PÉLDATÁR AZ ANALÍZISHEZ

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Izsák Ferenc
Pfeil Tamás
Titkos Tamás

PÉLDATÁR AZ ANALÍZISHEZ

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2013

Szerkesztő: Dr. Pfeil Tamás

Lektorálta: Dr. Tóth János, a matematikatudomány kandidátusa

ISBN 978 963 279 235 4
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: függvények, sorozatok, sorok, határérték, folytonosság, differenciálszámítás, integrálszámítás, hatványsorok, differenciálegyenletek, többváltozós függvények, vektoranalízis, görbék.

ÖSSZEFOGLALÁS: A *Példatár az analízishez* az analízis különböző fejezeteihez kapcsolódó feladatokat tartalmaz. A fejezetek elején az elméleti összefoglaló szakaszban a feladatok megértéséhez, megoldásához szükséges fogalmak találhatók. Ezt kidolgozott feladatok követik, amelyek között jórészt egyszerűbb példák szerepelnek, mindenhol részletes megoldással. A megoldandó feladatokhoz tartozó megoldás minden esetben megtalálható az egyes fejezetek végén. A jegyzet alkalmas segítség lehet különböző természettudományokat tanuló hallgatók bevezető matematika-, kalkulus- vagy analíziskurzusához.

Tartalom

1. fejezet

Halmazok, függvények

A jegyzetben végig ismertnek feltételezzük a középiskolában tanultakat. Így például a halmaz naiv fogalmát, azt, hogy mi két halmaz uniója, metszete, különbsége, egy másik halmazra vonatkozó komplementere, és így tovább. Szintén feltételezzük a függvény naiv fogalmának, és az alábbi elemi függvények alapvető tulajdonságainak ismeretét:

$$\mathrm{id},\ |\mathrm{id}|,\ \mathrm{id}^{\frac{p}{q}},\ \sin,\ \cos,\ \mathrm{tg}\,,\ \mathrm{ctg}\,,\ \exp_a,\ \log_a\,.$$

A természetes alapú (azaz ahol az a paraméter az Euler-féle e szám: $e \approx 2{,}718$) logaritmusfüggvényt ln-nel jelöljük.

Ebben a fejezetben csak azokat a fogalmakat tárgyaljuk, amelyeket a középiskolában tanultaknál precízebben kell definiálni, hogy a későbbiekben ne álljon fenn a félreértés veszélye.

1.1. Elméleti összefoglaló

Ha egy adott H halmaznak az x „objektum" eleme, akkor az $x \in H$ szimbólumot fogjuk használni. Az *üres halmaz*t, azaz azt a halmazt, amelynek nincs eleme, $\emptyset$ jelöli. Két halmazt akkor nevezünk egyenlőnek, ha elemei megegyeznek. Fontos megjegyeznünk, hogy az elemeknek „nincs sorrendje" (például $\{1,2\} = \{2,1\}$). A H halmaz a K halmaznak *részhalmaza* (jelölésben: $H \subset K$), ha H minden eleme eleme K-nak is.

Egy adott H halmaz $\mathcal{P}(H)$-val jelölt *hatványhalmazá*n azt a halmazt értjük, amelynek elemei pontosan a H halmaz részhalmazai. Vagyis

$$A \subset H \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(H).$$

Például az $\{\emptyset, +, \triangle\}$ halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{\emptyset,+,\triangle\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{+\}, \{\triangle\}, \{\emptyset,+\}, \{\emptyset,\triangle\}, \{+,\triangle\}, \{\emptyset,+,\triangle\}\}\,.$$

Bevezetjük a *rendezett pár* fogalmát. Legyenek x és y tetszőleges elemei valamely X és Y halmazoknak (X és Y nem feltétlenül különbözőek). Ekkor az (x,y) rendezett páron az $\{x, \{x,y\}\}$ halmazt értjük. Világos, hogy itt már van sorrend olyan értelemben, hogy ha $x \neq y$, akkor $(x, y) \neq (y, x)$. Könnyen meggondolható ugyanis, hogy ebben az esetben

$$\{x, \{x, y\}\} \neq \{y, \{y, x\}\}.$$

Két rendezett pár (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontosan akkor egyenlő, ha $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$. (A rendezett n-esek hasonlóképp definiálhatóak.)

A rendezett párok segítségével definiálhatjuk az A és B nem üres halmazok

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

*Descartes-szorzat*át. Így például

$$\{0, 1\} \times \{2, 3, 4\} = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

A későbbi fejezetekben szükségünk lesz az úgynevezett *kibővített valós számhalmaz*ra. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazához hozzávesszük a $+\infty$ (*plusz végtelen*), illetve $-\infty$ (*mínusz végtelen*) szimbólumokat. Jelölje ezt a halmazt $\overline{\mathbb{R}}$, azaz $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Az összeadás és szorzás műveletét a következőképp terjesztjük ki $\mathbb{R}$-ről $\overline{\mathbb{R}}$-ra (az új műveletet is a $+$, illyetve $\cdot$ jellel fogjuk jelölni). Legyen $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, illetve $\beta < 0$. Ekkor

$$x + (+\infty) := +\infty, \qquad x - (+\infty) := -\infty,$$

$$\frac{x}{+\infty} := 0, \qquad \frac{x}{-\infty} := 0,$$

$$\alpha \cdot (+\infty) := +\infty, \qquad \alpha \cdot (-\infty) := -\infty,$$

$$\beta \cdot (+\infty) := -\infty, \qquad \beta \cdot (-\infty) := +\infty,$$

továbbá

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) := +\infty, \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) := +\infty, \qquad (-\infty) \cdot (+\infty) := -\infty.$$

Nem értelmezzük ugyanakkor a következőket:

$$0 \cdot (+\infty), \qquad 0 \cdot (-\infty), \qquad (+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty).$$

A fenti szabályok segítségével minden $\overline{\mathbb{R}}$-beli kifejezésről eldönthetjük, hogy értelmes-e. Így például a

$$(+\infty) + (-\infty) = (+\infty) + (-1)(+\infty) = (+\infty) - (+\infty)$$

egyenlőségek azt mutatják, hogy a $(+\infty)+(-\infty)$ kifejezést sem értelmezzük az $\overline{\mathbb{R}}$ számhalmazban.

Ismertnek feltételezzük a valós ($\mathbb{R}$), a racionális ($\mathbb{Q}$), az irracionális ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), az egész ($\mathbb{Z}$), a természetes ($\mathbb{N}$), illetve a pozitív egész ($\mathbb{N}^+$) számok halmazát, különös tekintettel a rendezési tulajdonságaikra.

Mivel a feladatok megoldása során gyakran használjuk, külön kiemeljük az úgynevezett arkhimédészi axiómát, amely azt mondja, hogy minden valós számnál van nagyobb valós szám. Hasonlóan, minden egész számnál van nagyobb egész szám, és így tovább.

Szintén használni fogjuk a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget, valamint az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget. Azaz azt, hogy

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0),$$

illetve

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ezen szakasz hátralevő részében függvényekkel, illetve azok elemi tulajdonságaival foglalkozunk.

Legyen A és B nem üres halmaz, f pedig egy „hozzárendelés”, azaz f rendelje hozzá A minden eleméhez B-nek pontosan egy elemét. Példaként tekintsük a következőt:

$$A = \{0, 1, 2\}, \; B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},$$

az f pedig rendeljen 0-hoz α-t, 1-hez γ-t, 2-höz δ-t. Ezt röviden úgy írjuk, hogy $f(0) = \alpha$, $f(1) = \gamma$, illetve $f(2) = \delta$. Ekkor az f értelmezési tartománya az A halmaz, értékkészlete az $\{\alpha, \gamma, \delta\} \subset B$ halmaz. A γ elemet az f függvény 1 helyen felvett értékének nevezzük.

Ugyanezt az f hozzárendelést megadhatjuk rendezett párok segítségével is. Tekintsük ugyanis a következő halmazt

$$f = \{(0, \alpha), (1, \gamma), (2, \delta)\} \subset A \times B.$$

Világos, hogy egy rendezett pár akkor van benne a fenti halmazban, ha első koordinátája az A-nak egy x eleme, a második pedig az az egyértelműen meghatározott B-beli elem, amelyet f az x-hez rendelt. Azaz

$$f = \{(x, f(x)) : \; x \in A\}.$$

A fentieket precízebben megfogalmazva a következőt mondhatjuk. Az $f \subset X \times Y$ halmazt X-en értelmezett, Y-ba képező *függvény*nek nevezzük (és $f : X \to Y$-nal jelöljük), ha minden $x \in X$-hez létezik pontosan egy $y \in Y$, amelyre $(x, y) \in f$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett gyakrabban az $f(x) = y$ jelölést használjuk.

A továbbiakban szinte mindig az $f : X \to Y$ jelölést használjuk $f \subset X \times Y$ helyett. Továbbá mindig feltesszük, hogy a halmazok, ahonnan (és ahová) a függvények képeznek, nem üres halmazok.

Az X halmazt az f függvény *értelmezési tartomány*ának nevezzük, és $D(f)$-fel jelöljük. Azon $y \in Y$ értékek halmazát, amelyekhez van olyan $x \in X$, hogy $f(x) = y$ (vagyis $(x, y) \in f$), az f függvény *értékkészlet*ének nevezzük és $R(f)$-fel jelöljük.

Amennyiben az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza, úgy f-re röviden azt mondjuk, hogy *valós függvény*.

Legyen H az f függvény X értelmezési tartományának egy részhalmaza. Ekkor $f|_H$-val jelöljük és az f függvény *H halmazra való* megszorításának nevezzük az alábbi függvényt:

$$H \ni x \mapsto f|_H(x) := f(x).$$

A függvény fogalmának definíciójából (és a halmazok egyenlőségéről elmondottakból) világos, hogy az f és g függvény pontosan akkor egyenlő, ha $D(f) = D(g)$ és minden $x \in D(f) = D(g)$-re $f(x) = g(x)$.

Az $f : X \to Y$ függvény *injektív*, ha különböző X-beli elemekhez különböző Y-beli elemeket rendel, azaz

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Az $f : X \to Y$ függvény *szürjektív*, ha $R(f) = Y$. Ha f egyszerre injektív és szürjektív, akkor azt mondjuk, hogy f *bijektív*, másképp: f bijekció.

Legyen $f : X_1 \to Y$ és $g : X_2 \to Y$ függvény, és tegyük fel, hogy $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Ekkor f és g összegén, illetve szorzatán a következő $X_1 \cap X_2$-ből Y-ba képező függvényeket értjük:

$$X_1 \cap X_2 \ni x \mapsto (f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad X_1 \cap X_2 \ni x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x)g(x).$$

Ha f valós függvény, λ valós szám, akkor a λf függvényen az alábbi függvényt értjük:

$$D(f) \ni x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Legyen $f : Y \to Z$, $g : X \to Y$ függvény. Ekkor az f és g függvény $f \circ g$-vel jelölt *kompozíció*ján azt az X-ből Z-be képező függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya

$$D(f \circ g) = \{x \in X : \ g(x) \in D(f)\}$$

és

$$(f \circ g)(x) := f\big(g(x)\big).$$

Több függvény kompozíciójának képzésekor a tényezőket tetszőlegesen zárójelezhetjük, azaz $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Ha $f : X \to Y$ injektív függvény, akkor létezik olyan $R(f)$-ből X-be képező g függvény, amelyre

$$(f \circ g)(x) = x$$

minden $R(f)$-beli x-re, továbbá

$$(g \circ f)(x) = x$$

minden $x \in X$-re. Ezt az egyértelműen létező g függvényt f *inverz*ének nevezzük, és az f^{-1} jellel jelöljük. (Az f^{-1} inverz függvény nem keverendő össze $\frac{1}{f}$-fel.) Fontos megjegyezni, hogy tehát

$$D(f^{-1}) = R(f),\ R(f^{-1}) = D(f).$$

A jól ismert szögfüggvények, sin, cos, tg, ctg egyike sem injektív, hiszen periódikus függvények. Ahhoz, hogy az inverzükről beszélhessünk, az értelmezési tartományukat le kell szűkíteni egy olyan intervallumra, ahol a függvény különböző értékekhez különbözőt rendel. Ezeket adjuk meg a következő felsorolásban.

$\arcsin := (\sin\vert_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$,	$D(\operatorname{arc}\sin) = [-1, 1]$,	$R(\operatorname{arc}\sin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\arccos := (\cos\vert_{[0,\pi]})^{-1}$,	$D(\operatorname{arc}\cos) = [-1, 1]$,	$R(\operatorname{arc}\cos) = [0, \pi]$.
$\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg}\vert_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$,	$D(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$,	$R(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
$\operatorname{arcctg} := (\operatorname{ctg}\vert_{(0,\pi)})^{-1}$,	$D(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}$,	$R(\operatorname{arcctg}) = (0, \pi)$.

A példatár későbbi fejezeteiben gyakran találkozunk az úgynevezett hiperbolikus függvényekkel, illetve azok inverzével. Ezek a következőek:

$\operatorname{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,	$D(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$,	$R(\operatorname{ch}) = [1, +\infty)$.
$\operatorname{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,	$D(\operatorname{ch}) = \mathbb{R}$,	$R(\operatorname{th}) = (-1, 1)$.
$\operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$,	$D(\operatorname{th}) = \mathbb{R}$,	$R(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
$\operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$,	$D(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,	$R(\operatorname{arsh}) = \mathbb{R}$.
$\operatorname{arsh} := \operatorname{sh}^{-1}(x)$,	$D(\operatorname{arsh}) = \mathbb{R}$,	
$\operatorname{arch} := (\operatorname{ch}\vert_{[0,+\infty)})^{-1}$,	$D(\operatorname{arch}) = [1, +\infty)$,	$R(\operatorname{arch}) = [0, +\infty)$.
$\operatorname{arth} := \operatorname{th}^{-1}$,	$D(\operatorname{arth}) = (-1, 1)$,	$R(\operatorname{arth}) = \mathbb{R}$.
$\operatorname{arcth} := \operatorname{cth}^{-1}$,	$D(\operatorname{arcth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,	$R(\operatorname{arch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
	$R(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$,	

Végezetül kitérünk a valós függvények legelemibb tulajdonságaira. Az f valós függvényt *monoton növő*nek (illetve *monoton fogyó*nak) nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in D(f)$ esetén $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ (illetve $x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$). Az f *szigorúan monoton növő*, illetve *szigorúan monoton fogyó*, ha $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$, illetve $f(x) > f(y)$.

A valós számok H részhalmaza *felülről korlátos* (illetve *alulról korlátos*), ha van olyan K valós szám, amely H minden eleménél nagyobb (illetve kisebb). A H halmaz *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos. Az f valós függvényt korlátosnak nevezzük, ha $R(f) \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz.

1.2. Kidolgozott feladatok

1. Igazolja a két nemnegatív szám számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőséget!

Megoldás. Azt kell igazolnunk, hogy $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ teljesül minden $a, b \ge 0$ esetén. Emeljük négyzetre mindkét oldalt! Mivel a-ról és b-ről feltettük, hogy nemnegatív, ezért ez egy ekvivalens átalakítás. Vegyük észre, hogy

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\sqrt{ab}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0$$

mindig teljesül, hiszen az egyenlőtlenség bal oldalán $(a-b)^2$-et látjuk, ami nemnegatív. Ebből az is jól látható, hogy pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha $a = b$.

2. Legyen $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,4\}$. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, illetve $\mathcal{P}(A)$ halmazt!

