelyek mindkét osztályában $n$ csúcs van, a szereplő korlát éles lesz. A probléma ezen változatát Zarankiewicz problémájának szokták nevezni.

**8.4.5. Tétel.** (Reiman) *Legyen $G$ olyan (egyszerű) páros gráf, amelynek mindkét osztályában $n$ csúcs van és nincs benne négy hosszú kör. Ekkor az élek száma legfeljebb*

$$\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3}),$$

*és egyenlőség esetén a páros gráf projektív sík illeszkedési gráfja.*

*Bizonyítás.* Számoljuk meg a „cseresznyéket" (egy csúcsból kiinduló élpárokat, vagy V-betűket) a páros gráfban. Mivel páros gráfban ez csak úgy helyezkedhet el, hogy a két élvégpont azonos osztályban van, a

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x)(\deg(x) - 1) \leq 2n(n-1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Felhasználva, hogy $\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2e$, ahol $e$ az élek számát jelenti, valamint alkalmazva a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget (vagy az $x(x-1)$ konvex függvényre a Jensen-egyenlőtlenséget), az

$$e^2 - en - n^2(n-1) \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből valóban a tételbeli egyenlőtlenség következik $e$-re. Ha egyenlőség van, akkor egyrészt a páros gráf reguláris, másrészt bármely két, egy osztályban levő ponthoz pontosan egy közös szomszéd van a páros gráf másik osztályában. Ez pont a projektív síkok első két axiómája. A projektív sík a gráf regularitása miatt $r > 2$-re nem lehet degenerált. ■

Gyorsan ellenőrizzük, hogy projektív sík illeszkedési gráfjára tényleg egyenlőség van: $n = q^2+q+1$, $e = (q^2+q+1)(q+1)$, azaz a becslés $\frac{q^2+q+1}{2}(1+2q+1)$,

így valóban fennáll az egyenlőség. Reiman-tételének egy lineáris algebrai jellegű bizonyítását megtalálhatjuk Kárteszi könyvében, valamint a [6] cikkben, ahol a Zarankiewicz problémával kapcsolatban számos további állítás, feladat található.

## 8.5. Távolságreguláris gráfok

Ebben a fejezetben az erősen reguláris gráfok egy általánosításával foglalkozunk. Ez a fejezet nagyon vázlatos lesz, a témakörről a Brouwer, Cohen és Neumaier által írt *Distance regular graphs* című monográfiából [13] tudhatunk meg többet. Idézzük fel, hogy egy gráf két csúcsának távolsága a köztük levő legrövidebb út hossza (azaz élszáma).

**8.5.1. Definíció.** Egy gráf *csúcs-tranzitív*, ha automorfizmuscsoportja a csúcsokon tranzitív. A gráf *távolságtranzitív*, ha bármely olyan $(u, v)$ és $(x, y)$ pontpárra, amelyek távolsága ugyanaz (tehát $d(x, y) = d(u, v)$), van olyan $\gamma$ automorfizmus, amelyre $\gamma(u) = x, \gamma(v) = y$. □

Jegyezzük meg, hogy a távolságtranzitivitás gyengébb, mint a csúcsokon való 2-tranzitivitás (persze, mert akkor a gráf teljes volna). Arra sem nehéz példát mutatni, hogy a csúcstranzitivitásból nem következik a távolságtranzitivitás (l. 8.35. feladat).

A most következő definíció a távolságreguláris gráfok elképzelését segíti, a csúcsokat a szélességi bejárás szerint csoportokra osztva. Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben csak összefüggő gráfokat vizsgálunk.

**8.5.2. Definíció.** Egy (összefüggő) $\Gamma$ gráf átmérője a csúcsai között előforduló legnagyobb $d$ távolság. Legyen $v$ a $\Gamma$ egy csúcsa és legyen

$$\Gamma_i(v) = \{w \ : \ d(v, w) = i\},$$

ahol $0 \leq i \leq d$. A $\Gamma_0(v), \Gamma_1(v) \ldots, \Gamma_d(v)$ halmazok a $\Gamma$ $v$-re vonatkozó távolságpartícióját adják. □

Nem nehéz belátni (l. a 8.36. feladatot), hogy egy összefüggő, $d$ átmérőjű $\Gamma$ gráf pontosan akkor távolságtranzitív, ha csúcstranzitív és bármely $v$ csúcs stabilizátora tranzitív az adott $v$ csúcshoz tartozó távolságpartíció $\Gamma_i(v)$ halmazain $i = 1, \ldots d$-re.

Definiáljuk a következő paramétereket.

**8.5.3. Definíció.** Legyen $\Gamma$ távolságtranzitív gráf, $u$ és $v$ két (tetszőleges) csúcsa, amelyekre $d(u, v) = k$.

Jelölje $p_{i,j}^k$ azon csúcsok számát, amelyek $u$-tól $i$, $v$-től pedig $j$ távolságra vannak. A távolságtranzitivitás miatt ez nyilván nem függ $u, v$ választásától. ezeket a számokat *metszési szám*nak szokták nevezni. Az is világos, hogy $(*)$ $p_{i,j}^k = 0$, ha $i + j < k$, vagy ha $|i - j| > k$, és $p_{i,j}^{i+j} > 0$.

Ezek közül a paraméterek közül néhány fontos szerepet játszik, így ezekre egyszerűbb jelölést alkalmazunk. Legyen $a_i = p_{i,i}$, $b_i = p_{i+1,1}^i$ és $c_i = p_{i-1,1}$. Legyen továbbá $k_i = p_{i,i}^0$. A most bevezetett paraméterekre fennáll, hogy $c_i k_i = b_{i-1} k_{i-1}$, továbbá az, hogy $b_0 \geq b_1 \geq \ldots, b_{d-1}$, és $c_1 \leq \ldots c_d$. Azt se nehéz látni, hogy $c_j \leq b_{d-j}$. A $b_i$ és $c_j$ számok sorozatát szokták a távolságtranzitív gráfok metszési tömbjének nevezni. Szokták a $c$, $a$, $b$ paramétereket egy $3 \times (d+1)$-es tömbbe (mátrixba) írni. Ekkor az első sor első és az utolsó sor utolsó eleme helyett $*$ áll, mert ezek nem értelmesek.

Abban az esetben, ha a gráf nem feltétlen távolságtranzitív, de a fent bevezetett paraméterek jól definiáltak (nem függnek a csúcsok választásától), a gráfot *távolságreguláris*nak nevezzük. □

Vegyük észre, hogy a $d = 2$ esetben a távolságreguláris gráfok éppen az összefüggő erősen reguláris gráfok.

A távolságregularitást egy másik, szintén az erősen reguláris gráfok általánosításaként tekinthető struktúrával, az asszociációs sémákkal is kapcsolatba hozhatjuk. Mi csak a szimmetrikus esetet vizsgáljuk röviden.

**8.5.4. Definíció.** *$d$ osztályú asszociációs séma*nak nevezünk egy $X$ alaphalmazt a rajta értelmezett $d + 1$ relációval, ha ezekre az $R_i$, $(i = 0,1,\ldots,d)$ relációkra az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. $\{R_0, R_1, \ldots, R_d\}$ az $X \times X$ partíciója,
2. $R_0 = \{(x, x) : x \in X\}$ a diagonális,
3. az $R_i$-k szimmetrikusak, azaz $(x, y) \in R_i$ esetén $(y, x) \in R_i$, minden $i$-re és $x, y \in X$-re,
4. bármely $(x, y) \in R_k$-ra azon $z \in X$-el száma, amelyekre $(x, z) \in R_i$ és $(z, y) \in R_j$ egy $p_{i,j}^k$-val jelölt állandó, amely csak $i, j, k$-tól függ, az $x, y$ választásától nem.

Jelölje $n$ $|X|$-et, és legyen $n_i = p_{i,i}^0$. Ekkor $(X, R_i)$ egyszerű gráfot ad meg, amelyben minden pont foka $n_i$. □

A $p_{i,j}^k$ konstansokat itt is (az asszociációs séma) metszési számainak nevezzük. Ez a definíció Bose és Shimamoto definíciója, Delsarte ennél általánosabb sémákat definiált, ő a fentieket szimmetrikus asszociációs sémának nevezte.

Azt mondhatjuk tehát, hogy az erősen reguláris gráfokból az $R_i$ relációt úgy definiálhatjuk, hogy $(x,y) \in R_i$ pontosan akkor legyen, ha $d(x,y) = i$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy így asszociációs sémát kapunk. Megfordítva, ha egy asszociációs séma metszési számaira a 8.5.3. Definícióban szereplő $(*)$ feltételek teljesülnek, akkor az $R_1$ reláció távolságreguláris gráfot definiál (l. 8.37. feladat).

A bevezetett metszési számokra egyszerű leszámlálás ad további összefüggéseket. Az állításban $\delta_{ij}$ a szokásos, vagyis $\delta_{ij} = 0$, ha $i$ és $j$ különbözők, $\delta_{ij} = 1$, ha azonosak.

**8.5.5. Állítás.** *Asszociációs séma metszési számaira*

1. $p^k_{0,j} = \delta_{jk}$, $p^0_{i,j} = \delta_{ij} n_j$, $p^k_{i,j} = p^k_{j,i}$,
2. $\sum_i p^k_{i,j} = n_j$, $\sum_j n_j = n$,
3. $p^k_{i,j} n_k = p^j_{i,k} n_j$,
4. $\sum_l p^l_{i,j} p^m_{k,l} = \sum_l p^l_{k,j} p^m_{i,l}$.

Bevezethetjük az $L_i$, $i = 0, \dots d$, metszési mátrixokat, amelyeket az

$$(L_i)_{kj} = p^k_{i,j}$$

összefüggés definiál. Ezekre $L_0 = I$, és $L_i L_j = \sum_k p^k_{i,j} L_k$. Ennek ellenőrzése is része a 8.38. feladatnak.

Lássunk néhány példát távolságtranzitív gráfokra.

**8.5.6. Példa.** A $H(d,q)$ *Hamming-gráf* csúcsai $Q^d$ elemei, ahol $|Q| = q$. Két csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő $d$ hosszú sorozatok egyetlen koordinátában térnek el (Hamming távolságuk 1, l. majd a kódos fejezetben). A $q = 2$ esetben a hiperkockát kapjuk. A gráf paraméterei $c_i = i$, $b_i = (q-1)(d-i)$, átmérője $d$.

**8.5.7. Példa.** Legyen $|X| = n$. A $J(n,m)$ *Johnson-gráf* csúcsai az $X$ halmaz $m$ elemű részhalmazai, két csúcsot ($m$ elemű részhalmazt) él köt össze, ha metszetük $m-1$ elemű. Ezek tehát a trianguláris gráf általánosításai, $J(n,2) = T(n)$. A paraméterek: $c_i = i^2$, $b_i = (m-i)(n-m-i)$, az átmérő pedig $m$ és $n-m$ minimuma.

Be szokták vezetni a *Kneser*-gráfokat is, amelyekben a $J(n,m)$ gráf maximális távolságú csúcsait köti össze él. Ez tehát azt jelenti, hogy két összekötött csúcs két diszjunkt $m$ elemű részhalmaznak felel meg, ha $n \geq 2m$, és $n < 2m$-re két olyan részhalmaznak, amelyeknek $2m - n$ közös pontja van. Nyilván a komplementerképzés izomorfizmust ad meg, mind a Johnson, mind a Kneser-gráfok esetén, azaz $n \geq 2m$ mindig feltehető.

A harmadik nevezetes példánk a Johnson-gráfok vektortér megfelelői ($q$-analógjai).

**8.5.8. Példa.** Legyen $V$ $n$-dimenziós vektortér $\mathrm{GF}(q)$ felett. A $Gr(n,m)$ *Grassmann-gráf* csúcsai $V$ $m$-dimenziós alterei, két alteret él köt össze, ha metszetük $(m-1)$-dimenziós. A gráf paraméterei

$$c_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}^2, \quad b_i = q^{2i+1} \begin{bmatrix} m-i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-m-i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt persze $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ a korábban bevezetett Gauss-féle binomiális együtthatót jelöli, az átmérő itt is $m$ és $n-m$ minimuma.

A fenti három osztály közös tulajdonsága, hogy egyrészt átmérőjük tetszőlegesen nagy lehet, másrészt nemcsak távolságregulárisak, hanem távolságtranzitívak is. Olyan gráfcsaládra példát, ahol az átmérő tetszőlegesen nagy lehet, de a gráf nem távolságtranzitív, Van Dam és Koolen adtak. Ezen gráfok paraméterei megegyeznek a Grassmann-gráfok paramétereivel, így nevezhetjük őket *csavart Grassmann-gráf*oknak is. A konstrukciót l. [54].

Jegyezzük meg, hogy valamennyi osztályból asszociációs sémát is származtathatunk, ahogy azt általában is láttuk. Ezek neve a megfelelő gráféval egyezik meg, tehát beszélünk pl. Hamming sémáról.

Befejezésül említsük meg, hogy Bang, Dubickas, Koolen és Moulton belátták Bannai és Ito sejtését: *adott $k > 2$ fokszámra csak véges sok távolságreguláris gráf van.*

A fejezet végén nagyon vázlatosan nézzük meg (inkább csak érzékeltetjük), hogy a lineáris algebrai eszközök itt is használhatóak. Ehhez emlékeztetünk arra, hogy $A^t$ elemei a csúcspárok közti $t$ hosszú sétáknak felelnek meg. Szokás szerint $A$ a (távolságreguláris) gráf szomszédsági mátrixa. Legyen továbbá $A_i$ az $i$-távolság gráf szomszédsági mátrixa, vagyis egy pozícióban pontosan akkor legyen 1, ha a megfelelő csúcsok távolsága $i$. Ezekre $A_0 = I$ és persze $A_0 + A_1 + \ldots A_d = J$. Ekkor a következőket láthatjuk. Valamennyi bizonyítást feladatnak hagyjuk.

**8.5.9. Állítás.** *Ha $\Gamma$ összefüggő, átmérője $d$, akkor $I, A, \ldots A^d$ lineárisan függetlenek.*

A metszési mátrix elemeit felhasználva könnyen kapjuk az alábbi állítást is.

**8.5.10. Állítás.** *Ha $\Gamma$ távolságreguláris, akkor $AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}$, $i = 1, \ldots, d-1$. $AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_dA_d$ és hasonlóan $AA_0 = a_0A_0 + c_1A_1$. Ebből azonnal következik, hogy $A_i$ az $A$-nak $i$-edfokú polinomja.*

**8.5.11. Tétel.** *Ha $\Gamma$ távolságreguláris gráf, a csúcsok foka $k$, az átmérő $d$, akkor $A_0, \ldots, A_d$ bázisa az $A$ adjacencia algebrájának (vagy más néven* Bose-Mesner algebrájá*nak), amely $A$ hatványainak lineáris kombinációiból áll. Tehát az algebra $(d+1)$-dimenziós, így $I, A_1 = A, \ldots, A^d$ is bázis.*

Az eddigiekből az következik, hogy $A$ minimálpolinomja pontosan $d+1$-edfokú. Mivel $A$ diagonalizálható, a minimálpolinom minden gyöke egyszeres, azaz $d$ átmérőjű távolságreguláris gráfnak pontosan $d+1$ különböző sajátértéke van. Tekintsük az $A$-val való szorzást a Bose-Mesner algebra lineáris transzformációjaként. Ha $A$-t az $I, A_1 = A, \ldots, A^d$ bázisban írnánk fel, akkor olyan $(d+1)\times(d+1)$-es mátrixot kapnánk, amelynek karakterisztikus polinomja éppen $A$ minimálpolinomja. Ha viszont az $A_0, \ldots, A_d$ bázisban írjuk fel, akkor 8.5.10. Tétel miatt a tridiagonális

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k & a_1 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & c_3 & \ldots & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & b_{d-2} & a_{d-1} & c_d \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{d-1} & a_d \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. Mivel ez az $A$-val való szorzás mátrixa egy másik bázisban felírva, a sajátértékeket ebből a tridiagonális mátrixból is kiszámolhatjuk. Ha megvannak a sajátértékek, akkor az erősen reguláris gráfokra vonatkozó integralitási feltételhez hasonlóan egyenletrendszert írhatunk fel a multiplicitásokra abból, hogy mi $\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(A^2), \ldots$, vagyis távolságreguláris gráfokra is lehet integralitási feltételt találni. Természetesen ez nehezebb, mint erősen reguláris gráfokra, mert nem másodfokú, hanem magasabbfokú egyenletet kell(ene) megoldanunk. Ugyanakkor ez sok esetben nem reménytelen feladat, pl. a Moore-gráfok esetén ilyen módon megmutatható, hogy csak a páratlan körökre és a Hoffman–Singleton-tételben felsorolt gráfokra lehet egyenlőség. Egy $k$-reguláris $d$ átmérőjű gráf csúcsainak számára $n \le 1+k+k(k-1)+\ldots+ +k(k-1)^{d-1}$ teljesül, hiszen az egyes tagok a gráf tetszőleges csúcsához tartozó távolságpartíció elemeinek pontszámát becslik felülről. A Moore-gráfok pontosan ennyi csúcsot tartalmaznak. A fenti negatív eredményt Damerell, illetve Bannai és Ito látta be egymástól függetlenül. Ez a 8.24. feladathoz is kapcsolódik, ott a $g$ páratlan esetben lehet hasonló nemlétezési eredményt mondani. Erről a kérdéskörről két folyamatosan frissülő összefoglaló dolgozat is található az interneten az *Electronic Journal of Combinatorics* oldalán: Miller, Širán [46] és Exoo, Jajcay [23].

Jegyezzük meg, hogy szimmetrikus asszociációs sémák esetén az $R_i$ reláció is egy-egy gráfot definiál. Ezen gráfok szomszédsági mátrixára a fentiekhez hasonló összefüggések igazak, például az, hogy $A_iA_j = \sum_k p_{i,j}^k A_k$. Az $A_0 = I, A_1, \ldots A_d$ által generált mátrixalgebrát nevezik Bose-Mesner algebrának. Ez az algebra kommutatív és olyan mátrixokból áll, amelyekben a főátló konstans. Mivel az $A_i$ mátrixok felcserélhetőek, egyszerre diagonalizálhatóak, és ennek segítségével a Bose-Mesner algebrának felírható egy (egyértelmű) minimális idempotensekből álló bázisa. Ennek vizsgálatával to-

vábbi paramétereket, szükséges feltételeket lehet találni az asszociációs séma (illetve távolságreguláris gráfok létezésére), de ebbe már nem megyünk bele. Annyit említsünk meg, hogy a Bose-Mesner algebra zárt az elemenkénti szorzásra (Schur-szorzás) is, amelyekből szintén további feltételek kaphatók. Ilyenek például a Krein-feltételek, amelyekkel az erősen reguláris gráfoknál már találkoztunk.

## 8.6. Feladatok

8.1. Bizonyítsuk be a (2) tulajdonságot a Szélmalom-tételben.
8.2. Bizonyítsuk be a (3) tulajdonságot a Szélmalom-tételben.
8.3. Mutassuk meg, hogy $u$ = 2,3-ra a szélmalom-tételbeli kivételes gráfok egyértelműek.
8.4. Lássuk be, hogy a Schläfli-gráf (l. Szélmalom-tételt, 8.4.1) egyértelmű.
8.5. Igazoljuk, hogy erősen reguláris gráfra $\mu = 0$ esetén $G = rK_m$.
8.6. Az $A$ szomszédsági mátrixra $A^s$ elemei a szóban forgó pontokat összekötő $s$ hosszú séták számát adják.
8.7. Mely erősen reguláris gráfokra teljesül $k = r$?
8.8. Igazoljuk, hogy a $P(q)$ Paley-gráfok erősen regulárisak.
8.9. Lássuk be, hogy a 8.12.-ben megadott Clebsch-gráf (16,5,0,2) paraméterű erősen reguláris gráf.
8.10. Lássuk be, hogy a 8.13.-ban megadott Gewirtz-gráf (56,10,0,2) paraméterű erősen reguláris gráf.
8.11. Igazoljuk, hogy 8.16. (Wielandt) bizonyításában $r = k$, $s = -k$ esetén a gráf a létra, vagy annak komplementuma.
8.12. Mutassuk meg, hogy a Wielandt-tételben a 2. esetben $s = 1$ esetén a Petersen-gráfot (és csak azt) kapjuk.
8.13. Lássuk be az erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek kapcsolatának polaritásos alakját.
8.14. A Hall–Connor-tételben ellenőrizzük $\lambda$ és $\mu$ értékét.
8.15. Igazoljuk, hogy $r \leq 7$-re a trianguláris gráf egyértelmű.
8.16. Mutassuk meg, hogy négyzetes blokkrendszer bővítése kváziszimmetrikus.
8.17. Mutassuk meg, hogy egy gráf akkor és csak akkor erősen reguláris, ha szomszédsági mátrixát a $\mathbf{j}$ vektor ortogonális kiegészítőjére megszorítva a megszorításnak pontosan két sajátértéke van.
8.18. Lássuk be, hogy 8.3.12 bizonyításában a $\bar{\Gamma}$ páros.