Megoldás. Az $A \cup B$ halmaz elemei azok, amelyek A és B közül legalább az egyikben benne vannak, azaz $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Az $A \cap B$ halmaz a közös rész, azaz $A \cap B = \{1\}$. Az $A \setminus B$ halmaz elemei pedig A azon elemei, amelyek nem elemei B-nek, azaz $A \setminus B = \{3,5\}$.

A bevezetőben leírtak szerint A és B Descartes-szorzata

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,4)\}.$$

Végül A hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}.$$

3. Lehet-e egy valós függvény grafikonja a $H = \{(x,y) : \; x^2 - 2x + y^2 = 0\}$ halmaz?

Megoldás. Nem lehet, mert ez a halmaz az $(1,0)$ pont körüli 1 sugarú körvonal, így például $(1,1)$ és $(1,-1)$ is eleme H-nak, de $1 \ne -1$.

4. Függvény-e az $f = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)\}$ halmaz? Ha igen, adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét, illetve döntse el, hogy injektív-e!

Megoldás. Igen. Értelmezési tartománya $D(f) = \{1,2,3,4\}$, értékkészlete $R(f) = \{1,2\}$. Az f függvény nem injektív, hiszen $f(2) = f(3)$.

5. Legyen $f : (0,+\infty) \ni x \mapsto f(x) := \ln(x)$, $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := x^2$. Határozza meg az $f \circ g$, illetve $g \circ f$ függvényeket!

Megoldás. Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya a g értelmezési tartományának azon x elemeiből áll, amelyekre $g(x) \in D(f)$. Esetünkben

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \ln(x^2).$$

A $(g \circ f)$ függvényre hasonlóan

$$D(g \circ f) = (0,+\infty),\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = (\ln x)^2.$$

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Készítse el az $f \circ f$, illetve $f \circ f \circ f$ függvényeket!

Megoldás. Az $f \circ f$ kompozíció értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, az x helyen felvett értéke pedig

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2}}{1 + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2} = \frac{x(1+x^2)}{1+3x^2+x^4}.$$

Kihasználva, hogy $f \circ f \circ f = f \circ (f \circ f)$, látható, hogy $D(f \circ f \circ f) = \mathbb{R}$ és hogy az x helyen felvett értéke

$$(f \circ (f \circ f))(x) = \frac{\frac{x(1+x^2)}{1+3x^2+x^4}}{1 + \left(\frac{x(1+x^2)}{1+3x^2+x^4}\right)^2} = \frac{x(1+x^2)(1+3x^2+x^4)}{1+7x^2+13x^4+7x^6+x^8}.$$

7. Milyen geometriai transzformációval kaphatjuk meg egy f valós függvény grafikonjából az f^{-1} függvény grafikonját? Határozza meg ennek segítségével az $\arcsin$, $\arccos$, arctg, arcctg függvények grafikonját!

Megoldás. A bevezetőben elmondottak szerint az $f(x) = y$ jelentése $(x,y) \in f$. Ezzel viszont ekvivalens, hogy $(y,x) \in f^{-1}$, azaz $f^{-1}(y) = x$. Mivel (x,y) és (y,x) egymás tükörképei az $x = y$ egyenesre vonatkozóan, ezért azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az inverz grafikonja a grafikon $x = y$ egyenesre vett tükörképe. Ennek segítéségvel a fenti arcus függvények grafikonja könnyedén ábrázolható.

8. Adjon módszert egy f valós függvény inverzének kiszámítására!

Megoldás. Az előző feladatban leírtakat kicsit módosítva

$$f(y) = x \Leftrightarrow (y, x) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y.$$

Tehát az $y = f(x)$ egyenletben az x és y változókat formálisan felcserélve azt kapjuk, hogy $x = f(y)$, amelyből y-t ekvivalens lépésekkel kifejezve éppen az f^{-1} függvény hozzárendelési szabályát kapjuk.

9. Határozza meg az $f : (-\infty, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-3)^2$ függvény inverzét!

Megoldás. Elsőként igazoljuk, hogy az f függvény injektív. Az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) = 0$. Mivel egy szorzat értéke pontosan akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője nulla, ezért vagy $x_1 = x_2$, vagy $x_1 = x_2 = 3$. Következésképp az f függvény injektív.

Mivel $D(f) = (-\infty, 3]$, $R(f) = [0, +\infty)$, így az f^{-1} inverz függvényre azt kell majd kapnunk, hogy

$$D(f^{-1}) = R(f) = [0, +\infty),\ R(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 3].$$

Az előző feladatban leírtak szerint az $y = (x-3)^2$ egyenletből kell x-et kifejeznünk. Vonjunk mindkét oldalból négyzetgyököt.

$$\sqrt{y} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = -(x-3) = 3 - x.$$

Fontos szem előtt tartani, hogy mi f értelmezési tartománya, hiszen az abszolútérték-jelet aszerint kell elhagyni. Azt kaptuk tehát, hogy

$$f^{-1}(y) = x = 3 - \sqrt{y},\ y \in [0, +\infty).$$

Ellenőrzésképp számoljuk ki az $f \circ f^{-1}$, illetve $f^{-1} \circ f$ kompozíciókat:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(3 - \sqrt{x}) = (3 - \sqrt{x} - 3)^2 = x,\ x \in [0, +\infty),$$

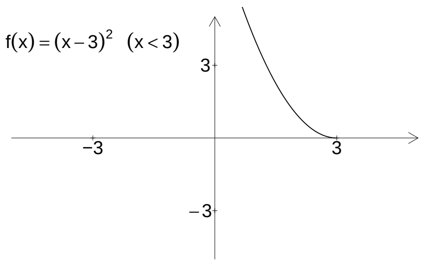
illetve

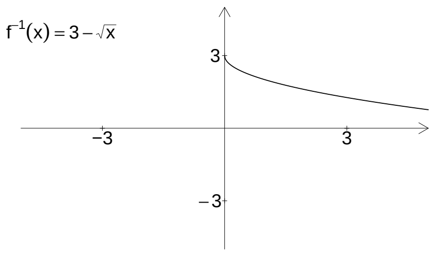
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big((x-3)^2\big) = 3 - \sqrt{(x-3)^2} = 3 - |x-3| = x,\ x \in (-\infty, 3].$$

10. Mutasson példát $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ injekcióra, azaz olyan f függvényre, amely injektív, $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) \subset [-1, 1]$!

Megoldás. Tekintsünk először egy olyan injektív h függvényt, amelynek értelmezési tartománya korlátos, értékkészlete az egész $\mathbb{R}$. Legyen

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ h(x) = \operatorname{tg}(x).$$





Legyen ezután
$$g : (-1,1) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\pi}{2}x.$$
Ekkor a $h \circ g$ függvény a $(-1,1)$ intervallumon van értelmezve, injektív, és
$$R(h \circ g) = R(h) = \mathbb{R}.$$
Ennek a függvénynek az inverze kielégíti a feladat követelményeit, azaz $f := (h \circ g)^{-1}$ injektív, $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = (-1,1) \subset [-1,1]$.

1.3. Megoldandó feladatok

1. Határozza meg az $A = \{1,3\}$ és $B = \{0\}$ halmazok $B \times A$ Descartes-szorzatát!

2. Legyen A, B és C nem üres halmaz. Van-e tartalmazási kapcsolat $(A \cup B) \times C$, illetve $(A \times C) \cup (B \times C)$ között?

3. Határozza meg az $A = \big\{1, \{1\}\big\}$ halmaz hatványhalmazát!

4. Elemei-e az alábbi halmazok az $A = \big\{1, \{1,2\}, \{1,2,3\}\big\}$ halmaznak?

(a) $\{\emptyset\}$, (b) $\{1,2\}$, (c) $\big\{\{1,2\}\big\}$, (d) $\big\{1, \{1,2,3\}\big\}$.

5. Lehet-e egy függvény grafikonja a következő halmaz: $\{(\sin(x), x) : x \in \mathbb{R}\}$?

6. Függvény-e az $f = \{(1,2), (2,1), (3,1), (4,2)\}$ halmaz? Ha igen, adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét!

7. Injektív-e az $x^3 - x$ függvény?

8. Határozza meg az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett $f(x) = x + 4$ és $g(x) = x^2$ függvények $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozícióját!

9. Határozza meg az $f(x) = \ln(-x)$, $D(f) = (-\infty, 0)$ és a $g(x) = x + 1$, $D(g) = \mathbb{R}$ függvények $f \circ g$ kompozícióját!

10. Mutasson példát olyan valós függvényre, amelyre $f^{-1} = f$ (és f nem az a függvény, ami az értelmezési tartományának minden eleméhez önmagát rendeli, azaz f nem az identitás)!

11. Határozza meg az $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$ függvény inverzét!

12. Határozza meg az $f(x) = 2x^3 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$ függvény inverzét!

13. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{2x-3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ függvény inverzét!

14. Határozza meg az $f(x) = x^2$, $D(f) = (-\infty, -1]$ függvény inverzét!

1.4. Megoldások

1. $\{(0,1),(0,3)\}$.

2. Egyenlőek.

3. $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \big\{\{1\}\big\}, \big\{1, \{1\}\big\}\big\}$.

4. (a) Nem. (b) Igen. (c) Nem. (d) Nem.

5. Nem lehet, hiszen $\sin 0 = \sin \pi = 0$, így $(0,0) \in f$ és $(0,\pi) \in f$, de $\pi \neq 0$.

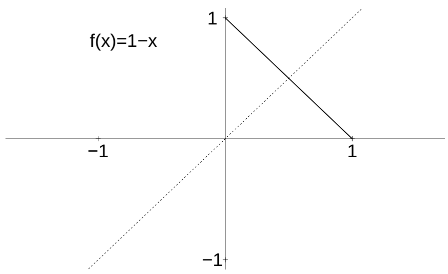
6. Függvény, értelmezési tartománya $\{1,2,3,4\}$, értékkészlete $\{1,2\}$.

7. Nem, mert $f(0) = f(1) = 0$.

8. $D(f \circ g) = D(g \circ f) = \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 4$, $(g \circ f)(x) = (x+4)^2$.

9. $(f \circ g)(x) = ln(-x-1)$, $D(f) = (-\infty, -1)$.

10. $f(x) = 1 - x$, $D(f) = [0,1]$.

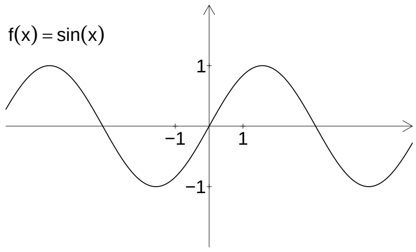


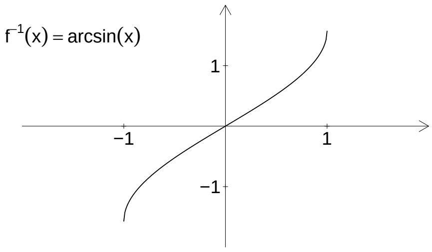
11. A függvény nem injektív, így nincs inverze.

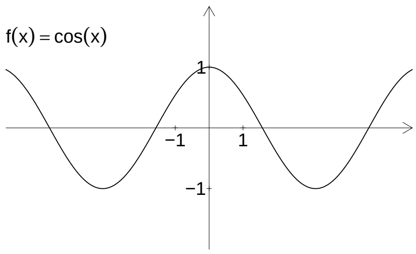
12. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

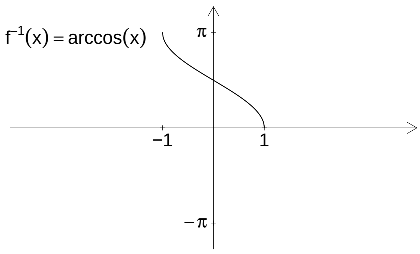
13. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 3\right)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

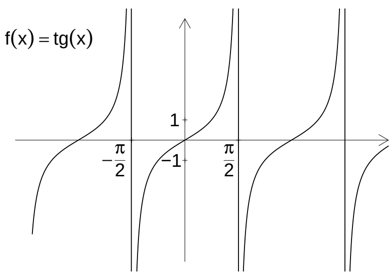
14. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $D(f) = [1, +\infty)$.