(Útmutatás 1.: mutassuk meg, hogy nincs benne páratlan kör;

Útmutatás 2.: A Turán-tétel $|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G)$ alakjában mutassuk meg, hogy $\alpha(G) = n$ kell legyen!)
8.19. Igazoljuk, hogy az abszolút korlát bizonyításában a keletkező vektorok páronként különbözőek.

8.20. Hoffmann–Singleton-gráf: bizonyítsuk be, hogy azonosíthatjuk PG(3,2) egyeneseit egy 7 elemű halmaz rendezetlen hármasaival oly módon, hogy két egyenes pontosan akkor legyen metsző, ha a megfelelő hármasoknak pontosan egy közös eleme van.
8.21. Mutassuk meg, hogy a Hoffmann-Singleton-gráf erősen reguláris.
8.22. Mit mondhatunk 6 bőségű, és a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó erősen reguláris gráfról?
8.23. Bizonyítsuk be, hogy adott $r$-re és $g$-re van $r$-reguláris $g$ bőségű gráf.
8.24. Egy $r$-reguláris $g$ bőségű gráfnak legalább

$$1 + r + r(r-1) + \ldots + r(r-1)^{(g-3)/2}$$

csúcsa van, ha $g$ páratlan, legalább

$$2(1 + (r-1) + \ldots + (r-1)^{(g-2)/2})$$

csúcsa, ha $g$ páros.
8.25. Van olyan $r$-reguláris $g$ bőségű gráf, amelynek legfeljebb

$$r(r-1)^g/(r-2)$$

csúcsa van.
8.26. Tegyük fel, hogy egy $n$ csúcsú gráfban a maximális fok $n-2$, az átmérő 2. Mutassuk meg, hogy az élek száma legalább $2n-4$. Keressünk is ilyen gráfokat.
8.27. Az előző feladatban mi a helyzet, ha a maximális fok $n-3$ vagy $n-4$.
8.28.* Megint csak a 8.26.-nak megfelelő a kérdés: ha $n \geq 13$ és a maximális fok $n-\ell$, $5 \leq \ell \leq (n+2)/2$, akkor az élek száma legalább $2n-4$.
8.29. Bizonyítsuk be, hogy a Shrikhande-gráf (l. 8.3.13) erősen reguláris.
8.30. Bizonyítsuk be, hogy a Chang-gráfok (l. 8.3.14) erősen regulárisak.
8.31. *Reguláris 2-gráf*nak egy $X$ halmaz 3 elemű részhalmazainak egy olyan $\mathcal{B}$ halmazát nevezzük, ha bármely négyelemű $Y \subset X$-re páros sok $\mathcal{B}$-beli halmaz része $Y$-nak. Egy 2-gráf *reguláris*, ha 2-$(n,3,\lambda)$-rendszer valamely $\lambda$-ra. Triviális példák az összes háromelemű részhalmaz alkotta 2-gráf, valamint az üres.

(a) Ha $\Gamma$ egy gráf az $X = V(\Gamma)$-n, akkor azon 3 elemű halmazok $\mathcal{B}$ halmaza, melyeken $\Gamma$-nak páratlan sok éle feszül, 2-gráfot alkotnak.

(b) minden 2-gráf előáll az (a)-beli konstrukcióval.

(c) két gráf pontosan akkor adja az (a)-beli konstrukcióval ugyanazt a 2-gráfot, ha switching segítségével egymásba vihetők.
8.32. Keressünk olyan $Y$ ponthalmazt, amelyre vonatkozó switching a $T(5)$-öt átviszi a Petersen-gráfba.
8.33. Mutassuk meg, hogy $L_2(4)$, a Shrikhande-gráf és a Clebsch-gráf ugyanazon 2-(16,6,2) bisík különböző polaritásaink feleltethető meg.

8.34. Gondoljuk meg a barátság-tétel vázlatos bizonyítását!
8.35. Mutassuk meg, hogy a csúcstranzitivitásból nem következik a távolságtranzitivitás!
8.36. A $\Gamma$ összefüggő, $d$ átmérőjű gráf akkor és csak akkor távolságtranzitív, ha csúcstranzitív és automorfizmuscsoportja minden $v$ csúcsra tranzitív a távolságpartícióbeli $\Gamma_i(v)$-k pontjain.
8.37. Ha asszociációs séma metszési számaira a 8.5.3 definícióban szereplő $(*)$ feltétel teljesül, akkor $(X, R_1)$ távolságreguláris.
8.38. Bizonyítsuk be 8.5.5.-t!
8.39. Bizonyítsuk be 8.5.9.-t!
8.40. Bizonyítsuk be 8.5.10.-t!
8.41. Bizonyítsuk be 8.5.11.-t!
8.42.$^*$ Mutassuk meg, hogy nincs 3 átmérőjű, $k$-reguláris ($k > 2$) Moore-gráf!

# 9. fejezet

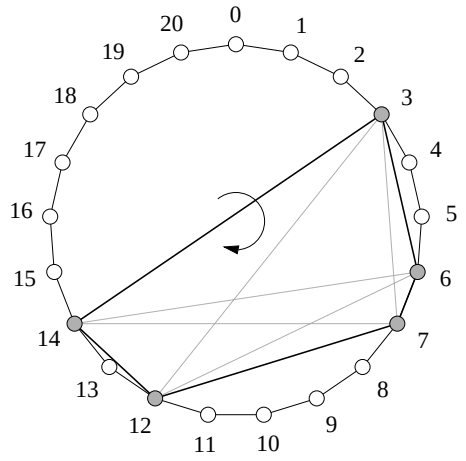
# Differenciahalmazok

## 9.1. Differenciahalmazok, multiplikátorok

Mielőtt a differenciahalmazok elméletébe belemerülnénk, lássuk azt a példát, amellyel elkezdődött a differenciahalmazok története. Tekintsük a $\mathrm{PG}(2,q)$ projektív síkot. Ennek pontjai egy háromdimenziós $\mathrm{GF}(q)$ feletti vektortér 1-dimenziós alterei, az egyenesek pedig a 2-dimenziós alterek. Ilyen három dimenziós vektortér például a $\mathrm{GF}(q^3)$ véges test. Pontok tehát a nemnulla testelemek ekvivalencia-osztályai, ahol $x \sim y$, ha létezik $0 \neq \lambda \in \mathrm{GF}(q)$, amelyre $\lambda x = y$. Három pont $x, y, z$ akkor van egy egyenesen, ha alkalmas $\lambda, \mu, \nu \in \mathrm{GF}(q)$ elemekre $\lambda x + \mu y = \nu z$, vagy más szavakkal két pont által meghatározott egyenes pontjai a két pont $\mathrm{GF}(q)$-beli együtthatós lineáris kombinációi. Vegyük a $\mathrm{GF}(q^3)$ test multiplikatív csoportjának egy $\omega$ generátor-elemét (algebrából tudjuk, hogy véges test multiplikatív csoportja ciklikus), és tekintsük a $T_\omega : x \mapsto x\omega$ leképezést. Ez bijekció, és persze kompatibilis a $\sim$ relációval, így a projektív sík pontjain is bijekció. Természetesen a $\mathrm{GF}(q)$ feletti lineáris függést sem befolyásolja a $T_\omega$ alkalmazása, azaz egy egyenesbe eső ponthármas egy egyenesbe eső hármasba megy, és viszont. Ez magyarul azt jelenti, hogy $T_\omega$ kollineáció. Mivel $\omega$ generátorelem, $T_\omega$ a pontokat egyetlen ciklusban permutálja. Tekintsünk egy egyenest, mondjuk az $L = \{1 = \omega^0, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_q}\}$ egyenest. Mi lesz az $LT_\omega$ egyenes? Nem más, mint az $\{\omega, \omega^{i_1+1}, \ldots, \omega^{i_q+1}\}$, halmaz. Hasonlóan az $LT_\omega^j$ halmaz is egyenes, ami nem más, mint $\{\omega^j, \omega^{i_1+j}, \ldots, \omega^{i_q+j}\}$. Az 1.2.15. Tétel miatt $T_\omega$-nak és valamennyi hatványának ugyanannyi fixeleme van az egyeneseken, mint a pontokon, így $T_\omega$ nemcsak a pontokat, hanem az egyeneseket is egy orbitban permutálja. Ez azt jelenti, hogy $LT_\omega^j$ alakban minden egyenest megkapunk.

Nézzük meg, mit jelent ez az $L$-beli elemek kitevőire! Mivel két ponton át megy egyenes, minden $i$-re létezik olyan $j$, hogy az $1, \omega^i$ pontok rajta vannak

az $LT_\omega^j$ egyenesen. Ez azt jelenti, hogy van olyan $i_1, i_2$ kitevő, melyre $i_1 + j = 0$, $i_2 + j = i$, azaz $i_1 - i_2 = i$. Másrészt pontosan egy ilyen $i_1, i_2$ pár van, hiszen ha kettő lenne, akkor két különböző $j$-t is lehetne találni, vagyis az 1 és $\omega^i$ pontokon két különböző egyenes menne át. Így tehát egy egyenes pontjainak kitevői a mod $(q^2+q+1)$ additív csoportban olyan $(q+1)$ elemű $D$ halmazt alkotnak, hogy bármely nemnulla csoportelem pontosan egyféleképpen áll elő két $D$-beli elem különbségeként. Innen ered a *differenciahalmaz* elnevezés. Ez az észrevétel a projektív síkok egy nagyon szép ciklikus reprezentációját teszi lehetővé (l. a 9.1–2. feladatokat). Jegyezzük meg, hogy megfigyelésünk ekvivalens azzal, hogy a testre épített síkok illeszkedési mátrixa ciklikus alakra hozható. A most következő ábra ezt a PG(2,4) esetben illusztrálja. Könnyű ellenőrizni, hogy a modulo 21 ciklikus csoportban a 3,6,7,12,14 elemek olyan halmazt alkotnak, hogy minden nemnulla elem pontosan egyszer áll elő különbségként. (A későbbiekben ezt (21,5,1) paraméterű differenciahalmaznak nevezzük majd., l. a 9.1.1. Definíciót.)




9.1. ábra. A negyedrendű projektív sík ciklikus modellje

Természetesen a fenti eljárás megismételhető PG$(2, q)$ helyett a PG$(n, q)$ projektív térre is. Persze ott az egyenesek szerepét a hipersíkok veszik át, azaz a PG$_{n-1}(n, q)$ blokkrendszert tekintjük. Ezt Singer vette észre a harmincas években és eredménye a differenciahalmazok vizsgálatának kiindulópontja lett.

Ezt a szituációt fogjuk kicsit általánosabban négyzetes blokkrendszerekre megvizsgálni.

Idézzük emlékezetünkbe az 1. fejezetből a Burnside-lemmát, valamint azokat a tételeket (1.2.15, 1.2.17), amelyek négyzetes illeszkedési struktúrák automorfizmusainak pontokon és blokkokon való hatásáról szólnak. Ezek többek között azt is maguk után vonják, hogy ha egy automorfizmuscsoport egy négyzetes (és nemszinguláris illeszkedési mátrixú) illeszkedési struktúra pontjain regulárisan hat, akkor a blokkokon is automatikusan reguláris. Mi ilyen blokkrendszereket fogunk részletesebben szemügyre venni.

**9.1.1. Definíció.** Legyen $G$ (additívan írt) véges Abel-csoport. A $D \subset G$ részhalmazt $(v, k, \lambda)$ *differencia halmaz*nak nevezzük, ha $|G| = v$, $|D| = k$, és minden $0 \neq g \in G$-re pontosan $\lambda$ db olyan $d, d' \in D$ pár van, melyre $d - d' = g$. □

**9.1.2. Definíció.** Legyen $G$ a $\mathbf{D}$ négyzetes blokkrendszer olyan automorfizmus-csoportja, amely reguláris a pontokon (és így 1.2.17 miatt a blokkokon is). Egy ilyen $G$-t *Singer-csoport*nak nevezünk. □

**9.1.3. Tétel.** *Legyen $k < v$, $G$ pedig $v$ elemű véges Abel-csoport. Pontosan akkor létezik $(v, k, \lambda)$ paraméterű $D \subset G$ differenciahalmaz, ha létezik olyan $\mathbf{D}$ négyzetes 2-$(v, k, \lambda)$ blokkrendszer, amelynek $G$ Singer-csoportja.*

*Bizonyítás.* Legyen $D \subset G$ differencia halmaz. Definiáljuk a

$$\mathbf{D}(D) = (\mathbf{P}(D), \mathbf{B}(D), \in)$$

blokkrendszert a következőképpen: $\mathbf{P}(D) = G$, $\mathbf{B}(D) = \{D + g : g \in G\}$. Azonnal látható, hogy $\mathbf{D}(D)$ négyzetes 2-$(v, k, \lambda)$ blokkrendszer és a $G$-vel izomorf $\{\tau_g : x \mapsto x + g \ : \ g \in G\}$ csoport valóban reguláris a pontokon.

Megfordítva tegyük fel, hogy $\mathbf{D}$ négyzetes blokkrendszer a $G$ Singer-csoporttal. Mivel $G$ reguláris a pontokon, válasszunk ki egy $p$ alappontot és minden más pontot azonosítsunk azzal a $g \in G$ csoportelemmel, amely $p$-t ebbe a pontba viszi. Egy $B$ alapblokk pontjaihoz ily módon tartozó csoportelemek egy $D$ differenciahalmazt alkotnak a $G$ csoportban. Legyen ugyanis $0 \neq g \in G$. A $p$ és $p^g$ pontok $\lambda$ darab blokkban vannak benne. Mivel $G$ a blokkokon is reguláris, ezeket felírhatjuk $B^{g_1}, \ldots, B^{g_\lambda}$ alakban. A $p^g$ pont pontosan akkor van benne ezekben a blokkokban, ha $p \in (B^{g_j})^{g^{-1}} = B^{g_j - g}$. A $p$ alappont viszont akkor van benne a $B^{g_j - g}$ blokkban, ha $p^{g - g_j} \in B$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $g$ $\lambda$-féleképpen áll elő $D$-beli elemek különbségeként. ■

Jegyezzük meg, hogy $G$ Abelségét csak arra használtuk, hogy ne kelljen figyelni az összeadások sorrendjére, a tétel nem-Abel $G$-re is igaz (l. 9.3. feladat).

**9.1.4. Példa.** A mod 7 additív csoportban $D = \{0,1,3\}$ differenciahalmaz, a megfelelő blokkrendszer a Fano-sík. Ezt a reprezentációt mutatja a 1.2.8. Példa számozása. A mod 11 additív csoportban a $D = \{1,3,4,5,9\}$ differenciahalmaz, a megfelelő blokkrendszer Hadamard-féle (ez a Paley-konstrukció, l. 6.2.8).

A bevezetőben projektív síkokra látott Singer-konstrukciót tételként is megfogalmazzuk.

**9.1.5. Tétel. (Singer)** *A* mod $v$ *additív csoportban, ahol*

$$v = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$$

*létezik differenciahalmaz a* $k = (q^n - 1)/(q - 1)$, $\lambda = (q^{n-1} - 1)/(q - 1)$ *paraméterekkel.* ■

Jegyezzük meg, hogy vannak olyan differenciahalmazok, amelyek paramétere megegyezik a Singer-félével, de az általuk meghatározott blokkrendszer nem a projektív tér. Természetesnek tűnik a kérdés, hogy mennyire egy–egyértelmű a kapcsolat a blokkrendszer, a Singer-csoport és a differenciahalmaz között. Két differenciahalmazt *izomorf* nak szoktak hívni, ha a megfelelő $\mathbf{D}(D)$ blokkrendszerek izomorfak. Ebből még az sem következik, hogy a megfelelő csoportok izomorfak (l. 9.4. feladat). Ugyanazon csoport két differenciahalmaza *ekvivalens*, ha van olyan csoport-automorfizmus, amely egyiket a másikba viszi. Kibler adott példát azonos csoportban izomorf, de nem ekvivalens differenciahalmazokra. Érdemes megemlíteni, hogy ciklikus csoportok esetén mindmáig megoldatlan, hogy vannak-e izomorf, de nem ekvivalens differenciahalmazok.

A differenciahalmazok konstrukcióit nem szaporítjuk, több végtelen család ismert (McFarland, Spence, Hall és mások konstruáltak ilyeneket), mi csak egy már látott családra és annak közvetlen általánosításaira szorítkozunk.

**9.1.6. Tétel.** *A* GF($q$) *test additív csoportjában, ha* $q \equiv 3 \pmod 4$, *a kvadratikus maradékok differenciahalmazt alkotnak, a paraméterek*

$$(q, (q-1)/2, (q-3)/4).$$

*Ha* $q = 4t^2+1$, $t$ *páratlan, akkor a negyedik hatványmaradékok differenciahalmazt alkotnak, melynek paraméterei* $(q, (q-1)/4, (t^2-1)/4)$. *Ha* $q = 4t^2+9$, *akkor a negyedik hatványmaradékok és a* 0 *differenciahalmazt alkotnak.* ■

A 9.5.–9.6. feladatokban belátjuk, hogy tényleg ezek a 9.1.6. Tételbeli differenciahalmazok paraméterei, míg a 9.7–8. feladatok további konstrukciókat tartalmaznak. Jegyezzük meg, hogy ha már tudjuk, hogy egy $v$ elemű csoportban egy $k$ elemű részhalmaz differenciahalmazt alkot, akkor a $\lambda$ paraméter a $v - 1 = \frac{k(k-1)}{\lambda}$ egyenletből számítható.

Legyen $D \subset G$ differenciahalmaz. A fő kérdés az, hogy tudunk-e további automorfizmusokat találni $\mathbf{D}(D)$-ben a $G$ elemeivel való eltolásokon kívül. Nézzük először a Fano-sík példáját: itt $G = C_7$, a pontok a mod 7 maradékosztályok, a blokkok $D = \{1,2,4\}$ eltoltjai és a 2-vel való szorzás ilyen automorfizmus lesz, (ami ráadásul $D$-t önmagába viszi). Az egyszerűség kedvéért mi csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $G$ Abel-csoport. A Fano-sík esetében az „extra" automorfizmus egy a csoport rendjével való szorzás volt. Általában is ilyenszerű automorfizmusok létezését tudjuk garantálni. Lássuk ugyanezt precízen:

**9.1.7. Definíció. (M. Hall)** Legyen $D \subset G$ differenciahalmaz, $G$ (additívan írt) Abel-csoport, $t$ egy $|G|$-hez relatív prím természetes szám. $t$-t (numerikus) *multiplikátor*nak nevezzük, ha a $t$-vel való szorzás a $\mathbf{D}(D)$ blokkrendszer automorfizmusát indukálja. □

**9.1.8. Megjegyzés.** Szoktak nem-Abel (vagy nem ciklikus) csoportokat is tekinteni, ekkor a multiplikátorok nem természetes számok, hanem $G$ olyan automorfizmusai, amelyek a $\mathbf{D}(D)$ blokkrendszer automorfizmusát indukálják. Ha Abel-csoport esetén az automorfizmus egy $t$ elemmel való szorzás, akkor $t$-t *numerikus multiplikátor*nak szokták nevezni. Mi azonban csak ilyen numerikus multiplikátorokkal foglalkozunk, így a numerikus jelzőt is elhagyjuk. Jegyezzük meg, hogy ciklikus csoportok esetén minden multiplikátor numerikus.

Marshall Hall volt az első, aki ún. multiplikátor-tételeket bizonyított. Ezek olyan tételek, amelyek valamely, csupán a blokkrendszer (ill. a differenciahalmaz) paramétereiből előállított számról garantálják, hogy ő numerikus multiplikátor. A multiplikátor-tételek differencia halmazok nemlétezésének bizonyítására használhatók fel, valamint differenciahalmazok megkonstruálására ill. egyértelműségük igazolására. Ehhez segít az alábbi két észrevétel.

**9.1.9. Tétel.** *1) Minden multiplikátor fixálja $D$ valamely eltoltját.*

*2) Ha $G$ Abel és $(v,k) = 1$, akkor van olyan eltoltja a $D$ differenciahalmaznak, amelyet minden multiplikátor fixál.*

*Bizonyítás.* 1) Minden multiplikátor fixálja a 0 elemet (az alappontot), így 1.2.15-ből adódóan egy blokkot is. $\mathbf{D}(D)$ blokkjai pedig éppen $D$ eltoltjai.

2) Legyen $\alpha$ a $D$ differenciahalmaz összes elemének összege. Mivel $(v,k) = 1$, $k$-val tudunk osztani $G$-ben. Tekintsük a $D' = D - \alpha/k$ eltoltat. A $D'$ elemeinek összege 0, míg $D' + g$-é $kg$. Mivel a multiplikátor automorfizmus, olyan eltoltat, melyben az elemek összege 0, ugyanilyenbe visz. A fenti észrevétel alapján azonban ilyen csak maga a $D'$ van, hisz $kg = 0$-ból $g = 0$ következik. ■

Most már látjuk, hogy ha ismerünk néhány multiplikátort, akkor ezt a minden multiplikátor által fixált blokkot (eltoltat) megpróbálhatjuk felírni. Azt talán jegyezzük meg, hogy a $(v,k)=1$ feltétel nem hagyható el, az $\langle a,b,c,d\rangle$ által generált elemi Abel 2-csoportban a $\{0,a,b,c,d,a+b+c+d\}$ halmaz (16,6,2) differenciahalmaz, de egyetlen eltoltját sem fixálja valamennyi multiplikátor (persze itt a multiplikátorok nem numerikusak).

Ezt a tételt használtuk a 9.1. ábra elkészítésekor, ott a 21 elemű ciklikus csoportban azt a differenciahalmazt írtuk fel, amelyet a 2, mint multiplikátor fixál (az, hogy a 2 tényleg multiplikátor, az első multiplikátor-tétel következménye).

Mielőtt belátnánk M. Hall és H.J. Ryser multiplikátor-tételét, idézzük fel a csoportgyűrű fogalmát. Legyen $G$ (ezúttal multiplikatívan írt!) csoport. A $\mathbf{Z}[G]$ csoportgyűrű elemei a $\sum_{g\in G} a_g g$ alakú formális összegek, ahol $a_g\in\mathbf{Z}$. A szorzás és összeadás műveleteket a természetes módon értelmezzük $\mathbf{Z}[G]$-n.

**9.1.10. Jelölés.** *Ha $A=\sum_{g\in G} a_g g\in\mathbf{Z}[G]$, akkor legyen $A^{(t)}=\sum_{g\in G} a_g g^t$ (azaz szemléletesen ez a „tagonkénti hatványozás").*

*Ha $X\subset G$, akkor $\bar{X}$ jelöli a csoportgyűrű $\sum_{g\in X} g$ elemét.*

**9.1.11. Lemma.** *Legyen $D$ differenciahalmaz a $G$ multiplikatívan írt Abel-csoportban, valamint $X\subset G$. A $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}$ szorzatban a $g\in G$ csoportelem $a_g$ együtthatója éppen $|X\cap(Dg)|$ (ahol persze $Dg$ nem a csoportgyűrű eleme, hanem $D$ „eltoltja", mely a megfelelő blokkrendszer blokkja).*

*Bizonyítás.* A szóban forgó együttható éppen azt számolja, hogy $xd^{-1}$ alakban hányszor áll elő $g$, ahol $x\in X$, $d\in D$. ■

**9.1.12. Lemma.** *Ha egy négyzetes 2-$(v,k\lambda)$-rendszer valamely $k$ pontú $S$ ponthalmaza minden blokkot legalább $\lambda$ pontban metsz, akkor maga is blokk.*

*Bizonyítás.* Először gondoljuk meg, hogy van olyan blokk, amely $\lambda$-nál több pontot tartalmaz $S$-ből. Ha ugyanis minden blokk $\lambda$ pontban metszené $S$-et, akkor $x\in S$-re leszámolva az $(y,B)$ párokat, ahol $x\in B$, $x\neq y\in S\cap B$, azt kapnánk, hogy $k(\lambda-1)=\lambda(k-1)$.

Vegyük azt a $B$ blokkot, amely a lehető legtöbb pontot tartalmazza a mi $S$ ponthalmazunkból. Feltehetjük tehát, hogy $|S\cap B|>\lambda$. Ha $S\neq B$, akkor legyen $x\in B\setminus S$. Az illeszkedő $(p,B')$ ($p\in S\cap B'$, $x\in B'$, $B'\neq B$) párok kétféle leszámlálásával kapjuk, hogy $(k-1)\lambda\leq\lambda k-|S\cap B|$. Felhasználva, hogy $|S\cap B|>\lambda$ ez nem lehetséges, vagyis csak $S=B$ lehetett.

Lássunk egy ennél elegánsabb bizonyítást is. Jelölje $s_i$ az $S$-et $i$ pontban metsző egyenesek számát. Nyilván $b_i=0$, ha $i<\lambda$ vagy $i>k$. Írjuk fel a szokásos egyenleteket ezen $b_i$-kre (az illeszkedő pont-egyenes, illetve a

pontpár-egyenes páros leszámolásából):

$$\sum_i b_i = b(= v),$$
$$\sum_i i b_i = |S|r = k^2,$$
$$\sum_i i(i-1)b_i = |S|(|S|-1)\lambda.$$

A három egyenlet segítségével kiszámíthatjuk, hogy

$$\sum_i (i-\lambda)(i-k)b_i) = k(\lambda(v-1) - k(k-1)) = 0. \tag{9.1}$$

Felhasználtuk, hogy négyzetes blokkrendszerre $\lambda(v-1) = k(k-1)$. Jegyezzük meg, hogy igazából nem is lett volna szükség számolásra, hiszen az eredmény $S$ választásától nem függ, így ha $S$-nek egy blokkot választunk (ami teljesíti a lemma feltételeit), akkor $S$-et minden blokk $k$ vagy $\lambda$ pontban metszi, azaz az utolsó összeg minden tagja 0. Ha (9.1)-ban egyenlőség van, akkor minden $b_i = 0$, kivéve $b_k$-t és $b_\lambda$-t. Ez más szóval azt jelenti, hogy minden blokk $\lambda$ vagy $k$ pontban metszi $S$-et. Ha minden blokk $\lambda$ pontban metszene, akkor a második egyenlet szerint $\lambda v = k^2$ adódna, és ezt $\lambda(v-1) = k(k-1)$-gyel összevetve $\lambda = k$ következne. Ez viszont nem lehetséges, vagyis a $k$ metszési szám is előfordul, vagyis $S$ maga egy blokk. ■

**9.1.13. Tétel. (M. Hall, H. J. Ryser, első multiplikátor-tétel)** *Legyen $D \subset G$ differenciahalmaz a $G$ Abel-csoportban, és legyen $p$ az $n = k-\lambda$ olyan prímosztója, amely relatív prím $v = |G|$-hez. Ha $p > \lambda$, akkor $p$ multiplikátora $D$-nek.*

*Bizonyítás.* Ez az egyszerű és elegáns bizonyítás Alexander Pott-tól származik.

Jelöljük $\bar{D}$-vel a $\mathbf{Z}[G]$ csoportgyűrű $\bar{D} = \sum_{d\in D} d$ elemét. A $D$ pontosan akkor differenciahalmaz, ha a $\bar{D}\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{G} + (k-\lambda)\bar{1}$ (Itt 1 a $G$ csoport semleges eleme). A $\bar{D}^{(p)} = \bar{X}$ valamely $X \subset G$-re. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $X = D + g$-vel valamely $g \in G$-re. Ehhez az előző lemma szerint azt kéne belátni, hogy $X$ minden blokkot legalább $\lambda$ pontban metsz, ami az utolsó előtti lemma miatt azt jelenti, hogy $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}$-ben minden együttható legalább $\lambda$.

A trükk az, hogy áttérünk a $\mathrm{GF}(p)[G]$ csoportgyűrűre. Mint megjegyeztük, ez nyilván homomorfizmus, nem történik más, csak az együtthatókat modulo $p$ tekintjük. Ekkor viszont a $p$-edik hatványra emelés az együtthatókat nem változtatja, azaz $\bar{D}^p$ helyett írhatunk $\bar{D}^{(p)}$-t.

Tekintsük tehát a $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}\bar{D}^{(p)}\bar{D}^{(-1)} = \bar{D}^p\bar{D}^{(-1)}$ szorzatot $\mathrm{GF}(p)[G]$-ben. Leválasztva egy $\bar{D}$ tényezőt, $\bar{D}^{p-1}(\bar{D}\bar{D}^{(-1)})$-et kapunk. A zárójelben szereplő tag $\lambda\bar{G} + (k-\lambda)\bar{1}$, de az utolsó tag 0 mod $p$. Így a $\bar{D}^p\bar{D}^{(-1)}$ szorzat $\mathrm{GF}(p)[G]$-ben $\lambda\bar{D}^{p-1}\bar{G}$. A csoportgyűrű egy $A$ elemét viszont nagyon könnyű megszorozni $\bar{G}$-sal, az eredmény az $A$-beli együtthatók összege szorozva $\bar{G}$-sal. Eszerint $\bar{D}\bar{G} = k\bar{G}$, $\bar{D}^2\bar{G} = k^2\bar{G}$, s. í. t. $\bar{D}^{p-1}\bar{G} = k^{p-1}\bar{G}$. Mivel $p$ nem osztja $k$-t, a kis Fermat-tétel miatt $k^{p-1} = 1$ (modulo $p$), azaz $\bar{D}^p\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{G}$ a $\mathrm{GF}(p)[G]$-ben.

Visszatérve a $\mathbf{Z}[G]$ csoportgyűrűre ez azt jelenti, hogy $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}$-ben minden együttható legalább $\lambda$ (itt és csak itt használjuk, hogy $\lambda < p$), ami a tételt megelőző lemmák miatt elég. ■

Történetileg M. Hall először a $\lambda = 1$ esetre (azaz projektív síkok esetére, és ciklikus Singer-csoportra) látta be a tételt. A $p > \lambda$ feltételt az ismert bizonyítások lényegesen kihasználják, de mindenki azt sejti, hogy ez csupán technikai nehézség, valójában $k - \lambda$ minden $v$-hez relatív prím prímosztója multiplikátor. Ennek a **multiplikátor-sejtés**nek a bizonyítására sok erőfeszítés történt, s ezek eredményeként több komplikáltnak tűnő, de jól használható multiplikátor-tételt ismerünk. Ezekkel bizonyos $\lambda$-nál kisebb $p$-kről is kimutatható, hogy multiplikátorok, a $p > \lambda$ feltételt azonban mindmáig nem sikerült teljesen eliminálni. Az általunk ismertetett Pott féle bizonyítás tipikus abban az értelemben, hogy szinte valamennyi bizonyítás a csoportgyűrűt használja (M. Hall eredeti bizonyítása is). A Pott-féle bizonyítás jó arra is, hogy legalább érzékeltethessük a differenciahalmazoknál tipikus bizonyítási eljárásokat. Általában az történik, hogy a csoportgyűrűbeli egyenletre, mint amilyen esetünkben a

$$\bar{D}\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{G} + (k-\lambda)\bar{1}$$

egyenlet, a $G$ csoport karaktereit alkalmazzuk. $G$ Abel-csoport lévén ezek a komplex egységgyökök multiplikatív csoportjába vivő homomorfizmusok, így az alapegyenletből egy alkalmas körosztási test algebrai egészei közötti egyenlet adódik. Erről az egyenletről algebrai számelméleti módszerekkel gyakran lehet mondani valamit, és abból többször tudunk információt nyerni magáról az eredeti egyenletről.

Lássuk az eddigi eredmények néhány alkalmazását differenciahalmazok nemlétezésének bizonyítására ill. differenciahalmazok konstrukciójára.

**9.1.14. Példa.** 1) Keressünk (37,9,2) differenciahalmazt. Ekkor a csoport ciklikus, $n = 7$. Így 7 multiplikátor. Mivel van olyan $D$ differenciahalmaz, amelyet a 7-tel való szorzás fixen hagy, és feltehetjük, hogy $1 \in D$, így $D = \{1,7,7^2,\ldots\}$. Ez tényleg differenciahalmaz, és persze lényegében egyértelmű.

2) Keressünk (23,11,5) ill. (21,5,1) differenciahalmazt. L. a 9.11. feladatot.

3) Nem létezik (31,10,3) differenciahalmaz. Valóban a 7 multiplikátor és a 7 által fixált halmaznak (7 hatványai) több, mint tíz eleme lenne.

4) Nem létezik ciklikus (111,11,1) differenciahalmaz. Mind 2, mind 5 multiplikátor lenne ugyanis, részletesen l. a 9.12. feladatot.

**9.1.15. Állítás.** *Nem létezik ciklikus projektív sík, ha rendje osztható* 6*-tal.*

*Bizonyítás.* Valóban, 2,3 multiplikátorok lennének, és lenne olyan $D$ differenciahalmaz, amelyre $D = 2D = 3D$. Ekkor viszont $c$, $2c$, $3c$ mind $D$-beli lenne, ami nem lehet, mert $3c - 2c = 2c - c$. ■

Mielőtt a multiplikátor-tétel(ek) alkalmazásait néznénk meg, lássunk két további ilyen tételt.

**9.1.16. Tétel. (második multiplikátor-tétel, Menon; Arasu–Xiang)** *Legyen $D$ $(v, k, \lambda)$ differenciahalmaz a $v^*$ exponensű $G$ véges Abel-csoportban. Legyen $t$ egy a $v$-hez relatív prím egész szám, és legyen $n_1$ osztója $n = k - \lambda$-nak. Legyen $n_1 = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ az $n_1$ törzstényezős felbontása és végül legyen $n_2 = n_1/(v, n_1)$. A $p_i$ prímtényezőkhöz definiáljuk a $q_i$ számokat a következőképp:*

$$q_i = \begin{cases} p_i, & \text{ha } p_i \text{ nem osztja } v\text{-t;} \\ l_i, & \text{ha } v^* = p_i^r u_i, (p_i, u_i) = 1. \text{ Itt } l_i \text{ olyan egész,} \\ & \text{melyre } (l_i, p_i) = 1, \text{ és } l_i \equiv p_i^f \pmod{u_i}. \end{cases}$$

*Tegyük fel, hogy minden $i$-re van olyan $f_i$ egész szám és $s_i$ multiplikátor, melyre $s_i q_i^{f_i} \equiv t \pmod{v^*}$. Ha $n_2 > \lambda$ vagy ha a $\mathbf{Z}[G]$-beli $FF^{(-1)} = (n/n_2)^2$ egyenletnek csak a triviális $F = (n/n_2)g$ megoldásai vannak ($g \in G$), akkor $t$ multiplikátor.* ■

Azt mindenképpen érdemes megjegyezni, hogy ebből az ijesztően hangzó tételből az első multiplikátor-tétel azonnal következik. Érdemes ennek a tételnek egy egyszerűbb alakját is megfogalmazni (történetileg persze ez keletkezett először: ciklikus csoportokra Hall, általánosabban Menon igazolta).

**9.1.17. Tétel. (Menon, Hall)** *Legyen $D$ Abel-féle $(v, k, \lambda)$ differenciahalmaz és legyen $m > \lambda$ olyan osztója $n$-nek, amely relatív prím $v$-hez. Legyen továbbá $t$ olyan $v$-hez relatív prím egész, amely teljesíti a következő feltételt: minden $p|m$ prímre van olyan $f$, amelyre $t \equiv p^f \pmod{v^*}$, ahol $v^*$ a $G$ exponense. Ekkor $t$ (numerikus) multiplikátor.*

Ezek a tételek elsősorban a nemciklikus esetben hasznosak, így most mi itt megállunk.

## 9.2. Feladatok

9.1. Nevezzük egy $q^2+q+1$ oldalú szabályos sokszög egy rész $k$-szögét teljesen szabálytalannak, ha a csúcsai között fellépő távolságok mind különbözők. Mutassuk meg, hogy $k \leq q+1$ és $k = q+1$ esetén a teljesen szabálytalan részsokszög elforgatottjai egy projektív sík egyenesei lesznek.
9.2. Mutassuk meg, hogy a előző feladatban definiált teljesen szabálytalan részsokszög differenciahalmaznak felel meg a $(q^2+q+1)$-edrendű ciklikus csoportban.
9.3. Terjesszük ki 9.3.-at a nem-Abel esetre.
9.4. Adjunk példát nem izomorf csoportokra, amelyek ugyanazt a blokkrendszert adják meg.
9.5. Számítsuk ki a négyzetelemek alkotta differenciahalmaz paramétereit.
9.6. Számítsuk ki a negyedik hatványok alkotta differenciahalmaz paramétereit.
9.7. McFarland konstrukció: Legyen

$$v = q^{d+1}\left(1+\frac{q^{d+1}-1}{q-1}\right)\ ,\ k = q^d\frac{q^{d+1}-1}{q-1}\ ,\ \lambda = q^q\frac{q^d-1}{q-1}.$$

Legyen továbbá $E$ elemi Abel csoport (vektortér GF$(q)$ felett), $|E| = q^{d+1}$. Tegyük fel, hogy $E$ egy olyan $G$ csoport centrumában van, amelynek rendje $|G| = v$. Legyenek továbbá $H_1, \ldots, H_r$ az $E$ hipersíkjai ($r = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$), továbbá legyenek $g_1, \ldots, g_r$ az $E$ mellékosztályainak reprezentánsai. Ekkor $D = g_1H_1 \cup \ldots \cup g_rH_r$ az adott $(v,k,\lambda)$ paraméterű differenciahalmaz.
9.8. Mutassuk meg, hogy $C_2 \times C_4 \times C_4 \times C_3$-ban a

$$(0000),(0001),(0002),(0020),(0101),(0031),(0132),(0200),(0212),(0220)$$
$$(0221),(0302),(1012),(1101),(1132),(1201),(1211),(1222),(1231)(1322)$$

elemek (96,20,4) differenciahalmazt alkotnak.
9.9. Legyen $q = s^2$, $s$ prímhatvány. Mutassuk meg, hogy egy ciklikus $q$-adrendű projektív síknak van $s$-edrendű részsíkja (méghozzá egy ilyent a ciklizálás szerinti $(s^2-s+1)$-edik pontok adnak.
9.10. Tükrözzük a 9.1. feladatbeli teljesen szabálytalan részsokszöget az eredeti $(q^2+q+1)$-szög egy tengelyére. Mutassuk meg, hogy az így kapott halmaznak nincs három kollineáris pontja.
9.11. Keressünk (23,11,5) differenciahalmazt és ciklikus (21,5,1) differenciahalmazt.
9.12. Igazoljuk, hogy nincs ciklikus (111,11,1) differenciahalmaz.
9.13. Mit ad az 1.2.19. Tétel projektív síkok polaritásaira?
9.14. (Bruen) Legyen $B$ olyan ponthalmaz egy $n$-edrendű projektív síkon, amely minden egyenest metsz. Ekkor $|B| \geq n+\sqrt{n}+1$. Ha itt egyenlőség van, akkor $B$ pontjai egy $\sqrt{n}$-edrendű részsíkot alkotnak.