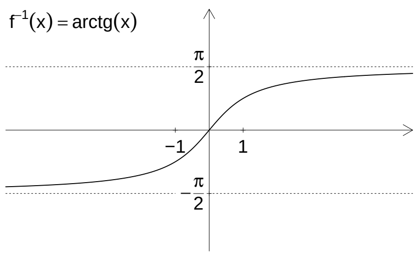


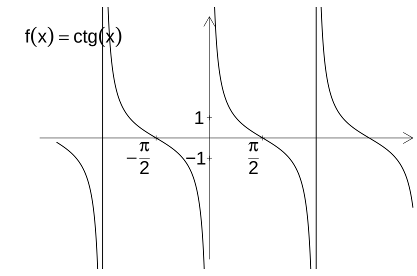


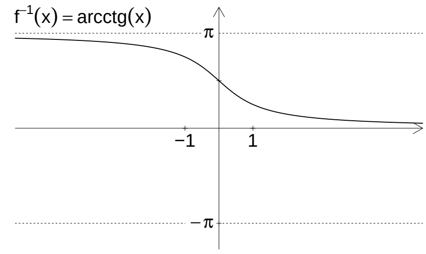


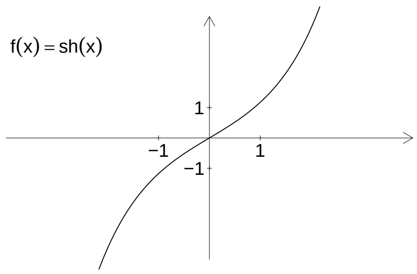


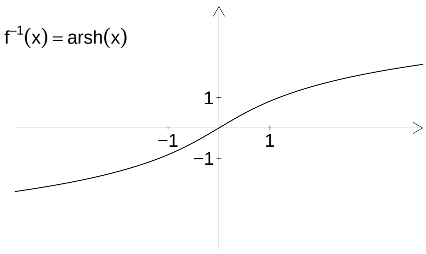


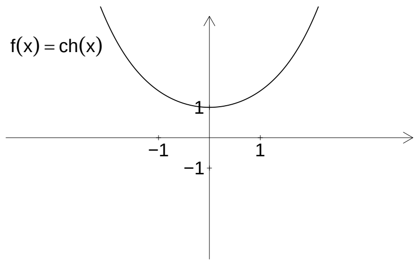


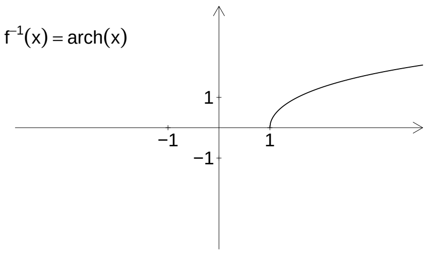

f(x) = ctg(x)
1
−1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

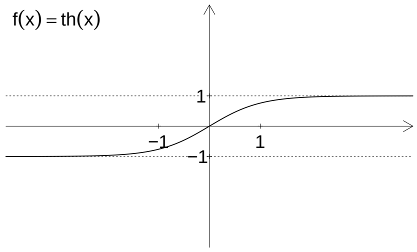

$f^{-1}(x) = \text{arcctg}(x)$
π
−1
1
−π

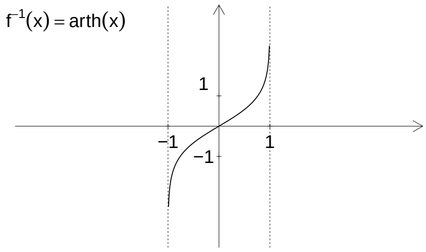

f(x) = sh(x)
1
−1
1
−1

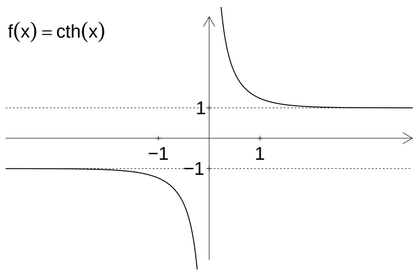

$f^{-1}(x) = \text{arsh}(x)$
1
−1
1
−1

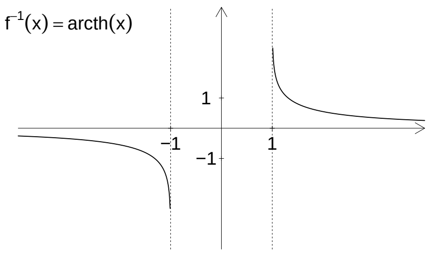

f(x) = ch(x)
1
−1
1
−1

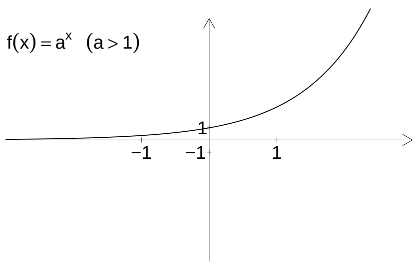

$f^{-1}(x) = \text{arch}(x)$
1
−1
1
−1

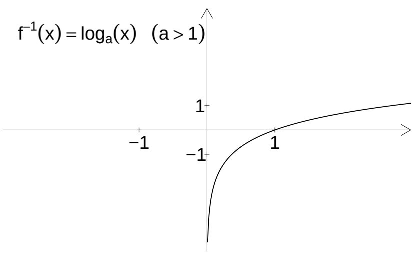

f(x) = th(x)
1
−1
1
−1

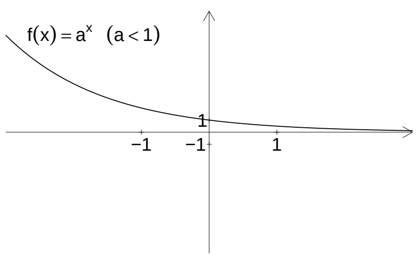

$f^{-1}(x) = \text{arth}(x)$
1
−1
1
−1

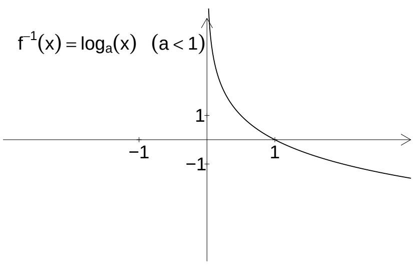

f(x) = cth(x)
1
−1
1
−1


f⁻¹(x) = arcth(x)
1
−1
1
−1


f(x) = aˣ (a > 1)
1
−1
−1
1


f⁻¹(x) = logₐ(x) (a > 1)
1
−1
1
−1


f(x) = aˣ (a < 1)
1
−1
−1
1


f⁻¹(x) = logₐ(x) (a < 1)
1
−1
1
−1

2. fejezet

Sorozatok

Ebben a fejezetben megismerkedünk a valós számsorozatok fogalmával, illetve azok alapvető tulajdonságaival.

2.1. Elméleti összefoglaló

A pozitív egész számok halmazán értelmezett valós értékű $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ függvényt valós számsorozatnak (vagy röviden *sorozatnak*) nevezzük és az (a_n) szimbólummal jelöljük. A sorozat n-edik tagja a röviden a_n-nel jelölt $a(n)$ szám. A részsorozat fogalmát a következőképp definiáljuk: legyen $\sigma : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növő függvény. Ekkor az $(a_{\sigma(n)})$ sorozatot (a_n) részsorozatának nevezzük. Tekintsük például $a_n = \frac{1}{n}$, illetve $(b_n) = \frac{1}{n^2}$ sorozatokat. A (b_n) sorozat részsorozata (a_n)-nek, hiszen a $\sigma(n) = n^2$ választással $b_n = a_{\sigma(n)}$.

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *monoton növő* (illetve *fogyó*), ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$ (illetve $a_n \geq a_{n+1}$).

Az (a_n) sorozat *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos, azaz létezik olyan K valós szám, amelyre $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, K]$.

Egy sorozat számszorosát, sorozatok összegét, illetve szorzatát mint függvények számszorosát, pontonkénti összegét, illetve szorzatát a következőképp értelmezzük: ha (a_n), (b_n) sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda(a_n) := (\lambda a_n), \qquad (a_n) + (b_n) := (a_n + b_n), \qquad (a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha emellett $b_n \neq 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Az (a_n) számsorozatot *konvergens*nek nevezzük, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, amelyre fennáll a következő: bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N egész, hogy az N-nél nagyobb indexű tagok α-tól vett távolsága kisebb ε-nál. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat α-hoz konvergál. Az α számot az (a_n) sorozat határértékének (vagy limeszének) nevezzük, és a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, illetve $a_n \to \alpha$ jelöléseket használjuk. Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens, és ugyanaz a határértékük. Ha $\alpha = 0$, akkor

(a_n)-et röviden nullsorozatnak nevezzük. Ha (a_n) nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*.

Külön definiáljuk az úgynevezett *végtelenhez divergálás* (vagy más néven *végtelenhez tartás*) fogalmát. Az (a_n) sorozat tart a $+\infty$-hez (jelölésben: $a_n \to +\infty$), ha tetszőleges $K > 0$ számhoz van olyan N küszöbindex, hogy a sorozat minden N-nél nagyobb indexű tagja nagyobb, mint K. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha $-a_n \to +\infty$. A $+\infty$-hez, illetve $-\infty$-hez tartó sorozatok esetén az összeg, illetve szorzat határértékére vonatkozó állításokat az $\overline{\mathbb{R}}$-beli összeadás és szorzás művelet szerint kell értelmezni.

Az (a_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges ε hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Egy valós számsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens.

A következő tételben összefoglaljuk a konvergencia és az algebrai műveletek viszonyát.

2.1. Tétel. *Legyenek az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$. Legyen továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ekkor*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n) = \lambda\alpha$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$,

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = \alpha^{\beta}$.

Ha $\beta \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Hasonló állítás fogalmazható meg azokra a sorozatokra, amelyek $+\infty$-hez, illetve $-\infty$-hez tartanak, feltéve persze, hogy az összeg, illetve szorzat értelmezve van. Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a $(+\infty)$ és $(-\infty)$ szimbólumok összegét nem értelmeztük (lásd 1. fejezet). A feladatok megoldásánál gyakran használt módszer a következő úgynevezett *közrefogási elv*.

2.2. Tétel. *Ha (a_n), (b_n), és (c_n) olyan sorozatok, amelyekre fennáll, hogy:*

(1) *(a_n) és (b_n) konvergens, továbbá $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,*

(2) *létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$,*

akkor a (c_n) sorozat is konvergens, továbbá $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Végül néhány nevezetes határérték, amelyet a feladatok megoldása során használni fogunk:

$q^n \to 0 \quad (|q| < 1)$,

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0)$,

$\sqrt[n]{n} \to 1$,

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

$\frac{n^k}{c^n} \to 0 \quad (c > 1,\ k \in \mathbb{N})$,

$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$,

$\frac{c^n}{n!} \to 0 \quad (c > 0)$,

$\frac{n!}{n^n} \to 0$,

$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.

2.2. Kidolgozott feladatok

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

(a) $a_n := 1 + \frac{1}{n}$, (c) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, (e) $a_n := \sin \frac{5\pi}{12} n$,

(b) $a_n := \frac{2^n}{n!}$, (d) $a_n := (-1)^n \sqrt{n}$, (f) $a_n := \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Megoldás.

(a) Azt fogjuk igazolni, hogy $a_{n+1} - a_n < 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz a sorozat szogorúan monoton fogyó.

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$

(b) Pozitív tagú sorozat esetén $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$. Mivel $\frac{2^n}{n!} > 0$ és

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \geq 1,$$

ezért a sorozat monoton fogyó.

(c) A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget $n+1$ tagra felírva:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right) < \\ < \left(\frac{1 + n\frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

azaz a sorozat (szigorúan) monoton növő.

(d) Annak igazolásához, hogy egy sorozat nem monoton, elég mutatnunk $j < k < l$ egészeket, amelyekre $a_j < a_k > a_l$ vagy $a_j > a_k < a_l$ teljesül. Esetünkben ez bármely három szomszédos indexre fennáll.

(e) Az előző résznél elmondottak szerint a sorozat nem lehet monoton, hiszen például $a_1 = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$, $a_3 = \sin\left(\frac{15\pi}{12}\right) < 0$, illetve $a_5 = \sin\left(\frac{25\pi}{12}\right) > 0$.

(f) Mivel a tg függvény szigorúan monoton növő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ezért $n < m$ esetén $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{m}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$. Vagyis a sorozat szigorúan monoton fogyó.

2. Vizsgálja meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat!

(a) $a_n = \frac{n+2}{n}$,
(b) $b_n = n^2 - n$,
(c) $c_n = \sin(4n^2 - n)\cos(4n^2 + n)$,
(d) $d_n = (-1)^n \ln(n)$.

Megoldás.

(a) A sorozat nyilvánvalóan korlátos, hiszen

$$|a_n| = \left|\frac{n+2}{n}\right| = \left|1 + \frac{2}{n}\right| \leq 1 + 2\left|\frac{1}{n}\right| < 3.$$

(b) Igazolni fogjuk, hogy tetszőleges rögzített $K > 0$ számhoz található olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $|a_n| > K$, azaz az (a_n) sorozat nem korlátos. A másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítva és az egyenlőtlenséget rendezve azt kapjuk, hogy

$$|b_n| = n^2 - n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > K \Leftrightarrow \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 >$$
$$> K + \frac{1}{4} \Leftrightarrow n > \sqrt{K + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Ilyen n létezését az arkhimédészi axióma garantálja.

(c) Mivel a sin és a cos függvények értékei -1 és 1 közé esnek, továbbá két $[-1,1]$-beli szám szorzata is $[-1,1]$-beli, ezért (c_n) nyilvánvalóan korlátos.

(d) Hasonlóan a (b) pontban leírtakhoz, az arkhimédészi axiómát felhasználva tetszőleges $K>0$-hoz találunk $n\in\mathbb{N}$-et, amelyre $|d_n|>K$, hiszen ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $n > e^K$.

3. A definíció segítségével igazolja, hogy az alábbi sorozatok konvergensek! Adjon meg egy küszöbindexet az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorláthoz!

(a) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$,
(b) $b_n = \frac{4n+3}{2n+1}$,
(c) $c_n = \frac{1}{n}\sin n$.

Megoldás. Minden esetben rögzíteni fogunk egy $\alpha \in \mathbb{R}$ és egy $\varepsilon > 0$ számot. Ezek után egyenletrendezéssel és az arkhimédészi axióma segítségével igazolni fogjuk olyan N küszöbindex létezését, hogy az N-nél nagyobb indexű tagok közelebb vannak α-hoz, mint az előzetesen rögzített ε szám. Végül ε helyére 10^{-4}-t beírva (a kapott sorozatok monotonitását kihasználva) leolvassuk a legjobb küszöbindexet.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, $\alpha = 1$. Ekkor $|a_n - 1| = |1 + \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$. A feladatban megadott $\varepsilon = 10^{-4}$ hibához tetszőleges $\frac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = 100$-nál nagyobb egész jó lesz küszöbindexnek.

(b) Rögzített $\varepsilon > 0$ és $\alpha = 2$ mellett

$$\left|\frac{4n+3}{2n+1} - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{2n+1} - 2\right| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{2} < n.$$

Hasonlóan az eddigiekhez, az arkhimédészi axióma miatt ilyen n létezik. A fenti egyenlőtlenségben ε helyére 10^{-4}-et írva $\frac{10^4-1}{2} < n$-et kapunk. Így $N = 5000$ jó küszöbindexnek.

(c) Elsőként jegyezzük meg, hogy $|\sin n| \leq 1$, így az $\alpha = 0$ választással

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| = \frac{1}{n}|\sin n| \leq \frac{1}{n}.$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve azt kapjuk, hogy tetszőleges $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb egész szám jó küszöbindexnek (esetünkben $10^4 < N$).

4. Igazolja, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat Cauchy-sorozat!

Megoldás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ehhez válasszunk egy olyan N küszöbindexet, hogy $n > N$ és $m > N$ esetén $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{m}$ is kisebb legyen, mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Ilyen küszöbindex létezik, nevezetesen bármely N megfelel, amelyre $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Ezek után alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $\frac{1}{n}$ és $\frac{-1}{m}$ számokra:

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} + \frac{-1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{-1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, igazoltuk, hogy a sorozat Cauchy-sorozat.

5. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $a_n = \frac{n^5+5n-1}{n^2-n^6+1}$, (b) $b_n = \frac{3n^2+2n+1}{n+2n^2}$, (c) $c_n = \frac{2n^4-3n^2}{n^2-6n+1}$.

Megoldás.

(a) Emeljünk ki a számlálóból és a nevezőből n^6-t, majd képezzük a határértéket tagonként. Ekkor $a_n = \frac{\frac{1}{n}+5\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^4}-1+\frac{1}{n^6}} \to \frac{0+5\cdot 0-0}{0-1-0} = 0$.

(b) Hasonlóan, n^2-tel egyszerűsítve $b_n = \frac{3n^2+2n+1}{n+2n^2} = \frac{3+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+2} \to \frac{3+2\cdot 0+0}{0+2} = \frac{3}{2}$.

(c) Ezúttal a számláló foka (azaz n legnagyobb előforduló hatványának kitevője) nagyobb, mint a nevezőé. Ekkor a nevezőben található legnagyobb n hatvánnyal, n^2-tel egyszerűsítünk. Ekkor a számláló $+\infty$-hez, a nevező pedig egyhez tart. Mivel a tört értéke $n > 6$ esetén pozitív, így a keresett határérték $+\infty$.

6. Mutasson példát olyan pozitív tagú sorozatra, amely nem korlátos, de nem tart a $+\infty$-hez!

Megoldás.

Legyen (a_n) az a sorozat, amelynek tagjai $a_{2n} := 0$, illetve $a_{2n+1} := 2n+1$. Ekkor a sorozat nem korlátos, de nem is tart a $+\infty$-hez, hiszen egyetlen pozitív K számhoz sincs olyan N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n \geq K$ teljesül.

7. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$,

(b) $a_n = \frac{n^2+3}{\sqrt{n^4+4n}}$,

(c) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(d) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$,

(e) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$,

(f) $a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n+1}$.

Megoldás. Elemi átalakítások után tagonként elvégezzük a határátmeneteket. A (d)–(f) pontokban használni fogjuk, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$, továbbá hogy konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és ugyanaz a határértéke.

(a) Az $\sqrt[n]{n} \to 1$ és a $\sqrt[n]{2} \to 1$ nevezetes határértékeket, valamint a közrefogási elvet használva

$$\begin{aligned}1 \leq a_n &= \sqrt[n]{n^2+n} = \sqrt[n]{n(n+1)} = \\ &= \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1.\end{aligned}$$

(b) $a_n = \frac{n^2+3}{\sqrt{n^4+4n}} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}} = \frac{1+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}} \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$

(c) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0\cdot e = 0.$

(d) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \to e^{\frac{1}{2}}.$

(e) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1.$

(f) $a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left[\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{n}} \to e^{-3}.$

8. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n8^n+3^{2n}}$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{5n^7+n^3+1}}$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Megoldás.