9.15. (de Resmini) Legyen $B$ olyan ponthalmaz egy $n$-edrendű négyzetes blokkrendszerben, amely minden blokkot metsz. Ekkor $|B| \geq (n+\sqrt{q}+\lambda)/\lambda$.
9.16. (Drake) Ha 9.15.-ben egyenlőség van, akkor $B$ pontjai egy $\sqrt{n}$-rendű négyzetes rész-blokkrendszer pontjai.
9.17*. Legyen $n = q^2$. Ekkor $n^2+n+1 = (q^2+q+1)(q^2-q+1)$. Tekintsünk egy ciklikus $n$-edrendű projektív síkot és azon a $(q^2-q+1)$-gyel osztható sorszámú pontokat (azaz a $(q^2+q+1)$-edrendű részcsoport orbitját). Mutassuk meg, hogy ezek a pontok $q$-adrendű részsíkot alkotnak!
9.17*. Legyen $n = q^2$. Ekkor $n^2+n+1 = (q^2+q+1)(q^2-q+1)$. Tekintsünk egy ciklikus $n$-edrendű projektív síkot és azon a $(q^2+q+1)$-gyel osztható sorszámú pontokat (azaz a $(q^2+q+1)$-edrendű részcsoport orbitját). Mutassuk meg, hogy ezen pontok között nincs három kollineáris!
9.18**. Terjesszük ki az előző feladatot $n$ dimenzióra, azaz $\mathrm{PG}(n,q)$-ra!

# 10. fejezet

# Lineáris kódok

## 10.1. Alapvető fogalmak, perfekt kódok

Az algebrai kódelmélet a következő feladattal foglalkozik: tegyük fel, hogy egy üzenetet el szeretnénk juttatni egyik helyről a másikra. Az a csatorna azonban, amin az üzenetet továbbítjuk, zajos: nem pontosan ugyanaz az üzenet érkezik meg, mint amit elküldtünk. Ahhoz, hogy a fogadó ki tudja találni az eredeti üzenetet, azt redundánssá tesszük, s így remélhetőleg még az elromlott információból is kitalálható az eredeti. Számítógépeknél gyakran használják a „paritásellenőrző bit"-et: az üzenet egy 0-1 sorozat, s a végére aszerint írunk 0-t vagy 1-et, hogy az üzenetben páros vagy páratlan sok egyes volt. Általában az üzenetet (rögzített hosszú) vektoroknak tekintjük (valamely véges test felett). Tipikus esetben a test a kételemű GF(2), de más testek is szóba jöhetnek (pl. ha színeket akarunk kódolni képpontokban). A küldő tehát kiindul egy **m** üzenetből, ezt valamilyen módon (redundánsan) kódolja egy GF($q$) feletti $n$ hosszú **v** vektorrá. A fogadó **v** helyett egy **w** vektort kap. Természetesen a két fél megállapodik a kódolási eljárásban, így a fogadó tudja, hogy mik az értelmes üzenetek (pl. betűk). Ezután megkeresi azt az értelmes üzenetet, amely a **w**-ből a legkevesebb változtatással kapható, és ezt tekinti a küldött üzenetnek. Ezt a lépést *dekódolás*nak nevezzük. (Ez persze jelentős egyszerűsítés, általában különbözőek lehetnek azon valószínűségek, hogy egy adott karakter egy adott másikba megy át a csatornán. Egy lehetséges dekódolás, melyet maximum likelihood dekódolásnak neveznek, azon **v** üzenet megtalálása, amelyre a legnagyobb annak a valószínősége, hogy a beérkezett **w**-t kapjuk.)

A jelen jegyzetben nem célunk a kódelmélet részletes tárgyalása, elsősorban a Golay-kódok, és a belőlük kapható Witt-féle blokkrendszerek bemutatása a célunk. Ezek mellett olyan kódokat mutatunk be, amelyek valamilyen

szempontból szimmetrikus struktúrákhoz, projektív terek nevezetes ponthalmazaihoz, például altereihez kapcsolódnak. Ennek megfelelően csak egy-egy kódot fogunk bemutatni, és a dekódolási algoritmusok leírását (amelyek pedig a gyakorlati alkalmazások szempontjából sorsdöntő jelentőségűek) teljesen mellőzzük. Az eljárás precíz leírásához szükségünk van néhány definícióra.

**10.1.1. Definíció.** Legyen $Q$ egy $q$ elemű ábécé, $V = Q^n$ az $n$ elemű sorozatok halmaza. $V$ két elemének *Hamming-távolság*án a két sorozat különböző koordinátáinak számát értjük. A $V$ részhalmazait *kód*nak nevezzük. Ha $Q = \mathrm{GF}(q)$, akkor $Q^n = V(n, q)$ az $n$ dimenziós vektortér $\mathrm{GF}(q)$ felett. Ennek lineáris altereit *lineáris kód*nak nevezzük. A kódhoz tartozó sorozatokat ill. vektorokat *kódszavak*nak nevezzük. Az altér dimenziója a kód *dimenzió*ja, $n$-et a kód *hossz*ának hívjuk. A $C$ kód *minimális távolság*a a különböző kódszavak közötti távolságok minimuma. Ha a kód lineáris (vagy additív, azaz $Q$-n van egy csoportművelet és a kódhoz egy tetszőleges kódszót hozzáadva visszakapjuk a kódot), akkor a kód *minimális távolság*a a csupa nulla sorozattól (vektortól) számított legkisebb távolság. Lineáris (ill. additív) kódokra ez persze megegyezik a kód minimális súlyával, mert a Hamming-távolság az eltolásokra nézve invariáns. Ha tehát $C$ egy $k$-dimenziós altér, és $C$ minimális súlya $d$, akkor $C$-t $[n, k, d]_q$ kódnak nevezzük. Ha a $C$ kód nem lineáris, akkor a $k$ dimenzió helyett a kódszavak $M = |C|$ számát tüntetjük fel, a minimális súly helyett pedig a minimális távolságot, így ilyenkor $(n, M, d)_q$-kódról beszélünk. Persze lineáris kódra $M = q^k$ volna. Abban az esetben, ha $q = 2$, a $q$ indexet gyakran elhagyjuk. Két kódot (szűkebb értelemben) *ekvivalens*nek nevezünk, ha egyik a másikból a koordináták permutációjával kapható. Lineáris kódokra ezen felül az ekvivalenciánál meg szokás engedni egy koordináta nemnulla testelemmel való végigszorzását is. □

Egy $C$ kód $e$ hibát képes (a természetes módon a legnagyobb valószínűség elve alapján, l. a fejezet bevezetőjét) javítani, ha $2e < d$. Az *e-hibajavító* tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a kódszavak köré írt $e$ sugarú gömbök diszjunktak legyenek.

**10.1.2. Példa.** Legyen a továbbítandó üzenet a $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ bináris vektor. Tegyük az üzenet végére a $c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i$ *paritásbit*et, így a $C = \{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) : \sum c_i = 0\}$ kódot kapjuk. Ugyanezt megtehetjük nagyobb ábécé felett, az utolsó bit olyan legyen, hogy a kapott kódszóban a koordináták összege nulla legyen (ehhez persze az ábécén kell legyen egy szép (pl. csoport) összeadás művelet. A fejezet bevezetésében a bináris esetben ezt már említettük.

Ezt az ötletet általánosan is alkalmazhatjuk, egyetlen „paritásbit” helyett akár több általánosított paritásbitet (pl. a korábbi koordináták lineáris kom-

binációját) is hozzáfűzhetünk az üzenethez. Az ilyen kódolást szokás szisztematikusnak nevezni, mi az MDS kódoknál találkozunk vele újra.

Ebből máris megkaphatjuk az első nemtriviális egyenlőtlenséget a kód paraméterei között, ez a *Hamming-korlát* (más néven gömbkitöltési korlát):

**10.1.3. Tétel.** *Ha egy* GF($q$) *test feletti* $(n, M, d)$ *kód* $e$ *hibát javít, akkor*

$$M \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq q^n.$$

*Bizonyítás.* A bal oldalon levő összeg az $e$ sugarú gömbben levő vektorok számát adja meg. ■

Azokat a kódokat, amelyekre a 10.1.3. Tételben egyenlőség teljesül, *perfekt*nek nevezzük. Ilyenkor tehát a kódszavak köré rajzolt $e$ sugarú gömbök egyrétűen és hézagtalanul kitöltik az $n$ dimenziós GF($q$) feletti vektorteret. Mivel a perfekt kódok a lehető legjobb kódok, így fontos minél több ilyet ismerni. Erre a kérdésre nemsokára részletesebben is visszatérünk. Lássuk először a világ legegyszerűbb sok hibát javító perfekt kódját, az ismétlés-kódot („Hát maga megbolondult, hát maga megbolondult, hogy mindent kétszer mond, hogy mindent kétszer mond...").

**10.1.4. Definíció.** $[n,1,n]$ *ismétlés-kód*nak nevezzük az $(1,\ldots,1)$ által generált (egydimenziós) lineáris kódot. □

Jegyezzük meg, hogy az ismétlés kód $\lfloor n/2 \rfloor$ hibát képes javítani, azaz páratlan $n$-re ezek a kódok perfektek. *Triviális* perfekt kódnak szokták nevezni ezen ismétlés kódokon felül az egy kódszóból álló kódokat is.

A perfekt kódok létezésére számos elemi feltétel ismert, ráadásul a bináris esetben könnyen kapcsolatba hozhatók $t$-$(v, k, \lambda)$ blokkrendszerekkel. Lássunk most néhány ilyen jellegű eredményt.

**10.1.5. Állítás.** *Ha létezik* $n$ *hosszú, perfekt* $e$*-hibajavító kód* $q$ *elemű ábécé felett, akkor* $\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}(q-1)^i$ *osztója* $q^n$*-nek. Ha még* $q = p^a$ *prímhatvány is, akkor* $\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}(q-1)^i = q^k$ *is teljesül.*

*Bizonyítás.* A bizonyítást feladatnak (10.19.) hagyjuk. ■

Érdemes megjegyezni, hogy ha ismerjük egy kód $[n, k, d]_q$ vagy $(n, M, d)_q$ paramétereit, akkor ennek alapján automatikusan adódik, hogy a kód perfekt-e (példaként a későbbi Hamming-, illetve Golay-kódos ilyen állítást mondhatjuk, l. 10.1.12 és 10.2.6).

Tegyük fel, hogy $e$ hibát javító perfekt kódunk tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort. Ekkor minden $e+1$ súlyú szóhoz létezik olyan $2e+1 (= d)$ súlyú kódszó,

amelytől ő $e$ távolságra van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$A_{2e+1} = \frac{\binom{n}{e+1}(q-1)^{e+1}}{\binom{2e+1}{e}},$$

ahol $A_{2e+1}$ a $2e+1$ súlyú kódszavak számát jelöli, így egész szám.

Nagyjából ugyanez az észrevétel adja bináris perfekt kódok és blokkrendszerek kapcsolatát is.

**10.1.6. Állítás.** *Legyen $C$ bináris, $n$ hosszú $e$-hibajavító kód, melyre $\mathbf{0} \in C$. Tekintsük pontnak a koordináta-pozíciókat, blokknak pedig a $(2e+1)$ súlyú (tehát a minimális súlyú) kódszavak tartóit. Ekkor egy $(e+1)$-$(n,2e+1,1)$ blokkrendszert (Steiner-rendszert) kapunk.* ■

A korábbi okfejtésből ez az állítás világos. Ekkor viszont alkalmazhatjuk a $t$-rendszerek létezéséhez szükséges oszthatósági feltételeket, amiből azt kapjuk, hogy az

$$\frac{\binom{n-h}{e+1-h}}{\binom{2e+1-h}{e+1-h}}, \quad h = 0, \ldots, e$$

számok egészek. Ha $h = 0$-t helyettesítünk, akkor ($q = 2$-re) visszakapjuk a korábbi $A_{2e+1}$-re vonatkozó feltételt, míg ha $h = e$-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy ha létezik bináris perfekt $e$-hibajavító kód, akkor $\frac{n+1}{e+1}$ egész kell legyen.

Vizsgáljuk meg a kis $e$-k értékét. Ha $e = 1$, akkor a Hamming-kódok perfektek (l. 10.1.12), $e = 2$,3-ra viszont más a helyzet.

**10.1.7. Állítás.** *Nem-triviális, bináris, 3-hibajavító perfekt kódok csak a Golay-kódok lehetnek, azaz $n = 23$.*

*Bizonyítás.* A 3 sugarú gömbben $1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k$ szó van. Ebből az $(n+1)(n^2 - n + 6) = 3 \cdot 2^{k+1}$ egyenletet kapjuk. Modulo $(n+1)$ vizsgálva a bal oldali második tényező 8. Ha most $(n+1)$ osztható lenne 16-tal, akkor a második tényező 24-nek osztója kell legyen, ami nem lehetséges. Ellenkező esetben viszont $n+1$ osztója 24-nek. A lehetőségek: $n = 0$,1,2, amihez nem tartozik kód, $n = 3$, ami egy egyetlen szóból álló triviális kód, $n = 7$, ami a triviális ismétlés kódnak felel meg (l. 10.1.12), végül $n = 23$, ami a Golay-kódnak felel meg (l. később 10.2.6). ■

Az $e = 2$ esetben bonyolultabb (számelméleti) segédeszközökre van szükségünk.

**10.1.8. Állítás.** *Nincsen nemtriviális, bináris, 2-hibajavító perfekt kód.*

*Bizonyítás.* A 2 sugarú gömbben most $1+n+\binom{n}{2} = 2^k$ szó van. Ezt átalakítva a $(2n+1)^2 = 2^{k+3} - 7$ diofantoszi egyenlethez jutunk. Szerencsére ezt algebrai

számelméleti eszközökkel vizsgálták és a megoldások $2n+1 = 1,3,5,11$ és 181. Az $n = 90$ eset az $e+1|n+1$ feltétel miatt kizárható, a többi eset vagy nem felel meg kódnak, vagy triviális kódot ad (például $n = 5$-re az ismétlés kódot, 10.1.4). ■

A gyakorlatban a kódolással két célunk van, egyrészt minél jobb hibajavító képességet elérni, másrészt mindezt nem túl nagy kódhosszal. Vegyük észre, hogy a $C$ kód dimenziója a továbbítható üzenetek számával van kapcsolatban, tehát $k$-t állandónak tekinthetjük. A minimális súly ugyancsak (általában műszaki feltételekből számítható) konstans, így fix $k$ (vagy $M$) és $d$ mellett a lehető legkisebb $n$-et szeretnénk elérni.

Mielőtt a lineáris kódok vizsgálatára térnénk, lássunk egy „jó" nemlineáris kódot.

Legyen $H_n$ egy $n$-edrendű Hadamard-mátrix. Cseréljük ki a $-1$-eket 0-ra $H_n$-ben és $-H_n$-ben. Ezen két mátrix sorai $2n$ darab $n$ hosszú $0-1$ vektort adnak meg. Legyen a $H$ Hadamard-kód ezen $2n$ vektor halmaza. Mivel egy Hadamard-mátrix két sora pontosan $n/2$ pozícióban tér el, könnyű látni, hogy ezen a módon egy $n/2$ minimális távolságú kódot kapunk (a részleteket l. a 10.1. feladatban). Ez a kód azért érdekes, mert az $n = 32$ esetben éppen ezt használta 1969-ben a Mariner Mars-szonda. Látható, hogy ebben az alkalmazásban a nagy hibajavító képesség volt lényeges, hisz pl. a dekódolás a Földön történt, ami gyakorlatilag nem jelentett időbeli korlátozást. Hasonló jellegű, nagy minimális távolságú nemlineáris kódot kaphatunk a Paley-mátrixból is (l. 10.2. feladat.)

Természetes kérdés, hogy hogyan adhatunk meg lineáris kódokat? Elegendő, ha $C$ egy bázisát adjuk meg. Ha ennek a bázisnak az elemeit egy mátrix soraiba írjuk, akkor így a $C$ kód egy *generátormátrix*át kapjuk. Eszerint a $G$ generátormátrixból a kódszavakat ($C$ elemeit) a sorok lineáris kombinációjaként kapjuk meg. Érdemes megemlíteni, hogy alkalmas bázist választva mindig elérhetjük, hogy a generátormátrix első $k$ oszlopában egységmátrix legyen. Generátormátrixszal adott lineáris kódok esetén a kódolás nagyon egyszerű, a kódolandó ($k$ hosszú!!) üzenetet egyszerűen megszorozzuk a $G$ mátrixszal. Ha tehát el akarjuk dönteni, hogy egy $\mathbf{w} \in V(n,q)$ vektor hozzátartozik-e a $C$ kódhoz, akkor a $\mathbf{w} = \mathbf{x}G$ egyenletet kellene megoldanunk. Ezt egyszerűbben is megtehetjük, ha ismerjük $C$ ortogonális kiegészítőjét.

**10.1.9. Definíció.** Vezessük be $V(n,q) = V$-n a szokásos skaláris szorzást, azaz az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorok skaláris szorzata legyen $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. A $C$ kód *duális*a a $C^{\perp} = \{\mathbf{w} \in V : (\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \in C\}$ kód. Ha $H$ a $C^{\perp}$ duális kód egy generátormátrixa, akkor $H$-t a $C$ kód *ellenőrző* mátrixának nevezzük. □

Ez azt jelenti, hogy $H$ sorai ortogonálisak a kódszavakra, azaz $C$ elemei éppen azok az $\mathbf{x}$ vektorok, amelyekre $\mathbf{x}H^T = \mathbf{0}$ teljesül. Azt is könnyű látni, hogy (lineáris) $[n,k,d]_q$ kód duálisa lineáris $[n,n-k,d']_q$ kód, alkalmas $d'$-re. Ha egy kód generátormátrixa a kanonikus $(I_k\ A)$ alakban van adva, akkor az ellenőrző mátrix felírható $(-A^T\ I_{n-k})$ alakban (l. 10.21. feladat). Itt szokás szerint $I_n$ az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli. Ha egy kód generátormátrixának valamely oszlopaiban lineáris leképezéssel el tudjuk érni, hogy egységmátrix kerüljön, akkor azt szokták mondani, hogy a kód szisztematikus ezeken a helyeken. A ellenőrző mátrix előbbi felírása azt mutatja, hogy ha egy lineáris kód bizonyos $k$ helyen szisztematikus, akkor a duális kódja szisztematikus a többi helyeken.

Fontos megjegyzeni, hogy lineáris kódokra két kód ekvivalenciájának definiálásakor a koordináták permutálása mellett a koordináták nemnulla testelemmel való szorzását is megengedtük. (Meg lehetne engedni a testautomorfizmusok koordinátánkénti alkalmazását is, ezt azonban nem szokták megtenni.)

**10.1.10. Definíció.** Legyen $n = (q^k - 1)/(q-1)$. Az $[n, n-k]$ *Hamming-kód* olyan kód melynek ellenőrző mátrixában az oszlopok éppen a $\mathrm{GF}(q)$ test feletti $k$ hosszú nemnulla oszlopvektorok, méghozzá, úgy, hogy két oszlop ne legyen egymás konstansszorosa. (Úgy is mondhatnánk, hogy az oszlopok a $\mathrm{PG}(k-1,q)$ pontjai(nak egy-egy reprezentánsa).) □

A legegyszerűbb ilyen kód a $q = 2$, $k = 3$ esetnek megfelelő bináris [7,4] Hamming-kód. Ekkor az ellenőrző mátrix a

$$H = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Általában a bináris ($q = 2$) esetben az ellenőrző mátrix oszlopai pontosan az $1,2,\ldots,2^{k-1}$ számok kettes számrendszerben felírt alakjai.

A $[7,4,3]$ Hamming-kódban a minimális súlyú vektorok egy 2-(7,3,1) Steiner-rendszert alkotnak, azaz egy Fano-síkot. Így ezt a legkisebb Hamming-kódot úgy is elképzelhetjük, hogy a kódszavak $\mathbf{0}, \mathbf{1}$, valamint a Fano-sík egyeneseinek (és azok komplementereinek) karakterisztikus vektorai. Szép feladat megmutatni (l. 10.22 feladat), hogy a 10.1.6. Állítás alapján a Hamming-kódokhoz tartozó Steiner-rendszer (STS) éppen a $\mathrm{PG}_{k-1}(k,2)$ projektív tér. Megjegyezzük, hogy vannak nemlineáris perfekt 1-hibajavító kódok is, ilyeneket Vassiliev, Lindström és Schönheim konstruáltak (l. 10.12. feladat). Ezekből más STS-eket is megkaphatunk.

Alapvetően fontos és meglehetősen általános észrevétel, hogy tetszőleges lineáris kódra a $H$ ellenőrző mátrixból ki tudjuk olvasni a kód minimális távolságát.

**10.1.11. Állítás.** *A $C$ kód minimális távolsága pontosan akkor $d$, ha az ellenőrző mátrix bármely $d-1$ oszlopa független, de van $d$ olyan oszlop, amelyek lineárisan összefüggők.*

*Bizonyítás.* A kód egy $d$ súlyú vektora éppen $d$ oszlopra ad meg lineáris összefüggést. ■

**10.1.12. Tétel.** *A Hamming-kódok perfektek (minimális súlyuk 3).*

*Bizonyítás.* Az ellenőrző mátrix bármely két oszlopa független, de van három összefüggő oszlop, így a minimális távolság 3. Az 1 sugarú gömb mérete $1+n(q-1)=1+(q^k-1)=q^k$, $M=q^{n-k}$, azaz a 10.1.3. Tételben valóban egyenlőség van. ■

**10.1.13. Definíció.** A Hamming-kódok duális kódját *szimplex kód*nak nevezzük. A paraméterek tehát $n=(q^m-1)/(q-1)$ és $k=m$. □

Ezen kódoknak szép geometriai leírása van, mely nevüket is magyarázza. Generátormátrixuk egy $m \times n$-es mátrix, melyben a koordináta-pozíciók a $\mathrm{PG}(m-1,q)$ projektív tér pontjainak feleltethetők meg. Az egyes sorokban azokon a helyeken van 0, ahol a projektív térbeli pontnak valamelyik (az $i$. sor esetén az $i$-edik) koordinátája 0. Ez ugyanígy igaz, ha a generátormátrix sorai helyett azok egy lineáris kombinációját vesszük. (A részleteket l. a 10.23. feladatban.) Így a $\mathbf{0}, \mathbf{1}$-től különböző kódszavak súlya mind ugyanaz, mégpedig $q^{m-1}$. Az ilyen kódokat szokták *ekvidisztáns* kódoknak nevezni.

Zárjuk a perfekt kódokról szóló fejtegetéseinket a témakör főtételével.

**10.1.14. Tétel.** (Tietäväinen, van Lint) *Nem triviális perfekt kód, amely legalább két hibát javít csak a bináris vagy ternér Golay-kód lehet, ha az ábécé elemszáma prímhatvány.*

Mivel kevés perfekt kód van, fontos más jó kódosztályokat ismerni. Ezek gyakran olyanok, hogy valamilyen, a minimális távolságra vonatkozó becslést egyenlőséggel teljesítenek. Ilyen becslés például a következő.

**10.1.15. Tétel. (Singleton-korlát)** *Ha $C$ lineáris $[n,k,d]$ kód, akkor $d \leq$ $\leq n-k+1$.*

*Bizonyítás.* Mivel az ellenőrző mátrix mérete $(n-k)\times n$, így rangja legfeljebb $(n-k)$, azaz $(n-k)$-nál több oszlop nem lehet független. ■

Jegyezzük meg, hogy a Singleton-korlát nemlineáris kódokra is kiterjeszthető. Ha ugyanis egy $d$ minimális távolságú $n$ hosszú kódban $d-1$ koordinátát kitörlünk (ezt kódelméletben „lyukasztás"-nak szokták nevezni), akkor két különböző kódszóból nem kaphatjuk ugyanazt a vektort eredményül. Így $M \leq q^{n-d+1}$ hiszen a $d-1$ koordináta törlése után $M$ különböző, $n-d+1$ hosszú szót kapunk.

**10.1.16. Definíció.** Ha a $C$ lineáris kódra $d = n-k+1$, akkor a kódot *MDS* kódnak (Maximum Distance Separable) nevezzük. □

Az MDS kódokra sokáig sejtés volt, hogy hosszuk legfeljebb $q+1$ (illetve $q+2$ lehet, ha $k=3$ vagy $k=q-2$). Ezt, legalábbis abban az esetben, ha $q$ prím, nemrégiben Simeon Ball látta be.

**10.1.17. Tétel.** *Ha $q \neq 2$ prím, akkor egy MDS kód hossza legfeljebb $q+1$.*

Az elnevezésben a „maximum distance" arra utal, hogy a Singleton-korlát egyenlőséggel teljesül, a „separable" pedig arra, hogy a kód tetszőleges $k$ helyen szisztematikus, azaz a kódszavak szétvághatók értékes és ellenőrző részre.

**10.1.18. Állítás.** *MDS kód duálisa is MDS.*

*Bizonyítás.* A duális kód hossza $n$, dimenziója $n-k$, így azt kell belátnunk, hogy minimális súlya $k+1$. Legyen $H$ a kód ellenőrző mátrixa, amely egyben az ortogonális kód generátormátrixa. Legyenek $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k$ a generátormátrix sorai. Kellene, hogy $\lambda_1\mathbf{h}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{h}_k$ súlya nagyobb, mint $k$. Először ezt magukra a $\mathbf{h}_i$-kre lássuk be: ha $\mathbf{h}_i$ súlya legfeljebb $k$, akkor a legalább $n-k$ olyan oszlop van $H$-ban, ahol 0 áll az $i$-edik sorban. Ekkor viszont a megfelelő $(n-k)\times(n-k)$-as részmátrix determinánsa 0, azaz az oszlopok összefüggőek, ellentmondás. Tetszőleges lineáris kombinációra úgy térhetünk át, hogy a $H$-t lecseréljük egy olyan mátrixra, amelyben a lineáris kombináció éppen egy sor. Eszerint $C^\perp$ minimális súlya legalább $k+1$, akkor viszont a Singleton-korlát szerint egyenlőség kell álljon. ■

Ez az állítás magyarázza azt, hogy a $k=3$ eset mellett miért kivétel $k=q-2$ is.

**10.1.19. Definíció.** Jelöljük a lehető legrövidebb, $d$ minimális súlyú és $k$ dimenziós lineáris kód hosszát $M(d,k;q)$-val. (Ez a jelölés nem standard, de a jelen fejezetben mi ezt használjuk.) □

Jegyezzük meg, hogy a Singleton-korlát úgy is írható, hogy $n \geq d+k-1$, azaz a 10.1.19. Definícióban bevezetett $M(d,k;q)$-ra

$$M(d,k;q) \geq d+k-1$$

teljesül és egyenlőség éppen az MDS kódokra áll.

Lássunk példát MDS kódokra. Legyen a $C$ kód ellenőrző mátrixa a

$$H = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & & & \\ t_1^r & t_2^r & \dots & t_n^r \end{pmatrix},$$

ahol a $t_i$ elemek a $\mathrm{GF}(q)$ test páronként különböző nemnulla elemei. Ha ennek a mátrixnak $r+1$ oszlopát kiválasztjuk, akkor azok lineárisan függetlenek (hiszen a megfelelő aldeterminánsVandermonde típusú), így a $H$ által meghatározott kód $n$ hosszú, $k = n-r$ dimenziós és a fenti állítás miatt minimális súlya $d = r+1$, vagyis valóban MDS.

Ezeknek a kódoknak (az ún. *Reed–Solomon* (röviden RS) kódoknak) is igen jelentős gyakorlati alkalmazásai vannak, a közismert CD-lejátszók ezt használják, persze némileg megcsavarva (a $q = 2^8$, $(n,k,d) = (32{,}28{,}5)$, és $(28{,}24{,}5)$ választással).

A Reed–Solomon-kódokat kicsit más módon is megadhatjuk.

**10.1.20. Definíció.** Legyen $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a $\mathrm{GF}(q)$ test $n$ darab páronként különböző eleméből álló vektor. Legyen továbbá $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ olyan rögzített vektor, amelyre $v_i \neq 0$ minden $i = 1, \dots, n$-re. Legyen a $\mathrm{GRS}_k(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ kód az alábbi

$$\mathrm{GRS}_k(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = \{(v_1 f(\alpha_1), \dots v_n f(\alpha_n)) \quad : \quad \deg(f) < k\}.$$

Ezt a kódot *általánosított Reed–Solomon-kódnak* nevezzük. Más szóval a $k$-nál alacsonyabb fokú polinomokat kiértékeljük az $\alpha_1, \dots \alpha_n$ helyeken, majd az eredményt koordinátánként megszorozzuk a $\mathbf{v}$ vektorral. □

Mivel a $k$-nál kisebb fokú polinomok $k$ dimenziós vektorteret alkotnak, azonnal kapjuk, hogy $\mathrm{GRS}_k(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ valóban $k$-dimenziós lineáris kód. Az, hogy $\mathrm{GRS}_k(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ minimális súlya (és így minimális távolsága is) legalább $n-k+$ $+1$ könnyen következik abból, hogy egy ennél kisebb súlyú kódszó olyan $f$ polinomból keletkezhetne, amely legalább $k$ helyen 0. Ilyen polinom viszont csak a zérus polinom lehet.

**10.1.21. Állítás.** $\mathrm{GRS}_k(\mathbf{a}, \mathbf{v})^\perp = \mathrm{GRS}_{n-k}(\mathbf{a}, \mathbf{v}')$, *alkalmas* $\mathbf{v}'$ *vektorra.*

*Bizonyítás.* A $\mathbf{v}'$ vektort a $k = n-1$ eset alapján keressük meg (ez azt is mutatja, hogy $k$-tól függetlenül ugyanaz a $\mathbf{v}'$ jó lesz). Mivel $\mathrm{GRS}_{n-1}(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ MDS kód, így duálisa $\mathrm{GRS}_{n-1}(\mathbf{a}, \mathbf{v})^\perp$ is az. Ez viszont azt jelenti, hogy $\mathrm{GRS}_{n-1}(\mathbf{a}, \mathbf{v})^\perp$ minimális távolsága $n-1+1 = n$. Ha tehát ezt az 1 dimenziós kódot $\mathbf{v}' = (v_1', \dots, v_n')$ generálja, akkor $v_i' \neq 0$, minden $i$-re. Felírva

azt, hogy $\mathbf{v}'$ merőleges a $\mathrm{GRS}_{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{v})$ kód egy bázisára, azt kapjuk, hogy

$$0=\sum_{i=1}^{n} v_i v_i' \alpha_i^j, \quad 0\le j<n-1.$$

Itt persze a $j$. egyenletben az $x^j$ polinomot értékeltük ki az $\mathbf{a}$ helyeken. Ebből azonnal következik, hogy a $(v_1\alpha_1^s,\dots,v_n\alpha_n^s)$ vektor is ortogonális a $(v_1'\alpha_1^t,\dots,v_n'\alpha_n^t)$ vektorra, ha $s+t<n-1$. Mivel esetünkben $t\le n-k-1$, $s\le k-1$, ez tényleg teljesül. ■

Jegyezzük meg, hogy ez az állítás mutatja, hogy miért érdemes a Reed–Solomon-kód helyett az (egyébként vele ekvivalens) általánosított Reed–Solomon-kódokat vizsgálni: az ugyanis nem igaz, hogy RS kód duálisa is RS kód volna, GRS kódokra viszont ez igaz.

Eredetileg a Reed–Solomon-kódok definíciójában az $\mathbf{a}$ vektor az $n$-edik egységgyökökből állt. Ha $\alpha$ $n$-edik primitív egységgyök, akkor legyen $\mathbf{a}=$ $=(1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1})$, a $\mathbf{v}$ vektor pedig legyen $\mathbf{1}$. Nem nehéz megmutatni, hogy az így definiált GRS kód duálisában a $\mathbf{v}'$ vektor maga az $\mathbf{a}$, azaz ebben a speciális esetben a GRS kód ellenőrző mátrixa

$$H=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-k} & \alpha^{2(n-k)} & \dots & \alpha^{(n-k)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Vandermonde típusú mátrix. Úgy is elképzelhetjük, hogy a $\mathbf{c}=(c_0,c_1,\dots,c_{n-1})$ kódszavakat a $c(x)=c_0+c_1x+\dots c_{n-1}x^{n-1}$ polinom írja le. Ha $\mathbf{c}$-t megszorozzuk a $H$ $i$-edik sorának transzponáltjával, akkor a kapott eredmény éppen $c(\alpha^i)$ lesz. Azaz a kódszavaknak megfelelő polinomokra $c(\alpha)=c(\alpha^2)=$ $=\dots=c(\alpha^{n-k})=0$, vagyis $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-k})|c(x)$ teljesül. Másképpen, ez a speciális Reed–Solomon-kód az $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-k})$ polinom $n$-nél kisebb fokú többszöröseiből áll. Ezt a speciális példát picit általánosíthatjuk, az $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-k})$ helyett vehetjük a $g(x)=$ $=(x-\alpha^t)(x-\alpha^{t+1})\cdots(x-\alpha^{n-k})$ polinom $n$-nél kisebb fokú többszöröseit is. Alkalmas $\mathbf{v}$-re ezek is GRS kódok, így speciálisan MDS kódok. Ezek a kódok motiválják majd a ciklikus kódok bevezetését.

A Reed–Solomon-kódok kapcsán érdemes átismételni a másodéven BCH kódokról tanultakat. Ehhez a résztest feletti kódokat kell felidézzük. Legyen $F$ részteste $K$-nak, a bővítés foka legyen mondjuk $m$. Legyen $C$ a $K$ test feletti $n$ hosszú kód. Ekkor két lehetőségünk van $C$-ből $F$ feletti kódot csinálni, az egyik az, ha $K$ elemeit $F$ feletti $m$ hosszú vektorokként felírjuk, és $C$ kódszavaiban minden koordinátát egy ilyen $m$ hosszú vektorral helyettesítünk. Ezt tehát két kód konkatenációja, belülre az a triviális kód kerül, amely az

$F^m$ minden elemét tartalmazza. Természetesen ez a felírás függ attól, hogy az $F|K$ testbővítésben milyen bázist választunk.

Számunkra a másik mód lesz érdekes: egyszerűen tekintsük $C$ azon kódszavait, amelyeknek minden koordinátája a kis $F$ testben van. Ezt a kódot $C_{|F}$-fel jelölhetjük, és *résztest részkód*nak nevezzük. Világos, hogy egy ilyen kód minimális távolsága legalább $C$ minimális távolsága, és persze lineáris kódból lineárisat kapunk. Hogyan kaphatjuk meg $C_{|F}$ egy ellenőrző mátrixát? Ehhez felírjuk $C$ ellenőrző mátrixát $H$-t, majd minden elemét (amely tehát $K$ eleme) azzal az $m$ hosszú oszlopvektorral helyettesítjük, amely az ő felírása az $F|K$ testbővítés egy rögzített bázisában. Így a $H^*$ mátrixot kapjuk. Ha $C$ $[n,k,d]_q$ kód volt, akkor $H$ egy $(n-k)\times n$-es mátrix, így $H^*$ $(n-k)m\times n$-es mátrix lesz. A $H^*$ mátrix jó ellenőrző mátrixnak abból a szempontból, hogy minden $\mathbf{x}\in C_{|F}$-re $\mathbf{x}H^{*T}=\mathbf{0}$, de nem lesz feltétlen jó abból a szempontból, hogy sorai nem biztos, hogy lineárisan függetlenek. Így a tényleges $H_0$-t $H^*$-ból úgy kaphatjuk meg, hogy néhány sort törlünk úgy, hogy a kapott mátrix sorai lineárisan függetlenek legyenek. Ezek a megfigyelések igazolják az alábbi következményt.

**10.1.22. Következmény.** *Ha $C$ $[n,k,d]$ kód $K$ felett, $K$ $m$-edfokú bővítése $F$-nek, akkor $C_{|F}$ $[n,k_0,d_0]$-kód $F$ felett és $d_0\geq d$, $n-m(n-k)\leq k_0\leq k$.*■

A BCH kódok is ilyen résztest részkódjai a fenti speciális Reed–Solomon-kódoknak, azaz a kódszavakat polinomként leírva többszörösei a $g(x)=$ $=(x-\alpha^t)(x-\alpha^{t+1})\cdots(x-\alpha^{\delta-2})$ polinomnak. A korábbi $(n-k)$-ból lett $\delta-1$, így az RS kódok MDS volta a BCH kódokra az alábbi állítást adja.

**10.1.23. Következmény.** *Az $\alpha^t,\alpha^{t+1},\ldots,\alpha^{t+\delta-2}$ elemekhez tartozó BCH kódokra $d\geq\delta$.*

Ez magyarázza, hogy a $\delta$ paramétert *tervezett távolság*nak szokták nevezni.

Jegyezzük meg azt is, hogy $g(x)$ a kis $F$ test feletti polinom, de az a polinom, aminek ő többszöröse, a nagy $K$ test felett van definiálva. Ez persze azt is jelenti, hogy $g(x)$ nemcsak a felsorolt $(x-\alpha^j)$ tényezőkkel osztható, hanem az $(x-\alpha^{jq^i})$ tényezőkkel is, hiszen a $q$-adik hatványra emelés fixen hagyja $F$ elemeit (és automorfizmusa $K$-nak, sőt azt is tanultuk algebrából, hogy csak ezek a $K$ olyan automorfizmusai, amelyek $F$ elemeit fixen hagyják). Ha tehát egy $\beta\in K$ elem minimálpolinomját akarjuk felírni, akkor kell vegyük a $\beta$, $\beta^q$, $\beta^{q^2}$, ... elemeket mindaddig, amíg vissza nem kapjuk $\beta$-t. Ha így a $\beta,\beta^q,\ldots,\beta^{q^r}$ elemeket írtuk fel, akkor $\beta$ minimálpolinomja $m_\beta(x)=$ $=\prod_{i=1}^{r}(x-\beta^{q^i})$ lesz. Ha pedig egy $F[x]$-beli polinom osztható $(x-\beta)$-val, akkor osztható $m_\beta(x)$-szel is. Eszerint az $\alpha^t,\alpha^{t+1},\ldots\alpha^{t+\delta-2}$ elemekhez tartozó BCH kód $g(x)$ generátorpolinomja a felsorolt elemek minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse lesz.

Talán itt érdemes megismerkedni a bináris Reed–Muller-kódokkal is, mert azok konstrukciója hasonló a GRS kódokéhoz abban az értelemben, hogy bizonyos (itt többváltozós) függvényeket értékelünk ki bizonyos helyeken (itt egy hiperkocka pontjain).

**10.1.24. Definíció.** Legyen $H = \{0,1\}^m$ az $m$ -dimenziós hiperkocka, $F = \mathrm{GF}(2)$, $V : F[x_1, \ldots, x_m] \to F^H$, amely egy $F$ polinomhoz annak a hiperkockán felvett értékeit rendeli hozzá. Legyen

$$\mathrm{RM}_{m,k} = \{V(f) \ : \ \deg(f) \leq k, \deg_{x_i}(f) \leq 1\}.$$

Az így kapott kódot *Reed–Muller-kód*nak nevezzük. □

Az RM-kód definíciójában tehát csak a multilineáris polinomokat értékeltük ki a hiperkockán. Ez elég, hiszen amiatt, hogy csak a 0,1 értékeket helyettesítjük a polinomokba, a $V$ kiértékelés magtere,

$$\ker V = (x_1^2 - x_1, \ldots, x_m^2 - x_m),$$

a felsorolt polinomok által generált ideál. Könnyű meggondolni, hogy az $\mathrm{RM}_{m,k}$ kód lineáris és dimenziója $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$. Ez azon múlik, hogy a multilineáris polinomok között a monomok, azaz az $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ alakú polinomok függetlenek. Ez amiatt igaz, mert minden multilineáris polinom felírható monomok összegeként, továbbá a $H \to K$ függvények terének dimenziója $2^m$, hiszen ezt a teret generálják azok a függvények (polinomok, és így multilineáris polinomok), amelyek a hiperkocka egy csúcsában 1, mindenütt másutt 0 értéket vesznek fel.

A minimális távolságot sem nehéz megadni Reed–Muller-kódokra.