(a) A közrefogási elvet, illetve az $\sqrt[n]{n} \to 1$ és az $\sqrt[n]{c} \to 1$ $(c > 0)$ nevezetes határértékeket felhasználva

$$9 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n8^n+3^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n8^n+9^n} = \lim_{n\to+\infty} 9\sqrt[n]{n\left(\frac{8}{9}\right)^n+1} \leq$$
$$\leq \lim_{n\to+\infty} 9\sqrt[n]{n+1} \leq \lim_{n\to+\infty} 9\sqrt[n]{n+n} = \lim_{n\to+\infty} 9\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2} \to 9\cdot 1\cdot 1 = 9.$$

(b) A számlálóból és a nevezőből $n^{\frac{7}{3}}$-ot kiemelve és a határátmeneteket tagonként elvégezve könnyen leolvasható, hogy a sorozat határértéke 0:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{5n^7+n^3+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{3}}\left(2n^{2-\frac{7}{3}}+3n^{1-\frac{7}{3}}+n^{\frac{1}{3}-\frac{7}{3}}\right)}{n^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{3}{\sqrt[3]{n^4}}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}}.$$

(c) A számlálót gyöktelenítve és a határértmeneteket tagonként elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

9. Igazolja, hogy korlátos sorozatok szorzata korlátos! Mit mondhatunk a hányadosukról?

Megoldás. A szorzatuk nyilvánvalóan korlátos, hiszen ha $|a_n| \leq K$ és $|b_n| \leq L$, akkor $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot L$. Korlátos sorozatok hányadosa viszont nem feltétlenül korlátos. Tekintsük például az $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n}$ sorozatokat, amelyekre az $\frac{(a_n)}{(b_n)} = (n)$ sorozat nem korlátos. A gondot az okozza, hogy a számlálóban lévő (b_n) sorozatot nem tudjuk alulról becsülni valamilyen pozitív számmal. Ha (b_n) nemcsak korlátos, de létezik $\alpha > 0$, amelyre $\alpha \leq |b_n|$, akkor $|\frac{a_n}{b_n}| \leq L \cdot \frac{1}{\alpha}$.

10. Igazolja, hogy

(a) minden konvergens sorozat korlátos,

(b) egy korlátos sorozat és egy nullsorozat szorzata nullsorozat,

(c) egy konvergens és egy divergens sorozat összege nem lehet konvergens!

Megoldás.

(a) Legyen (a_n) egy tetszőleges konvergens sorozat α határértékkel. Ekkor az $\varepsilon = 1$ hibahatárhoz létezik N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén
$$|a_n - \alpha| < 1 \Leftrightarrow a_n \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$
azaz az $\{a_n : n \geq \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos. Világos, hogy a véges elemszámú $\{a_i : 1 \leq i \leq N\}$ halmaz is korlátos, így az uniójuk is az. Vagyis az (a_n) sorozat korlátos.

(b) Legyen (a_n) nullsorozat, (b_n) pedig egy korlátos sorozat K korláttal. Ekkor (a_n) konvergenciája miatt tetszőleges rögzített $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N küszöbindex, amelyre $n > N$ esetén $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K}$. Következésképp (ugyanezen N küszöbindex mellett) $|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$, azaz az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat nullsorozat.

(c) Indirekte tegyük fel, hogy van olyan (a_n) konvergens, (b_n) divergens sorozat, amelyek $(a_n + b_n)$ összege konvergens. Kihasználva, hogy konvergens sorozatok összege konvergens, valamint hogy (a_n)-nel együtt $(-a_n)$ is konvergens, azt kapjuk, hogy a $(b_n) = (a_n + b_n) + (-a_n)$ sorozat konvergens, ami ellentmondás.

2.3. Megoldandó feladatok

Konvergensek-e az **1–9.** feladatokban kitűzött sorozatok? Ha igen, adja meg a határértéküket! Az **1–3.** feladatokban határozzon meg egy küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz!

1. $a_n = \frac{n}{n^3+1}$,

2. $b_n = \frac{n^2}{n^2+1}$,

3. $c_n = \frac{n+1}{n-1}$,

4. $a_n = \frac{2n^2+3n+n^3}{2n^3+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$,

5. $b_n = \frac{n \sin n + n^2 \cos n}{n^3}$,

6. $c_n = \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}$,

7. $d_n = \frac{2n^2-3n^3+1}{n^2-7}$,

8. $e_n = \frac{4n^2-3n}{5n-7n^2}$,

9. $f_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}$.

Korlátosak-e a **10–12.** feladatokban szereplő sorozatok?

10. $a_n = \left(\frac{n-5}{n}\right)^n$,

11. $b_n = \frac{2^n}{n^2}$,

12. $c_n = \operatorname{tg}(n\pi)$.

Monotonok-e a **13–14.** feladat sorozatai?

13. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

14. $a_n = \sin(n\frac{\pi}{4})$.

2.4. Megoldások

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,\ N = 10.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1,\ N = 10.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1,\ N = 202.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0.$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = e^2.$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty.$

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = -\frac{4}{7}.$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0.$

10. Igen.

11. Nem.

12. Igen.

13. Igen.

14. Nem.

3. fejezet

Sorok

3.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben bevezetjük a numerikus sor fogalmát. Megmondjuk, hogy mit értünk konvergens (divergens) soron, illetve adunk néhány egyszerű kritériumot sorok konvergenciájának eldöntésére.

3.1. Definíció. Az (a_n) valós sorozatból képzett $\sum a_n$ *numerikus sor*on (vagy röviden *sor*on) az (a_n) úgynevezett részletösszegeiből álló sorozatot értjük. Nevezetesen jelölje (s_n) azt a sorozatot, amelynek n-edik tagja (az n-edik részletösszeg) $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor *konvergens*, ha az (s_n) részletösszeg-sorozat konvergens. Az (s_n) sorozat határértékét (ha létezik) a sor *összeg*ének nevezzük, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$-nel jelöljük. Amennyiben az (s_n) sorozat nem konvergens, úgy a sort *divergens*nek nevezzük.

3.3. Definíció. A $\sum a_n$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha az $(|a_n|)$ sorozatból képzett $\sum |a_n|$ sor konvergens.

Fontos megjegyezni, hogy a $\sum a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy az (a_n) sorozat nullsorozat legyen.

A sorozatoknál tanultakhoz hasonlóan képezhetjük egy sor számszorosát, illetve két sor összegét. Nevezetesen ha $\lambda \in \mathbb{R}$, (a_n) és (b_n) tetszőleges sorozatok, akkor $\lambda \sum a_n$ a (λa_n)-ből, $\sum a_n + \sum b_n$ az $(a_n + b_n)$ sorozatból képzett sort jelenti. Nyilvánvaló, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \alpha$ és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \beta$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda\alpha$ és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$.

A későbbi fejezetekben használni fogjuk a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ jelölést is attól függően, hogy az (a_n) sorozatot hogyan indexeljük (azaz hogy az összegzésnél az első tagja a_0 vagy a_1). A $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ szimbólum azt a sorösszeget jelenti, amelyet az

$$s_1 = a_k,\ s_2 = a_k + a_{k+1},\ s_3 = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}, \ldots$$

részletösszeg-sorozat határértékeként kapunk, ha az létezik.

Sorok összegének kiszámítása többnyire bonyolult feladat. De annak eldöntésére, hogy a sor (abszolút) konvergens-e, több egyszerű kritérium is rendelkezésünkre áll. Ezeket foglalják össze a következő tételek.

3.1. Tétel. *A $\sum \frac{1}{n^p}$ sor konvergens, ha $p > 1$, és divergens, ha $p \leq 1$.*

Fontos külön megjegyezni, hogy eszerint a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens.

3.2. Tétel (Minoráns, ill. majoráns kritérium)**.** *Legyen (a_n) és (b_n) nemnegatív tagú sorozat, amelyekre fennáll, hogy bizonyos N indextől kezdve $a_n \leq b_n$. Ekkor*

(1) *ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens,*

(2) *ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.*

3.3. Tétel (Hányadoskritérium)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez létezik olyan $0 \leq q < 1$ és N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$. Ekkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens.*

3.4. Tétel (Gyökkritérium)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez van olyan $0 \leq q < 1$ és N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. Ekkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens.*

A fenti két kritériumot csak olyan esetekben fogjuk alkalmazni, amikor az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, illetve $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozatok konvergensek. Ha a határérték kisebb, mint 1, akkor a sor abszolút konvergens, ha nagyobb, mint 1, akkor pedig divergens. Ha a határérték éppen 1, akkor ezen kritériumok segítségével nem tudjuk eldönteni, hogy a sor konvergens-e.

3.5. Tétel (Leibniz-kritérium)**.** *Legyen (a_n) monoton fogyó nullsorozat. Ekkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ (alternáló) sor konvergens.*

3.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozza meg a (q^n) sorozat ($q \in \mathbb{R}$) részletösszeg-sorozatát, illetve $|q| < 1$ esetén annak határértékét!

Megoldás. Írjuk fel az s_n, illetve qs_n tagokat! Látható, hogy

$$s_n - qs_n = (q + q^2 + \cdots + q^n) - (q^2 + \cdots + q^{n+1}) = q - q^{n+1}.$$

Az egyenletet rendezve $s_n = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$. Innen már az is világos, hogy $|q| < 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ sor konvergens és a határértéke $\frac{q}{1-q}$.

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2\cdot 5^{n-1}} + \frac{1}{5\cdot 2^{n+1}})$ sor?

Megoldás. Elemi átalakítások után meghatározhatjuk a sor összegét két konvergens mértani sor segítségével:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\cdot 5^{n-1}} + \frac{1}{5\cdot 2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\frac{1}{5^n} + \frac{1}{10}\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} + \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{29}{40}.$$

Határozza meg a **3–5.** feladatokban megadott sorok összegét!

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, **4.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(\frac{n}{n+1})$, **5.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Megoldás.

3. A törtet kettébontva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

A részletösszeg-sorozat k-adik tagja

$$s_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

így

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

4. A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln n - \ln(n+1)\right).$$

Következésképp

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} (\ln n - \ln(n+1)) = \lim_{k\to+\infty} (\ln 1 - \ln(k+1)) = -\infty.$$

5. Hasonlóan az előző két ponthoz, az összegzendő sorozatot teleszkopikus összeggé alakítjuk. Azaz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \right) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right),$$

így $s_k = -1 + \sqrt{k+1} \to +\infty$, tehát a sor divergens.

6. Az összehasonlító kritériumok segítségével döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n+1}+2}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

Megoldás.

(a) Az összegzendő sorozat n-edik tagját alulról becsüljük a nevező növelésével, majd alkalmazzuk a minoráns kritériumot a harmonikus sor konstansszorosával:

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}.$$

Tehát a sor divergens.

(b) A majoráns kritériumot fogjuk használni. A nevezőt csökkentve felülről becsülhetünk egy konvergens mértani sorral, nevezetesen

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n+1}+2} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n},$$

azaz a sor konvergens.

(c) A számlálót felülről becsülve

$$0 \le \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

így alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot az $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sorozattal. Így a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$ sor konvergens.

7. Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ sor?

Megoldás. Mivel $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ minden $n \geq 2$-re, ezért

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} = 2\frac{1}{2^n}.$$

Vagyis az $\frac{1}{n!}$ sorozat majorálható egy szummálható mértani sor kétszeresével, ezért a $\sum \frac{1}{n!}$ sor konvergens.

8. Igazolja, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^n$ sor abszolút konvergens, ha $|q| < 1$!

Megoldás. Az $\left|\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}\right| = \frac{n+1}{n} \cdot |q|$ hányados értéke pontosan akkor lesz kisebb, mint 1 valamilyen indextől kezdve, ha $|q| < 1$. Ekkor a hányadoskritérium szerint a sor abszolút konvergens.

9. A hányadoskritériumot használva döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{2^n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(2n+5)\cdot 3^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n^2+1}$.

Megoldás.

(a) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$, azaz a sor abszolút konvergens.

(b) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+3)!}{(2n+7)\cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(2n+5)\cdot 3^n}{(n+2)!} = \frac{(n+3)\cdot(2n+5)}{(2n+7)\cdot 3} \to +\infty$, tehát a sor divergens.

(c) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3(n+1)}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{3n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} \to 1$, így a hányadoskritérium segítségével nem tudjuk eldönteni, hogy konvergens-e.

10. A gyökkritériumot használva döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{n+1}}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{1+2^{2n}}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

Megoldás.

(a) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n^{n+1}}} = \dfrac{2}{n\sqrt[n]{n}} \to 0 < 1$, tehát a sor abszolút konvergens.

(b) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{1+2^{2n}}} < \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{2^{2n}}} = \dfrac{2}{4} < 1$, ezért a sor abszolút konvergens.

(c) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{3}e < 1,$

ezért a sor abszolút konvergens.

11. Igazolja, hogy $a_n \to 0$ a $\sum a_n$ sor konvergenciájának szükséges, de nem elégséges feltétele!

Megoldás. Vegyük észre, hogy $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \geq 2$. Így ha a sor konvergens, azaz az (s_n) részletösszeg-sorozatnak létezik $\alpha \in \mathbb{R}$ határértéke, akkor

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to \alpha - \alpha = 0.$$

A nullához tartás ugyanakkor nem elégséges feltétel. Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sort. Tetszőleges $k \geq 1$-re az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat $2^k+1, \cdots, 2^{k+1}$-edik tagjaira a

$$\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget felírva világos, hogy a sor divergens, hiszen a részletösszeg-sorozat $+\infty$-hez tart.

12. Mutasson példát konvergens, de nem abszolút konvergens sorra!

Megoldás. Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sort. A Leibniz-kritérium miatt ez konvergens, de az előző feladatban leírtak miatt nem abszolút konvergens.

3.3. Megoldandó feladatok

Vizsgálja meg az **1–14.** feladatokban szereplő (a_n) sorozatokból képzett $\sum a_n$ sorok konvergenciáját a tanult kritériumok segítségével!

1. $\sum \frac{\sqrt[3]{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+1}$,

2. $\sum \frac{6+n}{n^3+2n+1}$,

3. $\sum \frac{n+e^n}{n^2-n}$,

4. $\sum (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$,

5. $\sum \frac{\cos^2 n}{n \cdot n^{1/3}}$,

6. $\sum \frac{n^n}{(n!)^2}$,

7. $\sum (-1)^n \frac{2n-1}{3n+1}$,

8. $\sum \frac{1}{n - \ln n}$,

9. $\sum \frac{1}{n^3 \ln(n^2)+n}$,

10. $\sum \frac{10}{5^{n-2}+n+1}$,

11. $\sum \frac{n!}{(2n)!}$,

12. $\sum \frac{2\cdot 8^n \cdot n!}{2n!}$,

13. $\sum \frac{2^n(n^3+1)}{n!}$,

14. $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3.4. Megoldások

1. Konvergens (majoráns kritérium).

2. Konvergens (majoráns kritérium).

3. Divergens (minoráns kritérium).

4. Konvergens (Leibniz-kritérium).

5. Konvergens (majoráns kritérium).

6. Konvergens (gyökkritérium).

7. Divergens $\left(a_n \to \frac{2}{3}\right)$.

8. Divergens (minoráns kritérium).

9. Konvergens (majoráns kritérium).

10. Konvergens (geometriai sor).

11. Konvergens (hányados kritérium).

12. Konvergens (hányados kritérium).

13. Konvergens (hányados kritérium).

14. Konvergens (Leibniz-kritérium).

4. fejezet

Függvények folytonossága, határértéke

Ebben a fejezetben definiáljuk valós függvények folytonosságát, pontbeli határértékét, illetve a két fogalom kapcsolatát.