**10.1.25. Állítás.** $\mathrm{RM}_{m,k}$ *minimális távolsága* $2^{m-k}$.

*Bizonyítás.* Egyrészt a $V(x_1 \cdots x_k)$ súlya pontosan $2^{m-k}$. Azt, hogy ennél kisebb súlyú kódszó nem lehet, $k$-ra és $m$-re vonatkozó indukcióval láthatjuk be, $k = 0$-ra tetszőleges $m$-re teljesül, hogy a minimális távolság $2^m$. Ha már $k$-nál kisebb fokú vagy $m$-nél kevesebb változós polinomokra tudjuk az állítást, akkor tekintsük a $k$-adfokú $f$ multilineáris polinomot, és írjuk fel $f = x_m g(x_1, \ldots x_{m-1}) - h(x_1, \ldots x_{m-1})$ alakban, ahol $\deg(g) \leq k-1$, $\deg(h) \leq k$. Ha $g$ vagy $g + h$ azonosan nulla, akkor az indukciós feltevés miatt $2^{m-1-(k-1)}$ olyan $m-1$ hosszú vektor van, amelyre $f$ értéke nem nulla. Ezeket az első esetben 1-gyel, a másodikban 0-val kiegészítve $2^{m-k}$ olyan vektort (a hiperkocka csúcsát) kapunk, ahol $f$ nem nulla. Ha sem $g$, sem $g + h$ nem azonosan nulla, akkor $x_m = 0$-t helyettesítve a $h$, míg $x_m = 1$-et helyettesítve a $g - h$ $(m-1)$-változós polinomokhoz keresünk olyan vektorokat, ahol ők nem nullák. Ez az indukciós feltétel miatt összesen $2^{m-1-k} + 2^{m-1-k} = 2^{m-k}$ olyan helyet jelent, ahol $f$ nem nulla. ■

Abban is hasonlítanak a Reed–Muller-kódok a Reed–Solomon-kódokra, hogy duálisuk is hasonló típusú.

**10.1.26. Állítás.** $\mathrm{RM}_{m,k}^{\perp} = \mathrm{RM}_{m,m-k-1}$.

*Bizonyítás.* Azt kell ellenőrizni, hogy $\mathrm{RM}_{m,k}$ és $\mathrm{RM}_{m,m-k-1}$ egy bázisának elemei merőlegesek. Ez elég, hiszen

$$\dim \mathrm{RM}_{m,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}, \quad \dim \mathrm{RM}_{m,m-k-1} = \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{m}{i},$$

amelyek összege $2^m$, azaz a multilineáris függvények terének dimenziója. A legegyszerűbb bázis elemei $V(x_{i_1} \cdots x_{i_s})$, $s \leq k$, illetve $V(x_{j_1} \cdots x_{j_t})$, $t \leq$ $\leq m-k-1$ alakúak. Két ilyen függvény szorzatában nem fordulhat elő az összes változó, így azon helyek száma, ahol a két függvény szorzata 1, vagyis azon helyek száma ahol $x_{i_1} = \ldots x_{i_s} = 1$, $x_{j_1} = \ldots = x_{j_t} = 1$, biztosan páros. (Konkrétan, ha a szorzatban $m-h$, $h \geq 1$ változó szerepel, akkor $2^h$.) Eszerint a skaláris szorzat kiszámításakor páros sokszor adunk össze 1-et. ■

A hiperkockára gondolhatunk a GF(2) feletti AG($m$,2) affin térként is. Ebben a szemléltetésben természetes az alterek karakterisztikus függvényeit vizsgálni.

**10.1.27. Állítás.** *Ha $S$ legfeljebb $k$ kodimenziós affin altere $H$-nak, akkor $S$ karakterisztikus vektora benne van az $\mathrm{RM}_{m,k}$ kódban. Megfordítva, az $\mathrm{RM}_{m,k}$ kódot generálják az ilyen alterek karakterisztikus vektorai.*

*Bizonyítás.* Az $S$ alteret előállíthatjuk hipersíkok metszeteként. Egy ilyen hipersík egyenlete lineáris, mondjuk $a_1x_1 + \ldots a_mx_m + a_{m+1} = 0$ alakú. A hipersík karakterisztikus vektorát úgy kapjuk meg, ha a $a_1x_1 + \ldots a_mx_m +$ $+ a_{m+1} + 1$ kifejezéseket összeszorozzuk és tekintjük $V(f)$-et az így kapott $f$-re. Kifejtve a szorzatot, látjuk, hogy minden tag foka legfeljebb $k$. Megfordítva, $V(x_{i_1} \cdots x_{i_s})$ nem más, mint a $\prod_{j=1}^{s}(x_{i_j}+1)$ által definiált $s$ kodimenziós altér karakterisztikus vektora. ■

Itt tehát tulajdonképp vettük az affin tér $k$-dimenziós altereinek karakterisztikus vektorát, és az ezek által generált kódot vizsgáltuk. Ugyanezt meg lehet tenni blokkrendszerek esetén is. Itt a blokkok karakterisztikus vektorai által generált lineáris kódot tekintjük, és a kapott kód vizsgálata sok információt ad a blokkrendszerről. Abban az esetben, ha a struktúra természetesen beágyazható $q$-adrendű térbe, szokták az illeszkedési mátrix sorai által GF($p$) felett generált kódokat vizsgálni, ahol $q = p^h$. Ezzel a témakörrel foglalkozik Assmus és Key *Designs and their codes* című monográfiája [2].

Két nevezetes speciális esetben már látott kódot kapunk vissza.

**10.1.28. Példa.** Tekintsük az $\mathrm{RM}_{m,m-2}$ kódot és lyukasszuk ki a $(0,\ldots,0)$-nak megfelelő helyen (azaz eldobjuk $V(f)$-ből az $f(0,\ldots 0)$ koordinátát). Nem

nehéz meggondolni, hogy így a $[2^m-1,2^m-1-m,3]$ paraméterű Hamming-kódot kapjuk vissza.

Az $\mathrm{RM}_{m,1}$-kód speciális esete a fejezet elején tárgyalt Hadamard-kódoknak, a paraméterek $[2^m, m+1, 2^{m-1}]$. Tekintsük ugyanis azon függvényeket, amelyeknek nincs konstans tagjuk. Ekkor egy $[2^m, m, 2^m-1]$ kódot kapunk. Ha itt átírjuk a 0-kat $-1$-re, akkor $2^m \times 2^m$-es Hadamard-mátrixot kapunk. Az is megmutatható, hogy ez éppen a Sylvester konstrukcióval (azaz $2\times 2$-es Hadamard-mátrix Kronecker-hatványozásával) kapható Hadamard-mátrix.

Érdemes meggondolni az előző példák kapcsolatát szimplex kódokkal is (l. a 10.1.26. Állítást, illetve a 10.24. feladatot).

Ismerkedjünk meg végül egy nagyon fontos kódosztállyal, a *ciklikus kódok* osztályával.

**10.1.29. Definíció.** A $C$ kódot *ciklikus*nak nevezzük, ha $(c_0,\dots,c_{n-1})\in C$-ből következik $(c_{n-1},c_0,\dots,c_{n-2})\in C$. □

Ezek a kódok legkényelmesebben polinomokkal írhatók le, mint a motiváló RS kódos példában. A $(c_0,\dots,c_{n-1})$-nek feleltessük meg a $c(x)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ polinomot. A ciklikus eltolás a következőképpen írható le a polinomok nyelvén: szorozzunk $x$-szel, majd az eredményt redukáljuk modulo $(x^n-1)$. Eszerint minden polinomot érdemes a $\mathrm{GF}(q)[x]/(x^n-1)$ faktorgyűrű elemének tekinteni. A szavak tehát ezen polinomgyűrű elemei, a kódok pedig polinomok bizonyos halmazai. Mivel a szóban forgó polinomok halmaza vektortér is, a lineáris kódok is természetesen láthatóak ebben a reprezentációban.

**10.1.30. Tétel.** *Egy $C$ lineáris kód pontosan akkor ciklikus, ha a megfelelő polinomhalmaz ideál a $\mathrm{GF}(q)[x]/(x^n-1)$ faktorgyűrűben.*

*Bizonyítás.* Ez egyszerűen azért igaz, mert tetszőleges polinommal való szorzás visszavezethető az $x$-szel való szorzásra és a vektortér-műveletekre. ■

Mivel a $\mathrm{GF}(q)[x]/(x^n-1)$ gyűrű főideálgyűrű, minden $C$ ciklikus kódhoz találhatunk egy $g(x)$ *generátorpolinom*ot, amely nem más, mint a legkisebb fokú $C$-beli (pl. egy főegyüttható́s) polinom. Ez a generátorpolinom egyértelmű, és osztója kell legyen $(x^n-1)$-nek, különben ugyanis $g(x)$ és $(x^n-1)$ legnagyobb közös osztója alacsonyabb fokú $C$-beli polinom lenne. A $g(x)$ együtthatóiból könnyen felírhatjuk a kód generátormátrixát is, ha $g(x)=$ $=\sum_{i=0}^{n-k} g_i x^i$, akkor

$$G=\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & g_0 & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & & & & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & & & g_0 & g_1 \dots & g_{n-k} \end{pmatrix}$$

lesz a generátormátrix. Az ellenőrző mátrix megfelelője a $h(x) = (x^n-1)/g(x)$ *ellenőrző* polinom, a $C$ kódszavai éppen azok a polinomok, amelyeket $h(x)$-szel megszorozva 0-t kapunk a $\mathrm{GF}(q)[x]/(x^n-1)$ gyűrűben. Feladatként (10.3. feladat) érdemes felírni az ellenőrző mátrixot is. Fontos megjegyezni, hogy a $g(x)$ által generált ciklikus kód duálisának nem $h(x)$, hanem annak reciprokpolinomja, azaz $h(\frac{1}{x})x^{\deg(h)}$ lesz a generátorpolinomja. Az eddig elmondottak alapján ciklikus kódok konstruálásához az $x^n-1$ polinom $\mathrm{GF}(q)$ feletti faktorizációját lenne jó ismerni. Ha tehát $x^n-1$ gyökeit (azaz az $n$-edik egységgyököket) nézem $\mathrm{GF}(q)$ egy bővítésében, akkor olyan gyökhalmazokat kell tekinteni, amelyek a testbővítés automorfizmusaira nézve invariánsak. Ha a gyököket a bővítés egy primitív $n$-edik egységgyökének hatványaival írjuk fel, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy a kitevők a $q$-val való szorzásra zártak legyenek. Emlékeztetünk, hogy a BCH kódokat is így állítottuk elő. Mivel BCH kódok minimális távolsága legalább a $\delta$ tervezett távolság, a BCH kódok minimális távolságára vonatkozó korlát ciklikus kódokra az alábbit jelenti.

**10.1.31. Következmény.** (BCH-korlát) *Legyen $g(x)\in\mathrm{GF}(q)[x]$, $g(x)|x^n-1$ a $C$ ciklikus kód generátorpolinomja. Tekintsük $g(x)$ gyökeit $\mathrm{GF}(q)$ egy olyan $K=\mathrm{GF}(q^m)$ bővítésében, amely tartalmazza az $n$-edik egységgyököket. Ha $\alpha$ primitív $n$-edik egységgyök, és $\alpha$-nak egymást követő kitevőjű $\delta-1$ hatványa mind gyöke $g(x)$-nek (tehát valamilyen $t$-re az $\alpha^t,\dots,\alpha^{t+\delta-2}$ elemek), akkor $C$ minimális súlya legalább $\delta$.*

Az egyik legegyszerűbb eset, ha $n=q-1$, amikor nincs bővítés. Ekkor pl. vehetjük egy primitív elem első $d$ hatványát. Így a már látott Reed–Solomon-kódokat kapjuk vissza.

Egy másik egyszerű eset a *kvadratikus maradék kód*ok esete. Tegyük fel, hogy $n$ páratlan prím, és $q$ kvadratikus maradék mod $n$. (A $q=2$ esetről l. a 10.4. feladatot.) Legyen $\alpha$ egy primitív $n$-edik egységgyök $\mathrm{GF}(q)$ egy olyan bővítésében, amely az összes $n$-edik egységgyököt tartalmazza. Legyen

$$g_0(x)=\prod_{i=1}^{n-1}(x-\alpha^{i^2}),\quad g_1(x)=\prod_{j\neq i^2}(x-\alpha^j).$$

Ekkor mind $g_0$, mind $g_1$ $\mathrm{GF}(q)$-beli együtthatós polinomok (ehhez kell az, hogy $q$ kvadratikus maradék mod $n$), továbbá

$$x^n-1=(x-1)g_0(x)g_1(x).$$

A $C=((g_0(x))$ kódot hívják *kvadratikus maradék* kódnak. Ezeket a kódokat sokat vizsgálták (l. pl. van Lint [58], Par. 6.9.), mi majd csak egy speciális esetben térünk vissza rájuk a Golay-kódokkal kapcsolatban. Egy példát mindenképpen érdemes említeni: ha $q=2$, $n=7$, akkor

$$x^7-1=(x-1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1),$$

s a $g_0(x) = (x^3 + x + 1)$ által generált kvadratikus maradék kód korábbi jó ismerősünk, a (perfekt) [7,4,3] Hamming-kód.

Kvadratikus maradék kódok minimális súlyára az alábbi (messze nemtriviális) eredmények ismertek. Ezt a tételt nem bizonyítjuk.

**10.1.32. Tétel.** *Legyen $C$ $n$ hosszú kvadratikus maradék kód. Ha $\mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ olyan $w$ súlyú kódszó, amelyre $\sum c_i \neq 0$, akkor $w^2 \geq n$. Ha $n \equiv -1 \pmod 4$, akkor $d^2 - d + 1 \geq n$.*

## 10.2. A Golay-kódok

Mielőtt rátérnénk a Golay-kódok konstrukciójára, lássunk egy nagyon egyszerű eljárást, amellyel kódokat hosszabbá tehetünk. Ez nem más, mint a paritásellenőrző bit (l. 10.1.2) általánosítása.

**10.2.1. Definíció.** Ha $C$ egy $n$ hosszú kód a $\mathrm{GF}(q)$ ábécé felett, akkor a $\bar{C}$ *kibővített* kód a

$$\bar{C} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}) \ : \ (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C, \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0\}$$

kódszavakból áll. □

A legegyszerűbb a konstrukció a bináris esetben, ekkor tényleg a paritásellenőrző bit hozzábiggyesztéséről van szó. Világos, hogy ha $C$ minimális távolsága $d$, és ez páratlan, akkor $\bar{C}$-é $d + 1$ lesz. Szintén a bináris esetben világos, hogy az ellenőrző mátrix minden sorát egy 0-val kell kibővíteni, és egy új csupa egyesből álló sort kell még hozzácsapni (l. részletesebben a 10.5. feladatot).

Ezután térjünk át a bináris Golay-kódok egyértelműségének igazolására. A bizonyításhoz néhány egyszerű lemmát és egy lineáris kódokra vonatkozó konstrukciót kell felhasználjunk.

**10.2.2. Lemma.** *Legyenek $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{GF}(2)^n$ olyan vektorok, amelyekre $4|w(\mathbf{x})$ és $4|w(\mathbf{y})$. Ekkor $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ súlya pontosan akkor osztható 4-gyel, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ortogonális.*

*Bizonyítás.* Jelölje $c$ azon helyek számát, ahol mindkét kódszóban egyes áll. Ekkor $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv c \pmod 2$ és $w(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2c$, tehát mindkét állítás pontosan akkor igaz, ha $c$ páros. ■

**10.2.3. Definíció.** Legyen $C$ lineáris $[n, k, d]_2$-kód $w_0 < 2d$ valamely $\mathbf{c}_0$ kódszó súlya. Permutálva a koordinátákat feltehető, hogy $\mathbf{c}_0 = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$

alakú. Írjuk be $\mathbf{c}_0$-t $C$ egy generátormátrixának első sorába és egészítsük ki generátormátrixszá. Ekkor

$$G = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

alakú lesz. A $B$ mátrix (mely $(k-1) \times (n-w_0)$ méretű) által generált kódot nevezzük $C$ $\mathbf{w}_0$-ra vonatkozó *reziduális kód*jának. □

**10.2.4. Állítás.** *Az előző definíció jelöléseit használva a kapott reziduális kód paraméterei* $[n-w_0, k-1, d']_2$*, ahol* $d' \geq d - \frac{w_0}{2}$.

*Bizonyítás.* Az első két paramétert könnyű meggondolni, a minimális távolságot pedig az alábbi módon láthatjuk. Legyen a $\mathbf{c}$ kódszó vetülete az utolsó $n-w_0$ koordinátára $w$ súlyú. Ekkor $\mathbf{c}$ a $\mathbf{0}$ és $\mathbf{c}_0$ szavak egyikétől legfeljebb $w + \frac{w_0}{2}$ távolságra van. Mivel ez legalább $d$, valóban azt kapjuk, hogy $d' \geq d - \frac{w_0}{2}$. (Jegyezzük meg, hogy lényegében ugyanez mutatja, hogy a dimenzió csak 1-gyel csökken.) ■

**10.2.5. Lemma.** *A* $\mathbf{0}$*-t tartalmazó bináris perfekt kód súlyeloszlását paraméterei meghatározzák.*

*Bizonyítás.* Legyenek $C$ paraméterei $(n, M, d = 2e+1)$. A perfektség miatt minden $\mathbf{x}$ pontosan egy $C$-beli kódszótól lesz legfeljebb $e$ távolságra. Egy $i$ súlyú kódszó esetén az $\mathbf{x}$ súlya $i-e$ és $i+e$ között kell legyen. Ebből az alábbi rekurziót kapjuk:

$$\binom{n}{i} = C_{i,i-e}A_{i-e} + \ldots + C_{i,i}A_i + \ldots + C_{i,i+e}A_{i+e},$$

ahol

$$C_{i,i-k} = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{e-k}{2} \rceil} \binom{n-(i-k)}{k+j}\binom{i-k}{j}, \quad C_{i,i+k} = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{e-k}{2} \rceil} \binom{i+k}{k+j}\binom{n-(i+k)}{j},$$

ha $e \leq i \leq n-e$. Mivel $A_0 = 1$, $A_1 = \ldots = A_{2e} = 0$, ebből valamennyi $A_j$ egyértelműen kifejezhető. ■

A kapott rekurzió kicsit bonyolult, de érdemes a Hamming-kódokra konkrétan kiszámolni (l. 10.25. feladat). Speciálisan ez azt adja, hogy a Hamming-kódokkal azonos paraméterű nemlineáris kódoknak is ugyanaz a súlyeloszlása, mint a Hamming-kódoké. A fenti lemma igaz nembináris kódokra is, l. 10.30. feladat.

**10.2.6. Tétel.** *A* [23,12,7] *bináris Golay-kódok perfektek.*

*Bizonyítás.* L. a 10.6. feladatot, azt kell csak ellenőrizni, hogy a 3 sugarú gömbben $2^{11}$ szó van. ■

Hasonlóan a 10.1.7. Állításban szereplő (23,$2^{12}$,7) kódok perfektek lévén a súlyeloszlásuk kiszámolható. Azt kapjuk, hogy $A_1 = A_{23} = 1$, $A_7 = A_{16} = 253$, $A_8 = A_{15} = 506$ és $A_{11} = A_{12} = 1288$, a többi $A_j$ nulla. Ez nagyon fontos lesz a Golay-kódok egyértelműségének bizonyításában.

**10.2.7. Tétel.** *Legyen $C$ egy $\mathbf{0}$-t tartalmazó* (24,$2^{12}$,8) *kód. Ekkor $C$ (a koordináták permutációjától eltekintve) egyértelmű. Ezt az egyértelmű (lineáris) kódot $\mathcal{G}_{24}$-gyel jelöljük.*

*Bizonyítás.* Lyukasszuk ki $C$-t egy tetszőleges helyen. Ekkor egy (23,$2^{12}$,7) kódot kapunk, ami perfekt. Ekkor viszont a kilyukasztott kódban csak, 0, 7, 8, 11, 12, 15, 16 és 23 súlyú szavak lehetnek a 10.2.5. Lemma utáni megjegyzés miatt. Így az eredeti $C$-ben csak 0, 8, 12, 16 és 24 súlyú szavak lehettek, másképp ügyetlenül lyukasztva meg nem engedett súlyt kapnánk (pl. egy 11 súlyú kódszót olyan helyen kilyukasztva, ahol egyes áll, 10 súlyú szót kapnánk). Ugyanez elmondható $C$ helyett $\mathbf{u}+C$-re is, ahol $\mathbf{u} \in C$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C$-ben bármely két kódszó távolsága 0, 8, 12, 16, vagy 24 lehet. A 10.2.2. Lemma szerint ez azt is mutatja, hogy $C$ bármely két kódszava ortogonális, azaz $C \subseteq C^\perp$. Ekkor persze $\langle C\rangle \leq C^\perp$ is teljesül. Mivel $|C| = 2^{12}$ a $\langle C\rangle$ altér legalább 12 dimenziós. Ugyanakkor viszont $\dim(C) \leq \dim(C^\perp) = 24 - \dim(C)$ miatt $\dim(\langle C\rangle) = 12$ és $C = \langle C\rangle$ következik. Kaptuk tehát, hogy $C$ önortogonális, lineáris $[24,12,8]_2$ kód.