4.1. Elméleti összefoglaló

4.1. Definíció. Az f valós függvényt *folytonos*nak nevezzük az $a \in D(f)$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az értelmezési tartomány minden olyan x pontjára, amelyre $|x - a| < \delta$, fennáll, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. A függvényt folytonosnak nevezzük a $H \subset D(f)$ halmazon, ha folytonos a H halmaz minden pontjában. Az f függvény folytonos, ha folytonos a $D(f)$ halmazon.

Fontos megjegyezni, hogy a középiskolából jól ismert függvények legtöbbje folytonos. Így az id^n, $\frac{1}{\mathrm{id}}$, sin, cos, $\log_a$, $\exp_a$.

4.1. Tétel. *Ha az f és g függvények folytonosak az értelmezési tartományuk egy közös a pontjában, akkor λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$, illetve $\dfrac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ is folytonos az a pontban.*

4.2. Tétel. *Legyen f és g valós függvény. Ha a g függvény folytonos az $a \in D(g)$ pontban, az f függvény értelmezve van és folytonos a $g(a)$ pontban, akkor az $f \circ g$ függvény értelmezve van a-ban, és ott folytonos.*

4.3. Tétel (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv)**.** *Az f valós függvény pontosan akkor folytonos az $a \in D(f)$ pontban, ha minden olyan a-hoz tartó (x_n) sorozatra, amely az értelmezési tartományában halad (azaz $x_n \in D(f)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re), fennáll, hogy $f(x_n) \to f(a)$.*

4.4. Tétel (Bolzano)**.** *Legyen f az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. Ha léteznek olyan x és y pontok $D(f)$-ben, amelyekre $f(x) < 0$, illetve $f(y) > 0$ teljesül, akkor a függvénynek van zérushelye. Azaz létezik olyan $a \in D(f)$ pont, amelyre $f(a) = 0$.*

4.2. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ pont a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *torlódási pont*ja, ha minden $\varepsilon > 0$-ra az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap H$ halmaznak van a-tól különböző x eleme. A H halmaz torlódási pontjainak halmazát H' jelöli.

4.3. Definíció. Az f valós függvénynek az $a \in D(f)'$ pontban létezik a véges *határértéke*, és A-val egyenlő ($A \in \mathbb{R}$), ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallum minden a-tól különböző elemére.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az a pontról nem tettük fel, hogy ott a függvény értelmezve van. A fenti határértékre a $\lim_{x \to a} f(x) = A$ vagy röviden a $\lim_a f = A$ jelölést használjuk.

4.4. Definíció. Az f valós függvénynek az $a \in D(f)'$ pontban létezik a határértéke, és az $+\infty$ (illetve $-\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > K$ (illetve $f(x) < K$) teljesül az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallum minden $D(f)$-beli elemére.

4.5. Definíció. Legyen f olyan valós függvény, amelynek $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $+\infty$-ben $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy az értelmezési tartomány minden δ-nál nagyobb x elemére $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül. Az alulról nem korlátos értelmezési tartományú f függvény véges A határértéke a $-\infty$-ben hasonlóan definiálható.

4.6. Definíció. Legyen f olyan valós függvény, amelynek $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $+\infty$-ben $+\infty$ (illetve $-\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan δ érték, hogy az értelmezési tartomány minden $x > \delta$ értékére $f(x) > K$ (illetve $f(x) < K$). Az alulról nem korlátos értelmezési tartományú f függvény végtelen határértéke a $-\infty$-ben hasonlóan definiálható.

4.5. Tétel. *Legyen f és g valós függvény, és tegyük fel, hogy $D(f)' \cap D(g)' \neq \emptyset$. Ha f-nek és g-nek létezik véges határértéke az $a \in D(f)' \cap D(g)'$ pontban, akkor $f + g$-nek is, és*

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g.$$

Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$-re létezik a λf-nek határértéke, és

$$\lim_a (\lambda f) = \lambda \lim_a f.$$

Abban az esetben, ha f vagy g legalább egyikének határértéke nem véges egy adott $\overline{\mathbb{R}}$-beli pontban, akkor az összeg, illetve szorzat határértékére vonatkozó állításokat az $\overline{\mathbb{R}}$-beli összeadás és szorzás művelet szerint kell értelmezni.

4.6. Tétel (Határértékre vonatkozó átviteli elv)**.** *Az f valós függvénynek pontosan akkor létezik véges határértéke az a pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy tetszőleges $D(f) \setminus \{a\}$-ban haladó, $x_n \to a$ ($x_n \neq a$) sorozatra fennáll, hogy $f(x_n) \to A$. Ekkor $\lim_a f = A$.*

4.7. Tétel. *Az f valós függvény pontosan akkor folytonos az $a \in D(f) \cap D(f)'$ pontban, ha ott létezik határértéke és $\lim\limits_{a} f = f(a)$.*

4.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozza meg a valós számok alábbi részhalmazainak torlódási pontjait!

(a) $(0, 1)$, (b) $\mathbb{Z}$, (c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Megoldás.

(a) Igazolni fogjuk, hogy a $(0, 1)$ nyílt intervallum torlódási pontjainak halmaza a $[0, 1]$ zárt intervallum. Legyen $\alpha \in (0, 1)$, k pedig olyan nagy, hogy $\alpha - \frac{1}{k} \in (0, 1)$ teljesüljön. Ekkor az $a_n := \alpha - \frac{1}{k+n}$ sorozat minden tagja a $(0, 1)$ intervallumban van, egyik tagja sem egyenlő α-val, és $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \alpha$. Ha $\alpha = 0$, akkor az $\frac{1}{n}$, ha $\alpha = 1$, akkor az $1 - \frac{1}{n}$ sorozat megfelelő választás.

(b) Az egész számok halmazának nincs torlódási pontja $\mathbb{R}$-ben, azaz $\mathbb{Z}' = \emptyset$. Ha ugyanis α tetszőleges valós szám, akkor találunk olyan ε-t, amelyre az

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \setminus \{\alpha\} = (\alpha - \varepsilon, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \varepsilon)$$

halmaz nem tartalmaz egész számot.

(c) A halmaznak egyetlen torlódási pontja van, méghozzá a nulla.

2. Igazolja a definíció segítségével, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a $\delta = \varepsilon^2$ választással $x \in (0, +\infty)$ és $|x - 0| < \delta$ esetén $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$, azaz f folytonos 0-ban. Legyen most $a > 0$ tetszőleges. Mivel

$$|f(x) - f(a)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| =$$
$$= \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \left|\frac{|x - a|}{\sqrt{a}}\right|,$$

ezért $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ választással

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

azaz f folytonos a-ban.

3. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$, (c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Megoldás. A problémát mindhárom esetben az okozza, hogy a nevezőbe helyettesítve 0-t kapunk. Ezt fogjuk kiküszöbölni szorzattá alakítással, gyöktelenítéssel, illetve az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosság alkalmazásával.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2.$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{(x^2-4)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-4)}{(x^2-4)^2} =$
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim\limits_{x\to 4} 2\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}.$

4. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{1+x}{x}\right|$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2-3}{x^3-2x}$.

Megoldás.

(a) Az $x_n = 8 - \frac{1}{n}$ sorozat mentén az értékek $-\infty$-hez, az $y_n = 8 + \frac{1}{n}$ sorozat mentén pedig $+\infty$-hez tartanak, így nem létezik a határérték az átviteli elv miatt.

(b) Igazolni fogjuk, hogy tetszőleges $K > 0$ hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x| < \delta$ esetén $|f(x)| > K$, azaz a határérték $+\infty$. Ha x kisebb, mint 1, akkor a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva

$$K < \left|x + \frac{1}{x}\right| \le |x| + \left|\frac{1}{x}\right| < 2\frac{1}{x}.$$

Azaz ha δ értékét $\frac{2}{K}$-nál kisebbre választjuk, akkor $|x + \frac{1}{x}| > K$.

(c) A számlálót és nevezőt a legnagyobb kitevőjű x hatvánnyal, x^3-nal leegyszerűsítve azt látjuk, hogy a számláló és a nevező is 1-hez tart $x \to +\infty$ esetén, így a határérték 1.

5. Folytonos-e az $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{\sin(x)}$ függvény?

Megoldás. Legyen $a \in (0, \pi)$ tetszőleges, ekkor $\sin a \neq 0$. Mivel a reciprok függvény a 0 kivételével mindenütt értelmezve van és folytonos (így $\sin a$-ban is), ezért a kompozíciófüggvény folytonosságáról tanultak szerint f folytonos a-ban. Azaz f folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában.

6. Igazolja az átviteli elv segítségével, hogy az $f(x) := x^2$ valós függvény minden pontban folytonos!

Megoldás. Az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, így azt kell igazolnunk, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és minden $x_n \to a$ ($x_k \neq a$ minden $k \in \mathbb{N}$) sorozatra $f(x_n) \to f(a)$. A sorozatoknál tanultak szerint konvergens sorozatok szorzata konvergens, és határértéke a határértékek szorzata, így

$$f(x_n) = x_n^2 = x_n \cdot x_n \to a \cdot a = a^2 = f(a).$$

7. Mondjon példát olyan függvényre, amelynek egyetlen pontban sem létezik határértéke!

Megoldás. Ismét a határértékre vonatkozó átviteli elvet fogjuk használni. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alább meg fogjuk mutatni, hogy a valós számegyenes tetszőleges a pontjához találhatunk olyan racionális számokból álló (x_n) sorozatot, amelynek határértéke a, és hasonlóan, találhatunk olyan irracionálisokból álló (y_n) sorozatot, amelynek határértéke a, továbbá egyik sorozatnak sem tagja maga az a szám. Ekkor viszont

$$1 = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0,$$

így f-nek nincs határértéke a-ban.

Legyen ugyanis (x_n) a következő sorozat: mivel minden intervallum tartalmaz racionális számot, ezért választhatunk egy

$$x_1 \in (a, a+1) \cap \mathbb{Q}$$

számot. Ha ez megvan, válasszuk x_2-t az

$$\left(a, a + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

halmazból. (Ekkor $a < x_2 < a + \frac{1}{2}$.) Ha már az első $n-1$ elemet kiválasztottuk, akkor legyen

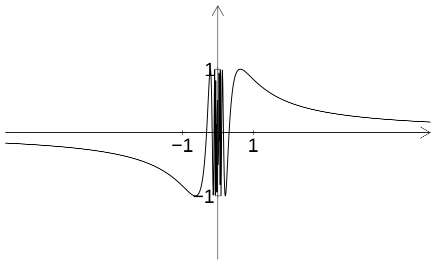
$$x_n \in \left(a, a + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$$

tetszőleges. Az így kapott sorozat a-hoz tart a közrefogási elv szerint, és minden tagja $\mathbb{Q}$-beli. Irracionális számokból álló (y_n) sorozat létezése teljesen analóg módon igazolható.

8. Folytonos-e a következő f valós függvény?

$$f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{ha} \quad x \neq 0, \; f(0) := 0.$$

Megoldás. Ha $a \neq 0$, akkor f folytonos a-ban, ugyanis a reciprokfüggvény folytonos a-ban, a sin függvény pedig $\frac{1}{a}$-ban, így használhatjuk a kompozíciófüggvény folytonosságára vonatkozó tételt. Az $a = 0$ pontban azonban a függvény nem folytonos. Ha folytonos lenne, akkor tetszőleges nullához tartó (x_n) $(x_n \neq 0)$ sorozatra az $(f(x_n))$-nek $f(0) = 0$-hoz kellene tartania. Ez azonban nem teljesül, tekintsük például az $x_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ tagokból álló sorozatot. Ennek minden tagjára $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.



9. Folytonos-e a nullában a következő f valós függvény?

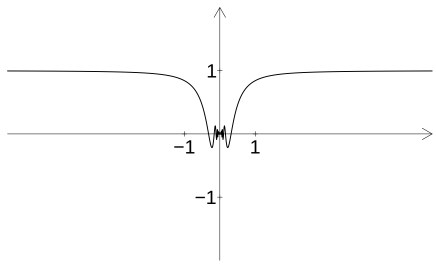
$$f(x) := x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{ha} \quad x \neq 0, \; f(0) := 0.$$

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mutatnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre $|x - 0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Kihasználva, hogy $|\sin x| < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(0)| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| < \delta.$$

Azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $\delta := \varepsilon$ választás megfelelő.

10. Mutasson példát olyan függvényre, amely folytonos a nullában, létezik az inverze, de az inverz az $f(0)$ pontban nem folytonos!



Megoldás. Legyen f a következő $(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty)$-en értelmezett függvény:

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < -1; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ x-1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ekkor f folytonos a nullában, mert tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \frac{1}{2}$ megfelelő, ugyanis az értelmezési tartomány egyetlen $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallumba eső x eleme a 0, arra pedig fennáll, hogy $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. A függvény injektív, így létezik inverze, nevezetesen

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ x+1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

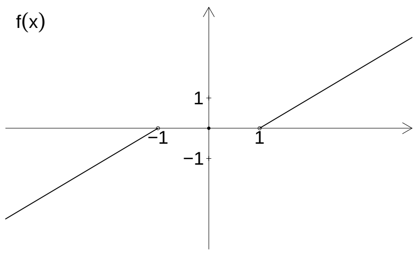
Ugyanakkor a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint a függvény nem lehet folytonos, mert például $f\left(-\frac{1}{n}\right) \to -1$ és $f(\frac{1}{n}) \to 1$, azaz nem minden 0-hoz tartó sorozatra ugyanaz a függvényértékek mentén vett határérték.

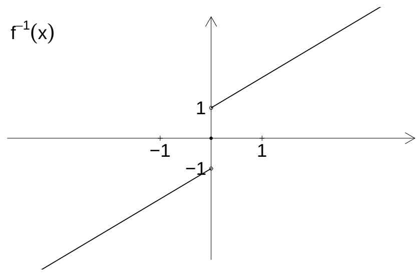
11. Mutassa meg, hogy az $x^5 + 4x - 3 = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumban.

Megoldás. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^5 + 4x - 3$ függvényt. Azt kell igazolnunk, hogy ennek van zérushelye. Mivel f folytonos (hiszen polinom), továbbá $f(0) = -3 < 0$ és $f(1) = 2 > 0$ egyszerre teljesül, ezért a Bolzano-tétel szerint kell legyen olyan $x \in [0, 1]$, amelyre $f(x) = 0$.

12. Melyik az a legbővebb $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, amelyen a $\lfloor\cdot\rfloor$ alsó egészrész-függvény folytonos?

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$





Megoldás. A $k \in \mathbb{Z}$ helyeken az egészrész-függvény biztosan nem folytonos, ugyanis a $(k - \frac{1}{n})$ sorozat mentén a függvényértékek $k - 1$-hez, a $(k + \frac{1}{n})$ sorozat mentén pedig k-hoz tartanak, így a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint a függvény nem lehet folytonos k-ban. Ha $x \notin \mathbb{Z}$, akkor legyen δ az x-hez legközelebb eső egész szám x-től vett távolságának a fele $\left(\text{azaz } \delta := \frac{\min\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\}}{2}\right)$. A függvény értéke az $(x - \delta, x + \delta)$ intervallum minden pontjában $\lfloor x \rfloor$, így a függvény x-ben folytonos, mert konstans függvény folytonos. Azaz a legbővebb halmaz, ahol a függvény folytonosan értelmezhető: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

13. Legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény. Igazolja, hogy van olyan $x^* \in [0,1]$, amelyre $f(x^*) = x^*$.