Képezzünk reziduális kódot egy 12 súlyú $\mathbf{c}_0$ kódszóra vonatkozóan. A kapott kód paraméterei a 10.2.4. Lemma miatt $[12,11,\geq 2]_2$ lesznek, azaz a Singleton korlát miatt a minimális távolság 2 és a kód MDS. Ez viszont csak úgy lehet, ha az ellenőrző mátrix (1,1,...,1) és ekkor a kód éppen a páros súlyú szavakból áll. Így a reziduális kód generátormátrixa

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ I_{11} & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix},$$

vagyis $C$ generátormátrixa felírható

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \\ 0 & & A & & & I_{11} & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

alakban, ahol $A$ egy $11 \times 11$-es mátrix. Az első oszlopban a csupa 0-t úgy érhetjük el, hogy ha egyes lenne, akkor az adott sorhoz hozzáadjuk $\mathbf{c}_0$-at (azaz az első sort).

A bizonyítás végén az $A$ mátrix tulajdonságait vesszük szemügyre. Mivel a minimális súly 8, $A$ minden sorában legalább 6 egyes van. 10 egyes viszont nem lehet, mert akkor az adott sort az elsőhöz adva 4 súlyú kódszó keletkezne. Másrészt viszont a kódszavak súlyának néggyel való oszthatósága miatt, ha 6-nál több egyes van, akkor legalább 10 is lenne. $A$ bármely két sorában a közös egyesek száma 3. Ha legfeljebb 2 közös egyes lenne, akkor a két sor összegében legalább 8 egyes lenne, amiből $\mathbf{c}_0$ hozzáadásával legfeljebb 6 súlyú kódszót kapnánk. Ha legalább 4 közös egyes lenne, akkor a két sor összege megint legfeljebb 6 súlyú kódszót adna.

Ez azt jelenti, hogy $A$ egy 2-(11,6,3) paraméterű blokkrendszer illeszkedési mátrixa. Egy ilyen blokkrendszer komplementere a 3.1.7. Állítás szerint 2-(11,5,2) blokkrendszer, azaz bisík. A bisíkokról szóló fejezetben Hussain-gráfokkal beláttuk, hogy a $k = 5$-ös bisík egyértelmű, amiből a Golay-kódok egyértelműsége is adódik. Mivel a Paley-konstrukció ilyen bisíkot ad meg, így ez a szóban forgó bisík. ■

Ebből a bizonyításból az alábbi generátormátrix adódik. Az hogy a mátrix tényleg a megadott paramétereknek megfelelő kódot ad meg vagy a bizonyításból olvasható ki, vagy közvetlenül is ellenőrizhető (l. a 10.26. feladatot).

$$
\begin{array}{c}
\infty\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ \infty\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 \\
\begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Lássuk a Golay-kódok néhány más konstrukcióját. Minden esetben kulcsfontosságú, hogy belássuk azt, hogy a kód duplán páros (azaz minden kódszó súlya néggyel osztható), valamint azt, hogy a kód önduális (a konstrukciók nagy része automatikusan lineáris kódot ad). Mint azt a 10.2.2. Lemma mutatja, a duplán párosságot felhasználhatjuk az öndualitás igazolásához is. Persze minden esetben ki kell zárjuk a 4 súlyú kódszavak létezését. A most következő konstrukció a Hamming-kódokból indul ki.

**10.2.8. Példa.** Ha $C$ a bináris [7,4,3] Hamming-kódból indulunk ki, akkor $\bar{C}$ önduális [8,4,4] kód (l. 10.31. feladat).

Ezen Hamming-kódokra építve is meg tudjuk konstruálni a bináris Golay-kódokat. Ez a konstrukció Turyntól ered. Induljunk ki a $H$ bináris [7,4] Hamming-kódból, melynek ellenőrző mátrixa a

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

mátrix. Könnyű látni, hogy $H$ éppen a $\mathbf{0}$ szóból, az (1,1,0,1,0,0,0) szó hét ciklikus eltoljtából, valamint ezen szavak komplementumaiból áll. Legyen $H^*$ az a kód, amelyet $H$-ból a szavak megfordításával nyerünk, és legyen $\bar{H}^*$ ennek kibővítettje. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\bar{H}$ és $\bar{H}^*$ 8 hosszú, 4 dimenziós kódok és $\bar{H} \cap \bar{H}^* = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$. Idézzük fel, hogy mindkét kód minimális súlya 4, valamint hogy önduálisak (10.2.8).

Legyen $\bar{C}$ az alábbi 24 hosszú kód:

$$\bar{C} = \{(\mathbf{a}+\mathbf{x}, \mathbf{b}+\mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{a},\mathbf{b} \in \bar{H}, \mathbf{x} \in \bar{H}^*\}.$$

Ha $\mathbf{a},\mathbf{b}$ a $\bar{H}$, $\mathbf{x}$ pedig a $\bar{H}^*$ egy bázisát futja be, akkor így $\bar{C}$ egy bázisát kapjuk, azaz $\bar{C}$ egy [24,12] kód. A felsorolt vektorok páronként ortogonálisak (hiszen minden nyolcas darabjukban páros sok közös egyes van), így $\bar{C}$ önduális. A fenti bázisvektorok mindegyikének súlya 4-gyel osztható, így $\bar{C}$ minden kódszavára ugyanez igaz, hiszen két kódszó összegében az egyesek helyének szimmetrikus differenciájának megfelelő pozíciókban lesznek egyesek, ennek mérete két néggyel osztható szám összege mínusz a metszet méretének kétszerese, de a metszet mérete az öndualitás miatt páros.

Most már az lesz a célunk, hogy megmutassuk, hogy $\bar{C}$ minimális súlya 8. Ehhez csak azt kell lássuk, hogy 4 súlyú szó nem lehet $\bar{C}$-ben. Indirekte legyen $\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{x}, \mathbf{b}+\mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{x})$ egy 4 súlyú szó. Mindhárom nyolcas blokkba kerülő szórész súlya páros, így valamelyik nyolcas rész $\mathbf{0}$ kellene legyen. Mivel $\bar{H} \cap \bar{H}^* = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, azt kapjuk, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vagy $\mathbf{x} = \mathbf{1}$.) Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor mindhárom nyolcas részben a $\bar{H}$ egy-egy szavát kapjuk. Mivel ezen részek súlya 0 vagy legalább négy és közülük legfeljebb egy lehet nullvektor, kapjuk, hogy $\mathbf{c}$ súlya legalább 8, ami ellentmondás. ■

A $\mathcal{G}_{23}$ perfekt bináris *Golay-kód* ezek után az utolsó koordináta törlésével (lyukasztás) keletkezik $\bar{C} = \mathcal{G}_{24}$-ből, ez tehát egy 23 hosszú, 12 dimenziós kód, a minimális súly pedig 7. A korábban megadott generátormátrixból tehát $\mathcal{G}_{23}$ generátormátrixa az utolsó oszlop törlésével kapható.

**10.2.9. Megjegyzés.** S. L. Snover 1973-ban belátta, hogy bármely (nem feltétlen lineáris) $(23, 2^{12}, 7)$ kód ekvivalens $C$-vel.

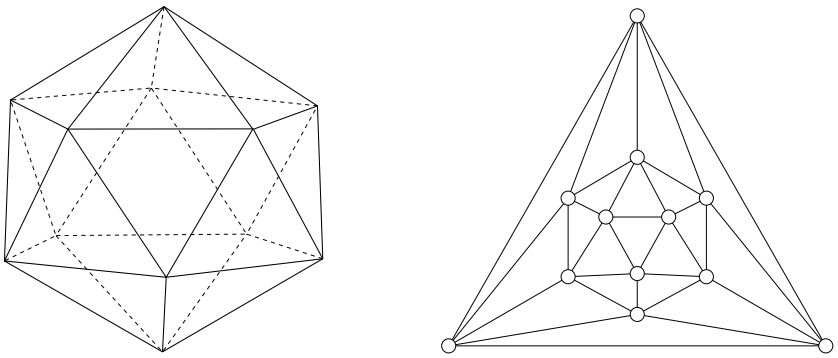
Lássuk a Golay-kódok néhány további előállítását!
Legyen $q = 2$, $n = 23$. Ekkor

$$x^{23}-1 = (x-1)(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1).$$

Ha $\alpha$ primitív 23-adik egységgyök ($K = \mathrm{GF}(2^{11})$-ben), akkor a két tényező egyikének gyökei $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}, \alpha^{32} = \alpha^9, \alpha^{18}, \alpha^{36} = \alpha^{13}, \alpha^{26} = \alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}$, a másik tényező gyökei ezek inverzei. Tehát a másik tényező az $x^{11}g(1/x)$ polinom, amint azt a kitevőkön látjuk. Tekintsük a $g(x)$ által generált $G$ kódot, amely $g(x)$ legfeljebb 22 fokú többszöröseiből áll. Ehhez a szavak végére paritásbitet biggyesztve kapjuk a $\bar{G}$ kódot. A BCH-korlát (l. 10.1.31. Következmény) azonnal adja, hogy $G$ minimális távolsága legalább 5. Megmutatható (l. 10.27. feladat), hogy $G^\perp \subset G$, méghozzá 1 kodimenziós altér. Ezt felhasználva beláthatjuk, hogy $\bar{G}^\perp = \bar{G}$, azaz $\bar{G}$ önortogonális. Mivel $G$-nek a $g(x), xg(x), \ldots, x^{11}g(x)$ polinomok egy bázisát adják, és ezen szavak súlya 7, a paritásbittel kibővítve súlyuk 8 lesz. Ekkor viszont a 10.2.2. Lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $\bar{G}$-ban minden kódszó súlya 4-gyel osztható. Ez viszont azt jelenti, hogy $\bar{G}$ minimális súlya 8, azaz $\bar{G} = \mathcal{G}_{24}$. Ha most töröljük az utolsó bitet, akkor látjuk, hogy $G = \mathcal{G}_{23}$ a perfekt Golay-kód.

Jegyezzük meg, hogy hivatkozhattunk volna a Snover-tételre is, amely a perfekt Golay-kódok egyértelműségét mondja ki, de azt, hogy $G$ minimális súlya 7, nem lenne könnyű belátni. Ehhez segítene, hogy a kapott kód QR kód is, de akkor sem lenne magától értetődő ez a tulajdonság.

A Golay-kódot megkaphatjuk az ikozaéder élgráfja segítségével is. Legyen $N$ ennek $A$ szomszédsági mátrixából a 0-k és egyesek felcserélésével kapott mátrix, és legyen $G = (I_{12}|N)$.



10.1. ábra. Az ikozaéder

**10.2.10. Tétel.** *$G$ a $\mathcal{G}_{24}$ generátormátrixa.*

*Bizonyítás.* $G$ minden sora ortogonális önmagára, hiszen $N$-ben minden sorban 7 egyes van. Két sor skaláris szorzata a sorokat indexelő csúcsok közös szomszédainak számából fejezhető ki. Mivel átellenes csúcsoknak nincs közös szomszédja, a többiekre két közös szomszéd van, $A$-ban nulla vagy két közös egyes volt, azaz $N$-ben nulla vagy két közös nulla van, tehát a közös egyesek száma 2, illetve 4, vagyis a skaláris szorzat tényleg 0 (mod 2). Eszerint tehát a kód önortogonális, és mivel $G$ minden sorának súlya 8, a kódban minden szó súlya osztható 4-gyel a 10.2.2. Lemma miatt. Tehát csak azt kell meggondolni, hogy nem lehet 4 súlyú kódszó. Egy ilyen kódszó $G$ néhány sorának összege kellene legyen. Az eddigiekből könnyű látni, hogy egy vagy két sor összege nem lehet 8 súlyú. Ha négynél több sort adunk össze, akkor már az első 12 koordinátában legalább 5 egyes lesz. Három vagy négy sor összegénél meggondolható, hogy a második 12 koordinátában nem lehet 1 vagy 0 egyes (a részleteket l. a 10.28. feladatban). ■

Az ikozaéderes előállítást kicsit elemibb tárgyalásban megtalálhatjuk [33]-ban.

Felírhatjuk $G^\perp = G$ generátormátrixát is. Ez $N = N^T$ miatt $(N|I_{11})$ alakú lesz, ami azt jelenti, hogy a $\mathcal{G}_{24}$ Golay-kódban az első és második 12 koordinátát fel lehet cserélni. Az eddigiekből az is következik, hogy a $\mathcal{G}_{24}$ Golay-kód automorfizmuscsoportja (ahol a koordináták permutációit nézzük) tranzitív a koordinátákon. Ez azt is jelenti, hogy bármely helyen kilyukasztva $\mathcal{G}_{24}$-et ugyanazt a kódot kapjuk. Így $\mathcal{G}_{24}$ egyértelműségéből a Snover-tétel, azaz $\mathcal{G}_{23}$ egyértelműsége is következik.

Talán a Golay-kódok legmeglepőbb előállítása a következő mohó eljárás. Induljunk ki a 24 hosszú $(0,0,\dots,0)$ szóból. Ha már néhány kódszót kiválasztottunk, amelyek páronkénti távolsága legalább 8, akkor az ezek mindegyikétől legalább 8 távolságra lévő szavak közül vegyük hozzá a lexikografikusan legkisebbet. Emlékeztetőül: az $\mathbf{u}$ lexikografikusan kisebb $\mathbf{v}$-nél, ha az első olyan koordinátájukra, ahol különböznek egymástól, az $\mathbf{u}$ koordinátája a kisebb. Tehát az első lépésben $\mathbf{0}$ után a $(0,\dots,0,1\dots1)$ vektort kapjuk, ahol 16 db 0 után 8 egyes szerepel. A következő vektor 12 nulla után 4 egyest, majd 4 nullát, végül 4 egyest tartalmaz. Nehéz bizonyítani (és igen meglepő is), hogy ezen a módon a $\mathcal{G}_{24}$ kódot kapjuk.

Lássuk, hogy a Golay-kódok milyen kapcsolatban vannak a blokkrendszerekkel! Ehhez térjünk vissza $\mathcal{G}_{24}$ súlypolinomjának kiszámítására.

**10.2.11. Definíció.** Ha egy $n$ hosszú $C$ kódra $A_i$ jelöli az $i$ súlyú kódszavak számát, akkor az

$$A(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i$$

polinomot a $C$ súlypolinomjának nevezzük. □

Ugyanezt a jelölést (ti. azt, hogy az $i$ súlyú szavak számát $A_i$ jelöli) használtuk akkor is, amikor szükséges feltételeket kerestünk perfekt kód létezésére.

A most következő MacWilliams-től származó azonosság segít kiszámítani $C^\perp$ súlypolinomját, ha ismerjük $C$ súlypolinomját. Ezt is felhasználhatjuk $\mathcal{G}_{24}$ súlypolinomjának kiszámítására, amit korábban már kiszámoltunk, felhasználva, hogy perfekt kód (itt a $\mathcal{G}_{23}$) meghatározza a súlypolinomját.

**10.2.12. Tétel. (MacWilliams)** *Legyen $C$ egy $[n,k]$ kód a $\mathrm{GF}(q)$ test felett, $C^\perp$ pedig a duálisa. A súlypolinomokat jelölje rendre $A(z)$ és $B(z)$. Ekkor*

$$B(z) = q^{-k}(1+(q-1)z)^n A\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z}\right).$$

A Golay-kódokra való alkalmazás előtt feladatként számoljuk ki a Hamming-kódok súlypolinomját (a szimplex kódból) a MacWillams azonosság szerint (l. 10.29. feladat).

Ezután számítsuk ki a kibővített Golay-kód súlypolinomját. Tudjuk, hogy a minimális távolság 8, továbbá, hogy minden kódszó súlya 4-gyel osztható, így a súlypolinom $A(z) = 1 + az^8 + bz^{12} + az^{16} + z^{24}$ alakú. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy a csupa 1 vektor benne van a kódban, s így a 8 súlyú kódszavak száma azonos a 16 súlyúakéval. Még azt is tudjuk, hogy $2 + 2a + b = 2^{12}$, hiszen ez éppen a kódszavak száma. Mivel a Golay-kód önduális, alkalmazva McWilliams-tételét egy második összefüggést kapunk $a$ és $b$ között, amiből majd meghatározhatjuk a súlypolinomot.

$$A(z) = 2^{-12}(1+z)^{24} A\left(\frac{1-z}{1+z}\right),$$

vagyis

$$\begin{aligned} 1 + az^8 + bz^{12} + az^{16} + z^{24} = 2^{-12}((1+z)^{24} + a(1-z)^8(1+z)^{16} + \\ +b(1-z)^{12}(1+z)^{12} + a(1-z)^{16}(1+z)^8 + (1-z)^{24}. \end{aligned}$$

Itt a bal oldalon $z^2$ együtthatója 0, míg ugyanez a jobb oldalon

$$2^{-12}\left(2\binom{24}{2} + 2a\left(16\cdot 8 + \binom{8}{2} + \binom{16}{2}\right) - 12b\right).$$

A két egyenletből álló rendszert megoldva $a = 759$ adódik. A súlypolinom ismeretében már könnyű belátni a Golay-kódok alábbi igen fontos tulajdonságát:

**10.2.13. Tétel.** *A kibővített Golay-kód 8 súlyú szavai egy* $5-(24,8,1)$ *Steiner-rendszer blokkjai.*

*Bizonyítás.* Két 8 súlyú kódszó legfeljebb 4 pozícióban lehet azonos. Ha ugyanis ennél több azonos koordináta volna, akkor a két szó összege legfeljebb 6 súlyú volna. Ez azt jelenti, hogy ha megadunk 5 pozíciót, akkor legfeljebb egy olyan 8 súlyú kódszó van, amelyben ezeken a helyeken egyes áll. Ilyen ötöst $\binom{24}{5}$-féleképpen tudunk kiválasztani, s egy blokkot (nyolc súlyú szót) $\binom{8}{5}$ ötösnél számolunk. Így legfeljebb $\binom{24}{5}/\binom{8}{5} = 759$ blokkunk lehet, de fentebb láttuk, hogy pontosan ennyi van. Ez viszont azt jelenti, hogy minden adott koordináta-ötöshöz egy és csak egy olyan nyolc súlyú szó van, amely itt egyeseket tartalmaz. ■

A tételben szereplő Steiner-rendszert szokás 24 pontú *Witt-féle* blokkrendszernek nevezni. Ennek derivált-rendszere egy 4-(23,7,1) blokkrendszer, ha pedig tovább deriválunk, akkor egy 3-(22,6,1) Steiner-rendszert kapunk. (Ezeket is szokás (23, ill. 22 pontú) Witt-féle blokkrendszereknek nevezni.) Ha még egyszer deriválunk, akkor egy 2-(21,5,1)-rendszert kapunk, ami nem más mint egy negyedrendű projektív sík. Mivel a szóban forgó projektív sík izomorfia erejéig egyértelmű, így csak a PG(2,4) testre épített sík lehet. Erre a megfigyelésre építve is meg lehet konstruálni a Witt-féle blokkrendszereket, amint azt a következő szakaszban vázolni is fogjuk. Érdemes megemlíteni, hogy a projektív síkok bővíthetőségének feltételéből azt kaptuk (l. 7.1.8. Állítás), hogy a sík rendje 2 vagy 4 kell legyen. A Fano-sík bővítésével az Hadamard-mátrixoknál már megismerkedtünk, a negyedrendű esetben pedig a 22 pontú Witt-féle blokkrendszer adja a bővítést.