Megoldás. Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$ valamelyike teljesül, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben $f(0) - 0 > 0$, illetve $f(1) - 1 < 0$. Mivel a

$$g(x) := f(x) - x$$

függvény két folytonos függvény különbsége, ezért folytonos. Továbbá fennáll, hogy $g(0) > 0$ és $g(1) < 0$, ezért a Bolzano-tétel szerint létezik olyan $x^* \in [0,1]$, amelyre

$$f(x^*) - x^* = g(x^*) = 0,$$

azaz $f(x^*) = x^*$.

4.3. Megoldandó feladatok

Az **1–3.** feladatokban határozza meg az adott halmazok torlódási pontjait!

1. $(1,3)\cup(3,4)$ **2.** $\mathbb{N}$ **3.** $\{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n :\ n\in\mathbb{N}\}$

Igazolja, hogy a **4–6.** feladatokban szereplő képlettel megadott, $\mathbb{R}$-en definiált függvények folytonosak 0-ban! Adott $\varepsilon > 0$-hoz adja meg a lehető legnagyobb $\delta > 0$ értéket!

4. $f(x)=x^3$, **5.** $g(x)=\sqrt[3]{x}$, **6.** $h(x)=x^2+x+1$.

7. Igazolja az átviteli elv segítségével, hogy az $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$ függvénynek létezik határértéke $+\infty$-ben!

8. Igazolja az átviteli elv segítségével, hogy az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke a 0-ban!

9. Határozza meg azt a legbővebb halmazt, ahol az $f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$ függvény folytonosan értelmezhető!

10. Igazolja, hogy a $2x^3+3x^2=4x^3+1$ egyenletnek van valós megoldása!

Léteznek-e a **11–14.** feladatokban szereplő határértékek? Ha igen, adja meg, hogy mennyivel egyenlőek!

11. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-2}$, **13.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{|x^2-1|}$,

12. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^3-12x}{x^4-16}$, **14.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{12}}{x-3}$.

4.4. Megoldások

1. $[1,4]$. **2.** $\emptyset$. **3.** e^2.

4. $\delta:=\sqrt[3]{\varepsilon}$. **5.** $\delta:=\varepsilon^3$. **6.** $\delta:=\frac{\varepsilon}{2}$, ha $0<\varepsilon<1$.

7. Válasszunk tetszőleges $+\infty$-hez tartó (x_n) sorozatot. Mivel a $(\sin x_n)$ sorozat korlátos, $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ nullsorozat, ezért a szorzat is nullsorozat. Azaz az átviteli elv szerint a függvény határértéke a $+\infty$-ben 0.

8. Az $\frac{1}{n}$ sorozat mentén $+\infty$-hez, a $\frac{-1}{n}$ mentén $-\infty$-hez tartanak a függvényértékek.

9. Az $\frac{1}{x}$ függvény folytonos az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon, így csak azt kell megállapítanunk, hogy a $\sin x\cos x$ érték milyen x-ekre nem nulla. Ez pedig az $\mathbb{R}\setminus\{\frac{k\pi}{2} :\ k\in\mathbb{Z}\}$ halmaz.

10. Tekintsük az $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ függvényt. Ennek van nullhelye a Bolzano-tétel miatt.

11. Nem létezik a határérték.

12. $\frac{6}{8}$.

13. $+\infty$.

14. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. fejezet

Lineáris algebra

5.1. Elméleti összefoglaló

A későbbiekben szükség lesz a lineáris algebra néhány alapvető fogalmára. Ebben a fejezetben összegyűjtjük a szükséges tudnivalókat. Az egyszerűség kedvéért mindent csak abban a speciális esetben definiálunk, amelyben később használni fogjuk.

Elsőként ismertetjük a középiskolából már ismert sík, illetve tér fogalmának egy általánosítását.

5.1. Definíció. Jelölje $\mathbb{R}^n$ a rendezett „n-esek" halmazát, azaz legyen

$$\mathbb{R}^n := \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\big\}.$$

Ezen halmaz két elemének összege, illetve egy elemének α valós számszorosán az alábbit értjük

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

illetve

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Az $\mathbb{R}^n$ halmazt ezzel a két művelettel ellátva *n-dimenziós tér*nek, elemeit *n-dimenziós vektorok*nak nevezzük. Ezen a téren természetes módon értelmezhető a távolság fogalma. Az $(x_1, \ldots, x_n)$ és az $(y_1, \ldots, y_n)$ vektorok *távolság*án a

$$\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

számot értjük. Az $(x_1, \ldots, x_n)$ vektor $\|(x_1, \ldots, x_n)\|$-val jelölt *hossz*a (vagy *normá*ja) a vektor $(0, \ldots, 0)$-tól vett távolsága, azaz

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Az $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ vektorok *skaláris szorzat*a a következő szám:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

A fentebb definiált hossz meghatározható a skaláris szorzat segítségével is:

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{(x_1,\ldots,x_n)\cdot(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Érdemes meggondolni, hogy a definíciókban $n = 2$ helyére 2 esetén a sík, $n = 3$ esetén a tér vektorainak jól ismert tulajdonságait kapjuk. A továbbiakban minden fogalmat csak ezekben az $n = 2$, illetve $n = 3$ speciális esetekben mondunk ki.

5.2. Definíció. Négyzetes mátrixon olyan 2×2, illetve 3×3 „táblázatot" értünk, amelynek elemei valós számok. Azaz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ illetve } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$.

Mátrixok összeadását „tagonként" végezzük, azaz az összegmátrix i-edik sorának j-edik eleme a két mátrix i-edik sora j-edik elemének összege. Mátrixot számmal úgy szorzunk, hogy külön-külön minden tagját beszorozzuk.

A következő mátrixokat 2×2-es, illetve 3×3-as egységmátrixnak nevezzük és **I**-vel jelöljük:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A továbbiakban a mátrixokat félkövér nagybetűkkel, a vektorokat félkövér kisbetűkkel jelöljük.

5.3. Definíció. Az $\mathbf{A}$ mátrix *determinánsán* azt a $\det(A)$ számot értjük, amelyet a következőképp lehet meghatározni a 2×2, illetve 3×3 esetekben:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

illetve

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg.$$

Értelmezhetjük egy mátrixnak egy vektorral vett szorzatát. Alkalmazkodva a széles körben elterjedt jelölésekhez, mátrix-vektor szorzás esetén (és csak akkor) a vektorokat mint oszlopvektorokat ábrázoljuk:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix},$$

illetve

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a kapott vektor koordinátái nem mások, mint az (x, y) (illetve (x, y, z)) vektor skaláris szorzata a mátrix megfelelő sorával. A most bevezetett szorzás geometriailag a sík (illetve a tér) egy transzformációját írja le. Nézzük példaként az y tengelyre való tükrözést a síkon, és az x tengelyre vett merőleges vetítést a térben. Az (x, y) sorvektor y tengelyre vett tükörképét úgy kapjuk meg, ha képezzük az

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

szorzatot. Hasonlóan, az (x, y, z) vektor x-tengelyre vett vetületét a következő szorzat adja meg:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Definíció. A λ valós számot az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátérték*ének nevezzük, ha van olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort λ-hoz tartozó *sajátvektor*nak nevezzük, ha teljesíti az előző egyenlőséget.

A fenti példákat tekintve: a sík y tengelyére vett tükrözésnél például sajátérték a $\lambda = -1$, ehhez sajátvektor az x tengely minden nullától különböző vektora. Az x tengelyre vett vetítésnél sajátérték például a $\lambda = 0$ szám, ehhez sajátvektor minden olyan nullától különböző vektor, amelynek első koordinátája 0.

5.1. Tétel. *A λ valós szám az $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan akkor sajátértéke, ha* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Megjegyezzük, hogy a $\lambda \mapsto \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ egyváltozós függvényt az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus polinom*jának nevezzük. Az előző tétel azt mondja, hogy $\mathbf{A}$ sajátértékei nem mások, mint a karakterisztikus polinomjának nullhelyei.

5.2. Kidolgozott feladatok

1. Milyen $p \in \mathbb{R}$ értékre lesz az alábbi vektorok skaláris szorzata 0?

(a) $\mathbf{x} = (p, 1)$, $\mathbf{y} = (p, p)$, (b) $\mathbf{x} = (p, 1, p)$, $\mathbf{y} = (2, 1, p)$.

Megoldás.

(a) A skaláris szorzat definíciójába helyettesítve $(p, 1) \cdot (p, p) = pp + 1p = p(p + 1)$. Egy szorzat értéke pontosan akkor nulla, ha az egyik tényezője nulla, esetünkben $p = 0$, vagy $p = -1$.

(b) Hasonlóan, $(p,1,p)\cdot(2,1,p) = 2p+1+p^2 = (p+1)^2$, így a skaláris szorzat pontosan akkor nulla, ha $p=-1$.

2. Végezze el az $(\mathbf{A}-3\mathbf{B})\mathbf{x}$ mátrix-vektor műveletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

és $\mathbf{x} = (1,0,-1)$.

Megoldás. Elsőként a mátrixműveleteket elvégezve

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

majd az $(1,0,-1)$ vektorral szorozva

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3. Határozza meg a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A bevezetőben leírtak szerint $\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = 2\cdot(-5) - 1\cdot 7 = -17$, illetve

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\cdot1\cdot0 + 1\cdot2\cdot1 + 0\cdot0\cdot1 - 1\cdot0\cdot0 - 2\cdot2\cdot1 - 0\cdot1\cdot1 = -2.$$

4. Milyen p, illetve q értékekre lesz a következő mátrix determinánsa 0?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & p \\ p & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & q \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A determinánsokat kiszámolva

$$\det\begin{pmatrix} 3 & p \\ p & 2 \end{pmatrix} = 6 - p^2,$$

illetve

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & q\end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot q+2\cdot 2\cdot 2+0\cdot 0\cdot 4-2\cdot 0\cdot q-1\cdot 2\cdot 4-0\cdot 1\cdot 2 = q,$$

így $p = \pm\sqrt{6}$, illetve $q = 0$.

5. Határozza meg az előző feladatban szereplő $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját, majd határozza meg p értékét úgy, hogy a mátrixnak sajátértéke legyen a -1!

Megoldás. Elsőként felírjuk magát az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ mátrixot

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & p\\ p & 2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa a definíció szerint

$$\det\begin{pmatrix}3-\lambda & p\\ p & 2-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)-p^2,$$

ez tehát a karakterisztikus polinom. Ha azt szeretnénk, hogy -1 sajátérték legyen, akkor azt kell elérnünk, hogy λ helyére -1-et helyettesítve nullát kapjunk. Végezzük el a helyettesítést, majd állítsuk be p értékét:

$$((3-(-1))(2-(-1))-p^2 = 12-p^2.$$

Ez a kifejezés pontosan akkor lesz nulla, ha $p = \sqrt{12}$ vagy $p = -\sqrt{12}$.

6. Határozza meg a következő mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Megoldás. A főátló elemeiből λ-t levonva, majd a determinánst kiszámolva

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda).$$

7. Határozza meg az előző feladatban szereplő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás. Láttuk, hogy a karakterisztikus polinom $(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$-val egyenlő. Mivel a sajátértékek a karakterisztikus polinom nullhelyei, ezért

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2,\quad \lambda_3 = -1.$$

Ahhoz, hogy egy (x, y, z) vektor a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez sajátvektor legyen, teljesítenie kell az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

egyenlőséget. A baloldalon lévő szorzást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(x + z, x + 2y, -z) = (x, y, z).$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a koordinátáik megegyeznek, azaz az

$$x + z = x, \quad x + 2y = y, \quad -z = z$$

egyenlőségek egyszerre teljesülnek. A harmadik egyenletből látható, hogy $z = 0$, a másodikból pedig hogy $y = -x$. Így $t \neq 0$ tetszőleges választása mellett a $(t, -t, 0)$ vektor $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor. A másik két sajátérték esetében hasonlóan kell eljárni. A λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza

$$\big\{(0, t, 0) : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

a $\lambda_3 = -1$ sajátértékhez tartozóké

$$\left\{ \left(t, -\frac{t}{3}, -2t \right) : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

8. Mik a sajátértékei és sajátvektorai a következő mátrixnak?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A karakterisztikus polinomot felírva

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Ezen másodfokú polinom gyökei (azaz a sajátértékek) $\lambda_1 = 2$, illetve $\lambda_2 = -1$. Azaz az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

egyenletrendszereket kell megoldanunk. Az első egyenletrendszert azon (x, y) párok elégítik ki, ahol $y = \frac{x}{2}$, a másodikat azok, ahol $y = -x$. Azaz a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza

$$\left\{ \left(t, \frac{t}{2} \right) : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

míg a $\lambda_2 = -1$ esetben

$$\{(t, -t) :\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

9. Adjon példát olyan mátrixra, amelynek nincs valós sajátértéke!

Megoldás. Tekintsük a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$-ot. Ennek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 1$, aminek nincs valós nullhelye, tehát nincs valós sajátértéke. Szemléletesen arról van szó, hogy ez a mátrix a $+90$ fokos forgatást írja le a síkon, azaz egy tetszőleges (x, y) vektor elforgatottja épp a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

vektor. A $+90$ fokos forgatás pedig tényleg olyan leképezés, amelyhez nem található olyan nullától különböző vektor, amelynek elforgatottja megegyezik a vektor egy valós számszorosával. (Ugyanez az okoskodás elmondható minden olyan forgatásra, amelynek szöge nem π egész számú többszöröse.)

5.3. Megoldandó feladatok

Határozza meg az **1.–2.** feladatokban lévő 2×2-es determinánsokat!

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Határozza meg a **3.–4.** feladatokban szereplő 3×3-as determinánsok értékét!

3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Határozza meg az **5.–6.** feladatokban megadott mátrixok karakterisztikus polinomját!

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Határozza meg a **7.–9.** feladatokban megadott 2×2-es mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

7. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, **9.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Határozza meg a **10.–12.** feladatokban lévő 3×3-as mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. Adott $\alpha < 0 < \beta$ számokhoz adjon meg olyan 3×3-as mátrixot, amelynek épp $0, \alpha, \beta$ a sajátértékei!

5.4. Megoldások

1. 7. **3.** 2. **5.** $\lambda^2 - 4\lambda + 1$.

2. -3. **4.** 1. **6.** $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$.

7. Sajátértékek: $\lambda_1 = 13$, illetve $\lambda_2 = 1$. A 13-hoz tartozó sajátvektorok halmaza: $\left\{\left(t, \frac{3}{2}t\right) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, az 1-hez tartozóké $\left\{\left(t, \frac{-3}{2}t\right) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$.

8. Sajátértékek: $\lambda_1 = 5$, illetve $\lambda_2 = -2$. Az 5-höz tartozó sajátvektorok halmaza: $\left\{\left(t, \frac{4}{3}t\right) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, a -2-höz tartozóké $\{(t, -t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

9. Sajátértékek: $\lambda_1 = 4$, illetve $\lambda_2 = -1$. A 4-hez tartozó sajátvektorok halmaza: $\left\{\left(t, \frac{-1}{2}t\right) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, az -1-hez tartozóké $\{(t, -3t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

10. Sajátértékek: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, illetve $\lambda_3 = 1$. A 0-hoz tartozó sajátvektorok halmaza: $\{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, a 2-höz tartozóké $\{(2t, 2t, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, az 1-hez tartozóké pedig $\{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

11. Sajátértékek $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, illetve $\lambda_3 = 3$. Az 1-hez tartozó sajátvektorok halmaza: $\{(-t, t, -t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, a 2-höz tartozóké $\{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, a 3-hoz tartozóké pedig $\{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

12. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

6. fejezet

Differenciálhatóság, derivált

6.1. Elméleti összefoglaló

6.1. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ számot a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *belső pont*jának nevezzük, ha létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre $(a-\delta, a+\delta) \subset H$. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak halmazát $\operatorname{int} H$ jelöli.

A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt *nyílt halmaz*nak hívjuk, ha H minden eleme belső pontja e halmaznak.

6.2. Definíció. Az f függvényt az értelmezési tartományának a belső pontjában *differenciálható*nak nevezzük, ha létezik az $f'(a) := \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték, és ez valós szám. Ekkor az $f'(a)$ számot az f függvény a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Megjegyzés. Az $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x \neq a$ hányadost *különbségi hányados*nak nevezzük.

6.3. Definíció. Ha az f függvény az a pontban differenciálható, akkor a grafikonjának az $(a, f(a))$ pontbeli *érintő*je az $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ egyenletű egyenes.

6.1. Állítás. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

6.2. Állítás. *Ha az f és a g függvény differenciálható az a pontban, akkor $f+g$, $f-g$, fg, és $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható az a pontban, továbbá*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

6.1. Következmény. *Ha az f és a g függvény differenciálható az a pontban, valamint $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, akkor $c_1 f + c_2 g$ is differenciálható az a pontban, és*

$$(c_1 f + c_2 g)'(a) = c_1 f'(a) + c_2 g'(a).$$

6.1. Tétel. *Ha a g függvény differenciálható az a pontban és az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható az a pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)\, g'(a).$$

6.2. Tétel. *Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos egy intervallumon, differenciálható annak egy a belső pontjában és $f'(a) \neq 0$, akkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható a $b := f(a)$ pontban, továbbá*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

6.4. Definíció. Az f függvény esetén a

$$D(f') := \{x \in D(f) : f \text{ differenciálható az } x \text{ pontban}\}$$

halmazon az $x \mapsto f'(x)$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvényt az f függvény *deriváltfüggvény*ének nevezzük, jele f'.

Azt mondjuk, hogy az f függvény a $H \subset D(f)$ *nyílt halmazon differenciálható*, ha a H halmaz minden pontjában differenciálható.

Egy függvényt *differenciálható*nak hívunk, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. A függvény *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és a deriváltfüggvénye folytonos.

Az f függvényt az $[a, b]$ *korlátos zárt intervallumon differenciálható*nak mondjuk, ha az (a, b) nyílt intervallumon differenciálható, továbbá léteznek a $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ egyoldali határértékek, és mindkettő valós szám. A függvényt az $[a, b]$ *intervallumon folytonosan differenciálható*nak hívjuk, ha az $[a, b]$ intervallumon differenciálható, valamint a deriváltfüggvényét az intervallum bal és jobb végpontjában a $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ill. a $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ egyoldali határértékként definiálva az így kiterjesztett deriváltfüggvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos.

6.5. Definíció. Az f függvényt *kétszer differenciálható*nak nevezzük az a pontban, ha az f' deriváltfüggvény differenciálható az a pontban. Ekkor $f''(a) := (f')'(a)$ az f függvény *második derivált*ja (vagy *másodrendű derivált*ja) az a pontban.

Bármely $n \geq 2$ egész számra az f függvényt *n-szer differenciálható*nak nevezzük az a pontban, ha az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye (jelölje ezt $f^{(n-1)}$) differenciálható az a pontban. Ekkor $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$ az f függvény *n-edik derivált*ja (vagy *n-edrendű derivált*ja) az a pontban.

6.6. Definíció. Az f függvény és az $n \geq 2$ egész szám esetén a

$$D(f^{(n)}) := \{x \in D(f) : f\ n\text{-szer differenciálható az } x \text{ pontban}\}$$

halmazon az $x \mapsto f^{(n)}(x)$ hozzárendeléssel értelmezett $f^{(n)}$ függvényt az f függvény *n-edik deriváltfüggvény*ének nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az f függvény a $H \subset D(f)$ *halmazon n-szer differenciálható*, ha a H halmaz minden pontjában n-szer differenciálható.

Egy függvényt *n-szer differenciálható*nak hívunk, ha az értelmezési tartományának minden pontjában n-szer differenciálható.

Végül a függvény nulladik deriváltfüggvényének mondhatjuk magát a függvényt, azaz $f^{(0)} := f$.

Megjegyzések. Az f függvény x pontbeli deriváltfüggvényének klasszikus jelölése $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, a második deriváltfüggvényéé $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, általában az n-edik deriváltfüggvényéé $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Amikor a változót t jelöli, az f függvény t pontbeli deriváltjára (Newton nyomán) gyakran az $\dot{f}(t)$ jelölés használatos.

Megjegyzés. Differenciálási szabályok a deriváltfüggvényekre.

$$(cf)' = cf' \quad (c \in \mathbb{R}), \qquad (c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g' \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g', \qquad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

A következő tételben és gyakran később is a rövid jelölésmódot használjuk. Pl. ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $(x^n)'$ a $t \mapsto t^n$, $t \in \mathbb{R}$ függvény deriváltfüggvényének x helyen vett értékét jelöli.

6.3. Tétel (nevezetes elemi függvények deriváltfüggvénye)**.**

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ n \in \mathbb{R}, \qquad (\sin(x))' = \cos(x), \qquad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\cos(x))' = -\sin(x), \qquad (\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a), \ a \in \mathbb{R}^+, \qquad (\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x), \qquad (\operatorname{th}(x))' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)},$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \qquad (\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x), \qquad (\operatorname{cth}(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)},$$

$$\big(\log_a(x)\big)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}, \ a \in \mathbb{R}^+, \ a \neq 1,$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1), \qquad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1),$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}, \qquad (\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R},$$
$$(\operatorname{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}, \qquad (\operatorname{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty),$$
$$(\operatorname{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2},\ x\in(-1,1), \qquad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1].$$

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az arcsin, az arccos és az arch függvény értelmezési tartománya bővebb a deriváltfüggvényük értelmezési tartományánál.

6.3. Állítás. *Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor pontosan egy olyan, legfeljebb elsőfokú l polinom létezik, melyre* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-l(x)}{x-a}=0$, *mégpedig*

$$l(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Ezt hívjuk az f függvényt az a pont közelében legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinom*nak (lineáris függvénynek).*

6.2. Kidolgozott feladatok

1. A definíció alapján igazolja az alábbi deriválási szabályokat!

(a) $(x^n)' = nx^{n-1},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^+$. (b) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x\in\mathbb{R}^+$.

(c) $(\sin(x))' = \cos(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Megoldás.

(a) Az $f(x) := x^n,\ D(f) := \mathbb{R}$ függvény különbségi hányadosának számlálóját tetszőleges $a, x\in\mathbb{R}$, $x\neq a$ esetén szorzattá bontva

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})}{x-a}$$
$$= x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}.$$

Ezért

$$f'(a) := \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

Megjegyzés. Belátható, hogy az összefüggés $x\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{R}$ mellett is igaz, valamint akkor is, ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ és $n=\frac{m}{p}$, ahol $m\in\mathbb{Z}$, p páratlan pozitív egész.

(b) Az $f(x) := \sqrt{x}$, $D(f) := [0, +\infty)$ függvény különbségi hányadosának nevezőjét tetszőleges $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in [0, +\infty)$, $x \neq a$ esetén szorzattá alakíthatjuk:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Ennek alapján

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

(c) Az $f(x) := \sin(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény különbségi hányadosának számlálóját tetszőleges $a, x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ esetén trigonometrikus azonosság segítségével bonthatjuk szorzattá:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \frac{2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} =$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{2} = 0$, $x \mapsto \frac{x-a}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ injektív függvény és $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, valamint $\lim\limits_{x \to a} \frac{x+a}{2} = a$, és a koszinuszfüggvény folytonos az a helyen, így

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) =$$
$$= 1 \cdot \cos(a).$$

2. Az inverz függvény deriváltjára vonatkozó tétel alapján mutassa meg, hogy

(a) $(\operatorname{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (b) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$!

Megoldás.

(a) Legyen $f(x) := \operatorname{tg}(x)$, $D(f) := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ és $a \in D(f)$, $b := \operatorname{tg}(a)$. Ekkor az inverz függvény deriváltjára vonatkozó 6.2. Tételt, a $\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$ összefüggést, majd egy trigonometrikus azonosságot alkalmazva

$$\operatorname{arctg}'(b) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(b))} = \frac{1}{\operatorname{tg}'(a)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(a)}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(a)} = \frac{1}{1 + b^2}.$$

(b) Legyen $f(x) := e^x$, $D(f) := \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$, $b := e^a$. $\ln = \exp^{-1}$ alapján a 6.2. Tétel és az exp függvény deriváltjának felhasználásával

$$\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(\ln(b))} = \frac{1}{e^{\ln(b)}} = \frac{1}{b}.$$

3. Deriválja a következő függvényeket!

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(c) $f(x) := 2e^x - 3\ln(x)$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(d) $f(x) := 5x^7 + \sqrt{2}\,x^4 - 2x^3$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(e) $f(x) := \operatorname{arsh}(x) - 2\operatorname{arch}(x) + 3\operatorname{th}(x)$, $D(f) := [1, +\infty)$.

Megoldás.

(a) Hatványfüggvényként felírva $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(c) A különbség, majd a konstansszoros deriválási szabályát alkalmazva $\left(2e^x - 3\ln(x)\right)' = (2e^x)' - (3\ln(x))' = 2(e^x)' - 3(\ln(x))' = 2e^x - \frac{3}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(d) $(5x^7+\sqrt{2}\,x^4-2x^3)' = (5x^7)'+(\sqrt{2}\,x^4)'-(2x^3)' = 35x^6+4\sqrt{2}\,x^3-6x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(e) $\left(\operatorname{arsh}(x) - 2\operatorname{arch}(x) + 3\operatorname{th}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{3}{\operatorname{ch}^2(x)}$, $x \in (1, +\infty)$.
Erre a függvényre tehát $D(f') = D(f) \setminus \{1\}$.

4. Deriválja az alábbi függvényeket!

(a) $f(x) := \sqrt[3]{x}\operatorname{tg}(x)$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) $f(x) := 3^x \arccos(x)$, $D(f) := [-1, 1]$.

(c) $f(x) := 3\operatorname{ctg}(x)\,\lg(x)$, $D(f) := \mathbb{R}^+ \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{N}^+\}$.

(d) $f(x) := x^4\,e^x \sin(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(e) $f(x) := \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(f) $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{2^x}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(g) $f(x) := \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x^4}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(h) $f(x) := \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\arcsin(x)}$, $D(f) := [-1, 1] \setminus \{0\}$.

(i) $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}\, e^x}{\operatorname{tg}(x)}$, $D(f) := \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

(j) $f(x) := \dfrac{\ln(x) \operatorname{arth}(x)}{\sqrt[3]{x} \operatorname{sh}(x)}$, $D(f) := (0, 1)$.

Megoldás.

(a) A szorzat deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{x} \operatorname{tg}(x)\right)' &= \left(\sqrt[3]{x}\right)' \cdot \operatorname{tg}(x) + \sqrt[3]{x} \cdot \left(\operatorname{tg}(x)\right)' = \\ &= \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} \operatorname{tg}(x) + \sqrt[3]{x}\, \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\operatorname{tg}(x)}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2(x)},\end{aligned}$$

$x \in D(f) \setminus \{0\}$.

(b) $\left(3^x \arccos(x)\right)' = (3^x)' \cdot \arccos(x) + 3^x \cdot \left(\arccos(x)\right)' =$
$= 3^x \ln(3) \cdot \arccos(x) + 3^x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 3^x \left(\ln(3) \arccos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,
$x \in (-1, 1)$. Tehát $D(f') = D(f) \setminus \{-1, 1\}$.

(c) $\left(3 \operatorname{ctg}(x) \lg(x)\right)' = 3 \left(-\frac{1}{\sin^2(x)} \cdot \lg(x) + \operatorname{ctg}(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(10)}\right) =$
$= 3 \left(\frac{\operatorname{ctg}(x)}{\ln(10) \cdot x} - \frac{\lg(x)}{\sin^2(x)}\right)$, $\quad x \in D(f)$.

(d) E háromtényezős szorzatot először tekintsük úgy, mint az első két tényezőjének és a harmadiknak kéttényezős szorzatát. Így alkalmazhatjuk a szorzatra ismert deriválási szabályt:

$$\begin{aligned}\left(x^4 e^x \sin(x)\right)' &= \left(x^4 e^x\right)' \cdot \sin(x) + (x^4 e^x) \cdot \left(\sin(x)\right)' = \\ &= (4\, x^3 e^x + x^4 e^x) \sin(x) + (x^4 e^x) \cos(x) = \\ &= x^3 e^x \left(4 \sin(x) + x \sin(x) + x \cos(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(e) Használjuk a hányados deriváltjára tanult összefüggést!
$\left(\operatorname{th}(x)\right)' = \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)' = \frac{(\operatorname{sh}(x))' \cdot \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \cdot (\operatorname{ch}(x))'}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} =$
$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

(f) $\left(\frac{\ln(x)}{2^x}\right)' = \frac{(\ln(x))'\cdot 2^x - \ln(x)\cdot(2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot 2^x - \ln(x)\cdot 2^x\ln(2)}{(2^x)^2} = \frac{1-\ln(2)x\ln(x)}{x\,2^x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(g) $\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^4}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x^4 - \operatorname{arctg}(x)\cdot 4x^3}{x^8} = \frac{x-4(1+x^2)\operatorname{arctg}(x)}{x^5(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(h) $\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\arcsin(x)}\right)' = \frac{\Big[\cos(x)+\sin(x)\Big]\cdot\arcsin(x) - \Big[\sin(x)-\cos(x)\Big]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2(x)}$, $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$. Itt $D(f') = D(f)\setminus\{-1,1\}$.

(i) $$\left(\frac{\sqrt{x}\,e^x}{\operatorname{tg}(x)}\right)' = \frac{\Big(x^{\frac{1}{2}}\,e^x\Big)'\cdot\operatorname{tg}(x) - \Big(\sqrt{x}\,e^x\Big)\cdot(\operatorname{tg}(x))'}{\operatorname{tg}^2(x)} =$$
$$= \frac{\Big(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,e^x + x^{\frac{1}{2}}\,e^x\Big)\operatorname{tg}(x) - \Big(\sqrt{x}e^x\Big)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}}{\operatorname{tg}^2(x)} =$$
$$= \frac{e^x\Big[(1+2x)\sin(x)\cos(x)-2x\Big]}{2\sqrt{x}\sin^2(x)}, \quad x \in D(f).$$

(j) $$\left(\frac{\ln(x)\operatorname{arth}(x)}{\sqrt[3]{x}\operatorname{sh}(x)}\right)' = \frac{(\ln(x)\operatorname{arth}(x))'\cdot\Big(x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sh}(x)\Big) - \Big(\ln(x)\operatorname{arth}(x)\Big)\cdot\Big(x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sh}(x)\Big)'}{\Big(x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sh}(x)\Big)^2} =$$
$$= \frac{\Big(\frac{1}{x}\operatorname{arth}(x) + \ln(x)\,\frac{1}{1-x^2}\Big)\Big(x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sh}(x)\Big) - (\ln(x)\operatorname{arth}(x))\Big(\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\operatorname{sh}(x) + x^{\frac{1}{3}}\operatorname{ch}(x)\Big)}{\Big(x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sh}(x)\Big)^2},$$
$x \in (0,1)$.