Most nézzük meg, hogy hogyan lehet a *ternér Golay-kódokat* ehhez hasonló módon előállítani. Tekintsük a modulo 5 maradékosztálytest kvadratikus maradékai segítségével definiált Paley-mátrixot, azaz a

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 & + & - & - & + \\ + & 0 & + & - & - \\ - & + & 0 & + & - \\ - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & + & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot. $+$, ill. $-$ természetesen $+1$-et és $-1$-et jelöl, melyet a modulo 3 maradékosztálytest (GF(3)) elemének tekintünk. Legyen $C$ az a ternér (GF(3) felett definiált) kód, melynek generátormátrixa

$$G = \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & \\ I_6 & & & S_5 & & \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Ez a kód természetesen 11 hosszú és 6 dimenziós. A most következő tulajdonságokat nem bizonyítjuk, feladatként (10.9–10.10. feladatok) az olvasóra hagyjuk. Kibővített kódja $\bar{C}$ önduális, így benne a kódszavak súlya 3-mal osztható. $\bar{G}$ generátormátrixát úgy kapjuk $G$-ből, hogy egy

$$(0,-1,-1,-1,-1,-1)^T$$

oszlopot adunk $G$-hez. $\bar{G}$ sorai 6 súlyúak, így két oszlop kombinációja legalább 4, és így a hárommal való oszthatóság miatt legalább hat súlyú. Ebből kideríthető, hogy $\bar{C}$ minimális súlya 6, tehát $C$-é 5. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $C$ kód perfekt. A kapott kódot *ternér Golay-kód*nak nevezzük.

**10.2.14. Megjegyzés.** Tetszőleges $(11, 3^6, 5)$ kód ekvivalens a ternér Golay-kóddal. Ezt is Snover bizonyította.

Az eddigiekben megismerkedtünk néhány perfekt kóddal (Hamming-kódok, Golay-kódok). Mivel a perfekt kódok bizonyos értelemben a lehető legjobb kódok, kívánatos lenne minél több ilyen kódot ismerni (különösen, ha azt is figyelembe vesszük, hogy a Hamming-kódok csak egy hibát javítanak). Sajnos ebben az értelemben a helyzet rossz, lényegében az összes perfekt kóddal megismerkedtünk, a korábbiakban már láttunk ilyen irányú negatív eredményeket, pl. a Tietäväinen-van Lint eredményt.

Emlékeztetőül, ha $e = 1$, akkor a kódszavak száma megegyezik a Hamming-kódéval, de a kód nem feltétlen kell lineáris legyen (egy példát mutatunk a 10.11. feladatban, [58] 7.7.4 alapján). Persze, ha a kód lineáris, akkor az csak a Hamming-kód lehet (l. 10.12. feladat). Az 1-nél több hibát javító nemtriviális perfekt kódok pedig csak a most megismert Golay-kódok.

## 10.3. A Witt-féle blokkrendszerek

Ebben a fejezetben kicsit szemügyre vesszük a címben jelzett Witt-féle blokkrendszereket, melyekkel a Golay-kódok kapcsán már megismerkedtünk. Az egyszerűség kedvéért a nagy Mathieu-csoportokhoz tartozó Witt-rendszereket ismertetjük vázlatosan. Ez azt jelenti, hogy bizonyítás szinte egyáltalán nem lesz ebben a fejezetben, érdemes a bizonyításokkal önállóan megpróbálkozni.

**10.3.1. Állítás.** PGL(3,4) *tranzitív a hiperoválisokon. A* PG(2,4) *síkban 168 hiperoválisvan. Egy ponton 48, két ponton 12, három ponton 3 hiperoválismegy át, négy pont pedig egyértelműen egészíthető ki hiperoválissá.*

Az egyszerűség kedvéért jelölje $G$ a PGL(3,4)-et, $S$ pedig PSL(3,4)-et.

**10.3.2. Állítás.** *$S$ a hiperoválisokat három (56 hosszú) orbitban permutálja.*

Láttuk, hogy egy háromszög pontosan három hiperoválisban van benne, ez a három hiperoválisok különböző orbitban van. A szóban forgó hiperoválisorbitokat a most említett tulajdonság karakterizálja: ha hiperoválisok egy halmazában bármely két hiperoválisok legfeljebb két pontban metszi egymást, akkor legfeljebb 56 hiperoválisok lehet. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha a hiperoválisok-halmaz egy $S$-orbit.

Szükségünk lesz $G$, ill. $S$ hatására másodrendű (Fano-) részsíkokon is.

**10.3.3. Állítás.** *A Fano-részsíkok száma 360, ezeket $S$ három (120 hosszú) orbitban permutálja.*

Ahhoz, hogy ezekből az orbitokból tényleg össze tudjuk rakni a Witt-féle blokkrendszereket, még további tulajdonságok kellenek, mi csak magát a konstrukciót mondjuk el. Jelölje a három hiperoválisok-orbitot $H_1, H_2, H_3$, a három részsík-orbitot $R_1, R_2, R_3$. Alkalmasan választott indexeléssel a konstrukció az alábbi:

**A $W_{24}$ blokkrendszer:**
pontok: PG(2,4) pontjai és $\infty_1, \infty_2, \infty_3$.
blokkok:

PG(2,4) egyenesei hozzávéve $\infty_1, \infty_2, \infty_3$-et.

$H_i$ elemei hozzávéve $\infty_j, \infty_k$-t ($i, j, k$ az 1,2,3 egy permutációja)

$R_i$ elemei hozzávéve $\infty_i$-t ($i = 1,2,3$)

$\{(g \cup h) \setminus (g \cap h)\}$ $g, h$ egyenes.

A legfontosabb tény erről a blokkrendszerről az alábbi.

**10.3.4. Tétel.** *$W_{24}$ automorfizmus-csoportja az $M_{24}$ Mathieu-csoport, amely a pontokon 5-tranzitív. ($M_{24}$-ben 3 pont stabilizátora $S$).*

Hasonló konstrukció adható a kis Mathieu-csoportokhoz tartozó Witt-rendszerekre is. Ehhez néhány megjegyzés: AG(2,3)-on minden négyszög parallelogramma. Minden háromszög pontosan három négyszögben van benne. Van egy olyan 72 elemű $U$ részcsoportja az AGL(2,3) affin csoportnak, amely a négyszögeket három orbitban permutálja, és itt is minden háromszöget tartalmazó három négyszög különböző $U$-orbitban van benne. Persze ez az $U$ a pontokon szigorúan kétszeresen tranzitív. Jelöljük a négyszög-orbitokat $N_1, N_2$ és $N_3$-mal. Mivel minden négyszög parallelogramma, ezért minden négyszögnek pontosan egy nem ideális átlóspontja van. Ezeken $U$ szintén három orbitot létesít: $N_1^*, N_2^*$ és $N_3^*$. Természetesen a jelölést úgy érdemes választani, hogy $N_i^*$ az $N_i$-beli négyszögekből álljon, kibővítve átlóspontjukkal.

**A $W_{12}$ blokkrendszer:**
pontok: AG(2,3) pontjai és $\infty_1, \infty_2, \infty_3$.
blokkok:

PG(2,4) egyenesei hozzávéve $\infty_1, \infty_2, \infty_3$-et.

$N_i$ elemei hozzávéve $\infty_j, \infty_k$-t ($i, j, k$ az 1,2,3 egy permutációja)

$N_i^*$ elemei hozzávéve $\infty_i$-t ($i = 1,2,3$)

$\{(g \cup h)\}$ $g, h$ párhuzamos egyenesek.

A legfontosabb tény erről a blokkrendszerről az alábbi.

**10.3.5. Tétel.** *$W_{12}$ automorfizmus-csoportja az $M_{12}$ Mathieu-csoport, amely a pontokon szigorúan 5-tranzitív.*

Egy további megjegyzés, amely mutatja, hogy a geometria olykor csoportelméleti állításokat is megvilágít. Vegyünk egy unitér polaritását PG(2,4)-nek (l. az 1.1 szakaszt). Ennek autokonjugált pontjai egy AG(2,3) affin síkot alkotnak. Ráadásul az is megmutatható, hogy a $W_{24}$ nyoma ezen az affin síkon éppen $W_{12}$ lesz, amiből következik, hogy $M_{12}$ részcsoportja $M_{24}$-nek.

A Witt-féle blokkrendszerekből sok érdekes erősen reguláris gráf is származtatható.

**10.3.6. Példa.** (1) A $HS(100)$ gráf: csúcsai $W_{22}$ pontjai (22 pont), $W_{22}$ blokkjai (77 pont), és egy $\infty$ szimbólum. $\infty$-t összekötjük a 22 ponttal, és pont-blokk akkor és csak akkor lesz összekötve éllel, ha ők a $W_{22}$-ben illeszkedtek. Paraméterei: (100,22, 0, 6).

(2) $HS(77)$: a $W_{22}$ blokkgráfja. Paraméterei: (77,16, 0,4).

(3) A Gewirtz gráf: pontjai egy hiperoválisorbit elemei. Összekötés: diszjunktság. Paraméterei: (56, 10, 0,2). Ennek a gráfnak más konstrukcióját már láttuk a 8.1.15. Példában.

## 10.4. Feladatok

10.1. Lássuk be, hogy a Hadamard-kód minimális távolsága $n/2$.
10.2. Legyen $S$ a Paley-mátrix és tekintsük a $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ sorokat, valamint az $(S + + I + J)/2$ és $(-S + I + J)/2$ mátrixokat. Ennek sorait tekintsük egy kód szavainak.

Mutassuk meg, hogy így $(n, 2(n+1), (n-1)/2)$ paraméterű (nemlineáris) kódot kapunk.
10.3. Írjuk fel ciklikus kód ellenőrző mátrixát.

10.4. Mikor lesz a 2 kvadratikus maradék mod $p$?
10.5. Írjuk fel egy kód kibővítettjének ellenőrző mátrixát a $q = 2$ esetben.
10.6. Bizonyítsuk be 10.2.6-ot.
10.7. $\mathcal{G}_{24}$ Golay-kód tulajdonságai:

paraméterei [24,12,8], önduális, minden kódszó súlya 4-gyel osztható, $\mathbf{1} \in G_{24}$.
10.8. Lássuk be, hogy $G_{24}$ invariáns az

$$(\ell_\infty r_\infty)(\ell_0 r_0)(\ell_1 r_{10})(\ell_2 r_9)\dots(\ell_{10} r_1)$$

permutációra.

$G_{24}$ súlyeloszlása: 0 – 1, 8 – 759, 12 – 2576, 16 – 759, 24 – 1 (persze a jelölés súly – szavak száma).
10.9. $\mathcal{G}_{12}$ ternér Golay-kód tulajdonságai: önduális, minimális távolsága 6.
10.10. A $\mathcal{G}_{11}$ ternér Golay-kód perfekt.
10.11. Példa perfekt bináris nemlineáris kódra (Vassiliev, Lindtstöm, Schönheim):

Legyen $n = 2^m - 1$, $N = 2n + 1$, $C$ $n$ hosszú Hamming-kód. Legyen $f : C \to \mathrm{GF}(2)$ tetszőleges, melyre $f(0) = 0$. Legyen $p$ a paritásbit, azaz $p(\mathbf{v}) = v_1 + \ldots + v_n$. Legyen

$$C^* = \{(\mathbf{v}, \mathbf{c} + \mathbf{v}, p(\mathbf{v}) + f(\mathbf{c})) : \mathbf{c} \in C, \mathbf{v} \in \mathrm{GF}(2)^n\}.$$

Ekkor $C^*$ is perfekt 1-hibajavító kód (hossza $N$). Ha $f$ olyan, hogy a 0 és 1 értékeket nem ugyanannyiszor veszi fel, akkor $C^*$ nem lineáris (sőt nem is lineáris kód eltoltja).
10.12. Lássuk be, hogy 1-hibajavító perfekt lineáris kód csak a Hamming-kód lehet.
10.13. Lássuk be a $W_{24}$ konstrukciója előtt említett állításokat.
10.14. Konstruáljuk meg az $U$ részcsoportot. (PSU(3,4)!!)
10.15. Ellenőrizzük a $W_{22}$-höz tartozó erősen reguláris gráfok paramétereit.
10.16. Gondoljuk meg, hogy a Reed–Solomon-kódok ellenőrző mátrixa tényleg az, amit felírtunk.
10.17. Gondoljuk meg, hogy milyen $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{v}'$ vektorral kapjuk meg a Reed–Solomon-kódok általánosításait.
10.18. Mutassuk meg, hogy a Hamming-kódok BCH kódok.
10.19. Bizonyítsuk be 10.1.5. Állítást!
10.20. Gondoljuk meg 10.1.6. Állítást!
10.21. Ellenőrizzük, hogy $G = (I_k A)$-ra $H = (-A^T I_{n-k})$!
10.22. Lássuk be, hogy a 10.1.6. Állítás alapján a Hamming-kódból a $\mathrm{PG}_{n-1}(n, q)$ blokkrendszert kapjuk!
10.23. Írjuk fel a szimplex kód súlypolinomját!
10.24. Állítsuk elő a szimplex kódot RM kódként!
10.25. Írjuk fel a Hamming-kód súlypolinomját!

10.26. A $\mathcal{G}_{24}$ explicite megadott generátormátrixa segítségével lássuk be, hogy [24,12,8] kódot ad meg.
10.27. Mutassuk meg, hogy a Golay-kódok ciklikus előállításánál $(g(x))^{\perp} = = ((x-1)g(x))$!
10.28. Lássuk be az ikozaéderes konstrukció alapján, hogy a kapott kódra $d \geq 8$!
10.29. A MacWilliams azonosság segítségével határozzuk meg a Hamming-kódok súlypolinomját!
10.30. Mutassuk meg, hogy perfekt kód $q > 2$-re is meghatározza súlypolinomját!
10.31. Mutassuk meg, hogy a 10.2.8. Példában szereplő [8,4,4] Hamming-kód, és általában a paritásbittel bővített Hamming-kódok önduálisak!

# Irodalomjegyzék


[1] M. Aigner, G. Ziegler, *Bizonyítások a könyvből*, Typotex, Budapest, 2009.

[2] E. Assmus, J. Key, *Designs and their codes*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[3] L. Babai and P. Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics*, Chicago Univ. Press, 1992.

[4] S. Bagchi and B. Bagchi, *Designs from pairs of finite fields I. A cyclic unital ($U(6)$ and other regular Steiner 2-designs*, Technical Report 10/87, Indian Statistical Institute, 1987.

[5] S. Ball, On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis, *J. Eur. Math. Soc.* 14:733–748, 2012

[6] G. Bérczi, A. Gács, T. Szőnyi, Véges projektív síkok, in: Új matematikai mozaik (szerk.: Hraskó A.), pp. 53–76, Typotex, Budapest, 2002.

[7] G. Bérczi, A. Gács, A. Hraskó, T. Szőnyi, Reguláris gráfok, in: Új matematikai mozaik (szerk.: Hraskó A.), pp. 77–104, Typotex, Budapest, 2002.

[8] Th. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory*, Wissenschaftsverlag, 1985.

[9] Th. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory, I–II*, Cambridge University Press, 1999.

[10] K. N. Bhattacharya, On a new symmetrical balanced incomplete block design, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 36:91–106, 1944.

[11] R. C. Bose, Strongly regular graphs, partial geometries and partial balanced designs, *Pacific J. Math.*, 13:389–419, 1963.

[12] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, N. M. Singhi, Edge regular multigraphs and partial geometric designs with an application to the embedding of quasi-residual designs, in: *Atti dei Convegni Lincei*, No. 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, vol. I, pages 49–81, 1976.

[13] A. Brouwer, A. Cohen, M. Neumaier, *Distance regular graphs*, Springer, 1989.

[14] P. J. Cameron, Extending symmetric designs, *J. Comb. Th.*, A 14:215–220, 1973.

[15] P. J. Cameron, Strongly regular graphs, In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected topics in graph theory*, pages 337–360, Academic Press, 1978.

[16] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Graphs, Codes and Designs*, Volume 43 of *Lecture Note Series*, London Math. Soc. 1980.

[17] L. C. Chang, Association schemes of partially balanced block design with parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_2 = 15$ and $p_{11}^2 = 4$, *Sci. Record*, 4:12–18, 1959.

[18] H. S. M. Coxeter, *Projektív geometria*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[19] F. De Clerck, *Introduction to the theory of the designs*, in: Combinatorial structures, TEMPUS Lecture Notes, Eötvös University, 1993

[20] Gy. Elekes, A. Brunczel, *Véges matematika*, egyetemi jegyzet Eötvös Kiadó, 2006.

[21] P. Erdős, R. C. Mullin, V. T. Sós, D. R. Stinson, Finite linear spaces and projective planes, *Discrete Mathematics* 47:49–62, 1983.

[22] P. Erdős, A. Rényi, V. Sós, On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math.* 1:215–235, 1966

[23] G. Exoo, R. Jajcay, Dynamic cage survey, *Electronic. J. Comb.* DS16

[24] R. Freud, E. Gyarmati, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[25] A. Gewirtz, Graphs with maximal even girth, *Can. J. Math.*, 21:915–934, 1970.

[26] A. Gewirtz, The uniqueness of g(2,2,10,56), *Trans. New York Acad. Sci.*, 31:656–675, 1969.

[27] S. Győri, L. Györfi, I. Vajda, *Információ- és kódelmélet*, Typotex, Budapest, 2000.

[28] M. Jr Hall, *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967.

[29] M. Jr Hall, Cyclic projective planes, *Duke J. Math.*, 14:1079–1090, 1947.

[30] M. Jr Hall, W. S. Connor, An embedding theorem for balanced incomplete block designs, *Can. J. Math.*, 6:35–41, 1954.

[31] H. Hanani, D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, On resolvable designs, *Discrete Mathematics* 3:343–357, 1972.

[32] A. J. Hoffman, R. R. Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.*, 4:497–504, 1960.

[33] A. Hraskó, T. Szőnyi, Hibajavító kódok, in: Új matematikai mozaik (szerk.: Hraskó A.), pp. 139–170, Typotex, Budapest, 2002.

[34] D. R. Hughes, F. C. Piper, *Design Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[35] C. Huneke, The friendship theorem, *Amer. Math. Monthly* 109:192–194, 2002

[36] W. M. Kantor, Note on symmetric designs and projective spaces, *Math. Z.*, 122:61–62, 1971.

[37] G.Y. Katona, A. Recski, Cs. Szabó, *Bevezetés a számítástudományba*, Typotex, Budapest, 2006.

[38] F. Kárteszi, *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[39] E. Kiss, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007.

[40] Gy. Kiss, T. Szőnyi, *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

[41] C. W. H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz, The non-existence of finite projective planes of order 10, *Can. J. Math.*, XLI(6):1117–1123, 1989.

[42] E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press, 1974.

[43] K. Metsch, *Linear spaces with few lines*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1490**, 1991.

[44] K. Metsch, On the maximum size of a maximal partial plane, *Rend. Mat. Appl.* (7) 12: 345–355, 1992.

[45] K. Metsch, Proof of the Dowling-Wilson conjecture, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B* 45: 69-98, 1993.

[46] M. Miller, J. Širán, Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem *Electronic. J. Combinatorics* DS14

[47] F. Radó, B. Orbán, *A geometria mai szemmel*, Dacia, Cluj, 1982.

[48] M. de Resmini, *Introductions to Steiner systems*, in: Combinatorial structures, TEMPUS Lecture Notes, Eötvös University, 1993.

[49] P. Rózsa, *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1974.

[50] C. J. Salwach, J. A. Mezzaroba, The four biplanes with $k = 9$, *J. Combinatorial Theory*, A 24:141–145, 1978.

[51] J. J. Seidel, Strongly regular graphs, In B. Bollobás, editor, *Surveys in Combinatorics*, pages 157–180, London Math. Soc. Lecture Note Series 38, Cambridge, 1979.

[52] J. J. Seidel, Strongly regular graphs of $L_2$-type and of triangular type, *Indag. Math.*, 29(2):189–196, 1967.

[53] P. Turán, E. Gyarmati, *Számelmélet*, ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

[54] E. van Dam, J. Koolen, A new family of distance-regular graphs with unbounded diameter, *Invent. Math.* 162:189–193, 2005

[55] J. H. van Lint, Non-embeddable quasi-residual designs, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, (A) 81:269–275, 1978.

[56] J. H. van Lint, J. J. Seidel, Equilateral point sets in elliptic geometry, *Indag. Math.*, 28:335–348, 1969.

[57] J. H. van Lint, *Coding theory*, Springer Lecture Notes in Mathematics **201**, 1971.

[58] J. H. van Lint, *Coding theory*, 2nd edition Springer GTM **86**, 1992.

[59] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge Univ. Press, 1992.

[60] H. Wilf, The friendship theorem, in: *Combinatorial Mathematics and Its Applications, Proc. Conf. Oxford, 1969*, Academic Press, pages 307–309, 1971.