5. Deriválja a megadott függvényeket!

(a) $f(x) := \sin(3x)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \sin^2(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(c) $f(x) := \sin(x^2)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(d) $f(x) := \cos(\ln(x))$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(e) $f(x) := \ln(\cos(x))$, $D(f) := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

(f) $f(x) := \operatorname{arctg}(5+x-2x^2)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(g) $f(x) := \operatorname{sh}\left(\sqrt{1+x^3}\,\right)$, $D(f) := [-1,+\infty)$.

Megoldás.

(a) A feladat a szinusz külső függvény és az $x \mapsto 3x$, $x \in \mathbb{R}$ belső függvény kompozíciójának deriválása.
$\big(\sin(3x)\big)' = \cos(3x)\cdot(3x)' = \cos(3x)\cdot 3 = 3\cos(3x), \quad x \in \mathbb{R}$.

(b) Összetett függvénnyel van dolgunk, a négyzetfüggvény a külső függvény, a szinuszfüggvény a belső függvény.

$$\big(\sin^2(x)\big)' = \big((\sin(x))^2\big)' = 2\sin(x)\cdot(\sin(x))' = 2\sin(x)\cdot\cos(x) =$$

$$= \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Ez is összetett függvény, most a szinuszfüggvény a külső függvény és a négyzetfüggvény a belső függvény.
$\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2), \;\; x \in \mathbb{R}.$

(d) $\big(\cos(\ln(x))\big)' = -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}, \;\; x \in \mathbb{R}^+.$

(e) $\big(\ln(\cos(x))\big)' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\mathrm{tg}\,(x), \;\; x \in D(f).$

(f) $\big(\mathrm{arctg}\,(5 + x - 2x^2)\big)' = \frac{1}{1+(5+x-2x^2)^2} \cdot (1 - 4x), \;\; x \in \mathbb{R}.$

(g) A függvény többszörösen összetett, ezért először tekintsük úgy, mint a szinusz hiperbolikusz külső függvényből és az $x \mapsto \sqrt{1+x^3}$, $x \in [-1, +\infty)$ belső függvényből összetett függvényt, így alkalmazzuk az összetett függvény deriválására ismert szabályt!

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{sh}\left(\sqrt{1+x^3}\right)\right)' &= \mathrm{ch}\left(\sqrt{1+x^3}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^3}\right)' = \\ &= \mathrm{ch}\left(\sqrt{1+x^3}\right)\cdot\frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x^3)' = \\ &= \frac{3x^2\mathrm{ch}\left(\sqrt{1+x^3}\right)}{2\sqrt{1+x^3}}, \quad x \in (-1, +\infty).\end{aligned}$$

Itt $D(f') = D(f) \setminus \{-1\}$.

6. Deriválja a megadott függvényeket!

(a) $f(x) := x^x$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(b) $f(x) := x^{\sin(x)}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

(c) $f(x) := (x^2 + 1)^{\mathrm{tg}\,(x)}$, $D(f) := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(d) $f(x) := \big(\ln(x)\big)^{2x}$, $D(f) := [1, +\infty)$.

(e) $f(x) := x^{x^x}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

Megoldás.

(a) A hatvány alapja és a kitevője sem állandó, ezért közvetlenül sem exponenciális függvényként, sem hatványfüggvényként nem deriválhatjuk.
Az $x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ elemi átalakítás után az e alapú exponenciális külső függvény és az $x \mapsto x\ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ belső függvény kompozíciójának deriváltja

$$(x^x)' = (e^{x\ln(x)})' = e^{x\ln(x)}\cdot\big(x\ln(x)\big)' = e^{x\ln(x)}\Big(1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\Big) =$$

$$= x^x(\ln(x)+1), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) $x^{\sin(x)} = (e^{\ln(x)})^{\sin(x)} = e^{\ln(x)\,\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ alapján az e alapú exponenciális külső függvény és az $x \mapsto \ln(x)\cdot\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ belső függvény kompozícióját deriválva

$$(x^{\sin(x)})' = (e^{\ln(x)\,\sin(x)})' = e^{\ln(x)\,\sin(x)} \cdot \big(\ln(x)\,\sin(x)\big)' =$$
$$= x^{\sin(x)}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin(x) + \ln(x)\cdot\cos(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

(c) $\big((x^2+1)^{\operatorname{tg}(x)}\big)' = \big(e^{\ln(x^2+1)\operatorname{tg}(x)}\big)' = e^{\ln(x^2+1)\operatorname{tg}(x)}\cdot\big(\ln(x^2+1)\operatorname{tg}(x)\big)' =$

$$= (x^2+1)^{\operatorname{tg}(x)}\left(\left(\tfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right)\cdot\operatorname{tg}(x) + \ln(x^2+1)\cdot\tfrac{1}{\cos^2(x)}\right) =$$
$$= (x^2+1)^{\operatorname{tg}(x)}\left(\tfrac{2x\operatorname{tg}(x)}{x^2+1} + \tfrac{\ln(x^2+1)}{\cos^2(x)}\right), \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

(d) Ha $x \in (1, +\infty)$, akkor

$$\big((\ln(x))^{2x}\big)' = \big(e^{2x\ln(\ln(x))}\big)' = e^{2x\ln(\ln(x))}\cdot\big(2x\ln(\ln(x))\big)' =$$
$$= (\ln(x))^{2x}\left(2\cdot\ln(\ln(x)) + 2x\cdot\left(\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\right)\right) =$$
$$= (\ln(x))^{2x}\left(2\ln(\ln(x)) + \frac{2}{\ln(x)}\right).$$

Megjegyzés. Megmutatható, hogy $\lim\limits_{x\to 1+0} f'(x) = 0$, ezért a deriváltfüggvény folytonosan kiterjeszthető az $[1, +\infty)$ intervallumra.

(e) $x^{x^x} = (e^{\ln(x)})^{x^x} = e^{x^x\ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ alapján az (a) pont eredményét felhasználva

$$(x^{x^x})' = e^{x^x\ln(x)}\cdot\big(x^x\ln(x)\big)' = x^{x^x}\big((x^x)'\cdot\ln(x) + x^x\cdot(\ln(x))'\big) =$$
$$= x^{x^x}\big(x^x(\ln(x)+1)\ln x + x^{x-1}\big) =$$
$$= x^{x^x+x-1}\big(x\ln^2(x) + x\ln(x) + 1\big), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

7. Deriválja az alábbi függvényeket!

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1}\right)$, $D(f) := \mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

(c) $f(x) := -\dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)}\right)$,
$D(f) := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$.

(d) $f(x) := \dfrac{1}{4}\ln^2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $D(f) := (-1,1)$.

(e) $f(x) := \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

(f) $f(x) := x\big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\big)$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

Megoldás.

(a) $$\left(\tfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)' = (-1)\cdot\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)^{-2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right) =$$
$$= -\tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

(b) $$\left(\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1}\right)\right)' = \tfrac{1}{\frac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1}}\cdot\tfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\,x+1\right)-\left(\sqrt{3}\,x-1\right)\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\,x+1\right)^2} = \tfrac{2\sqrt{3}}{3x^2-1},\ x\in D(f).$$

Másképpen: Ha $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, akkor
$$\left(\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1}\right)\right)' = \left(\ln\big(\sqrt{3}\,x-1\big) - \ln\big(\sqrt{3}\,x+1\big)\right)' =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{3}\,x-1}\cdot\sqrt{3} - \tfrac{1}{\sqrt{3}\,x+1}\cdot\sqrt{3} = \tfrac{2\sqrt{3}}{3x^2-1}.$$

Ha pedig $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, akkor hasonlóan
$$\left(\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1}\right)\right)' = \left(\ln(1-\sqrt{3}\,x) - \ln(-\sqrt{3}\,x-1)\right)' = \tfrac{2\sqrt{3}}{3x^2-1}.$$

(c) $$\left(-\tfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right)' =$$
$$= -\tfrac{-\sin(x)\cdot 2\sin^2(x)-\cos(x)\cdot 4\sin(x)\cos(x)}{4\sin^4(x)} -$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}}\cdot\tfrac{-\sin(x)\cdot\sin(x)-(1+\cos(x))\cos(x)}{\sin^2(x)} = \tfrac{1}{\sin^3(x)}, \quad x\in D(f).$$

(d) $$\left(\tfrac{1}{4}\ln^2\tfrac{1+x}{1-x}\right)' = \tfrac{1}{4}\cdot 2\cdot\ln\tfrac{1+x}{1-x}\cdot\tfrac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\tfrac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \tfrac{1}{1-x^2}\ln\tfrac{1+x}{1-x},$$
$x\in(-1,1)$.

(e) $$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\right)' = \tfrac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x =$$
$$= \tfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

(f) $$\big(x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))\big)' =$$
$$= 1\cdot\big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\big) + x\left(\cos(\ln(x))\cdot\tfrac{1}{x} + \sin(\ln(x))\cdot\tfrac{1}{x}\right)$$
$$= 2\sin(\ln(x)), \quad x\in\mathbb{R}^+.$$

8. Mutassa meg, hogy ha az f, g, h függvények differenciálhatók az a pontban, akkor $(fgh)'(a) = f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)$!

Megoldás. Az első két tényezőt egynek tekintve kéttényezős szorzatot kapunk:

$$\begin{aligned}(fgh)'(a) &= \big((fg)h\big)'(a) = (fg)'(a)\,h(a) + (fg)(a)\,h'(a) = \\ &= \big[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\big]\,h(a) + f(a)g(a)h'(a) = \\ &= f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a).\end{aligned}$$

Megjegyzés. A háromtényezős szorzat deriválási szabálya függvényértékek helyett függvényekkel $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

9. Legyen n pozitív egész szám és

$$D(f) := \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mely n számokra differenciálható, ill. folytonosan differenciálható az f függvény?

Megoldás. A nulla pont kivételével f folytonosan differenciálható, és a deriváltja $x \neq 0$ esetén $f'(x) = nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

A nulla bármely környezetében a függvény esetszétválasztással van definiálva, ezért a nullabeli differenciálhatóságát a definíció alapján vizsgáljuk. A nulla ponthoz tartozó különbségi hányados $x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

aminek $n = 1$ mellett nincs határértéke, $n \geq 2$ esetén viszont nullához tart, hiszen az első tényező nullához tart, a második pedig korlátos. Tehát az f függvény $n \geq 2$ esetén differenciálható, és $f'(0) = 0$.

Ha $n \geq 3$, akkor

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left[nx^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 = f'(0),$$

mert mindkét tag első tényezője nullához tart, a második korlátos. Tehát f folytonosan differenciálható a nulla pontban is. Ha $n = 2$, akkor az első tag nullához tart, a másodiknak nincs határértéke, amiből az következik, hogy f deriváltfüggvénye nem folytonos a nulla pontban.

10. Számolja ki az alábbi függvények összes magasabb rendű deriváltját!

(a) $f(x) := 2x^3 - x^2 + 5x - 11, \;\; D(f) := \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \sin(x), \;\; D(f) := \mathbb{R}$.

(c) $f(x) := \ln(6x+1)$, $D(f) := \left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.
(d) $f(x) := x\,e^x$, $D(f) := \mathbb{R}$.

Megoldás.

(a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 11, \quad f'(x) = 6x^2 - 2x + 5, \quad f''(x) = 12x - 2,$ $f'''(x) = 12$ és $f^{(n)}(x) = 0, \; n \geq 4, \; x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f''''(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Teljes indukcióval láthatjuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{ha } n = 4k, \\ \cos(x), & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\sin(x), & \text{ha } n = 4k+2, \\ -\cos(x), & \text{ha } n = 4k+3, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(c) $f(x) = \ln(6x+1)$, $f'(x) = \frac{6}{6x+1} = 6(6x+1)^{-1}$, $f''(x) = -36(6x+1)^{-2}$, $x \in D(f)$.
Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in D(f)$ esetén

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\, 6^n\, (n-1)!\, (6x+1)^{-n}.$$

(d) $f(x) = x\,e^x, \; f'(x) = (1+x)\,e^x, \; f''(x) = (2+x)\,e^x, \; x \in \mathbb{R}$. Teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $f^{(n)}(x) = (n+x)\,e^x$.

11. Keresse meg az $f(x) := \sqrt{1+x}$, $D(f) := [-1, +\infty)$ függvényt a nulla pont közelében legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinomot!

Megoldás. A keresett polinom $l(x) = f(0) + f'(0)\,x$. Mivel $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $x \in (-1, +\infty)$, és $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, ezért $l(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik az $f(x) := e^x$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény grafikonját az $\big(a, f(a)\big)$ pontban érinti!

Megoldás. Az érintő egyenes egyenlete $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. $f'(x) = e^x$ alapján $f(a) = f'(a) = e^a$, így a keresett egyenlet $y = e^a + e^a(x-a)$.

13. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$. Adja meg soktagú összegtől mentes alakban (ún. „zárt alakban”) a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + \ldots + nx^n$ összeget!

Megoldás. A $p(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, $x \in \mathbb{R}$ polinom deriváltja $p'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$, amit x-szel szorozva a feladatban szereplő összeget kapjuk.

Ha $x \neq 1$, akkor véges mértani sorozat összegeként

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\,\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

Ebből $p'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, végül

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

Ha $x = 1$, akkor az összeg $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Megjegyzés. A p' polinomfüggvény folytonos, ezért $\lim\limits_{x\to 1} p'(x) = p'(1)$, vagyis

$$\lim_{x\to 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ezt a határértéket algebrai azonosságok segítségével is megkaphatjuk.

6.3. Megoldandó feladatok

Az **1.–9.** feladatban deriválja a függvényt!

1. $f(x) := \ln(x^3 - 3 \cdot \sqrt{x}), \;\; D(f) := \left(\sqrt[5]{9}, +\infty\right)$.

2. $f(x) := \dfrac{7\mathrm{th}\,(x)}{e^x + \cos(x)}, \;\; D(f) := \{x \in \mathbb{R} : e^x + \cos(x) \neq 0\}$.

3. $f(x) := \sin(e^x - x^4), \;\; D(f) := \mathbb{R}$.

4. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{3\ln(x)}, \;\; D(f) := \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

5. $f(x) := \mathrm{ch}\,(2^x + x^5), \;\; D(f) := \mathbb{R}$.

6. $f(x) := \dfrac{\mathrm{tg}\,(x) - \ln(x)}{\sqrt{x}}, \;\; D(f) := \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.

7. $f(x) := \ln^3\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right), \;\; D(f) := (-2, 3)$.

8. $f(x) := \dfrac{\lg(x)}{x^2} - 6x\mathrm{arctg}\,(x), \;\; D(f) := \mathbb{R}^+$.

9. $f(x) := \dfrac{\sin(x^3)}{e^x} - 5\cos(2x), \;\; D(f) := \mathbb{R}$.

10. Legyen $N \in \mathbb{N}^+$ és $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq n \leq N$ esetén

$$Q(a) := \sum_{n=1}^{N} (y_n - ax_n)^2, \quad D(Q) := \mathbb{R}.$$

Határozza meg a Q polinomfüggvény deriváltfüggvényét és második deriváltfüggvényét!

11. Számítsa ki az alábbi függvények összes magasabb rendű deriváltját!

(a) $f(x) := \cos(x), \quad D(f) := \mathbb{R}.$

(b) $f(x) := 2^x, \quad D(f) := \mathbb{R}.$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{1+2x}, \quad D(f) := \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

12. Számolja ki az alábbi függvények magasabb rendű deriváltjait a megadott rendig!

(a) $f(x) := x^2 \cos(x), \quad D(f) := \mathbb{R}$ a negyedik deriváltig.

(b) $f(x) := e^{\sin(x)}, \quad D(f) := \mathbb{R}$ a harmadik deriváltig.

13. (Leibniz-tétel.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint f és g az a helyen n-szer differenciálható függvény. Bizonyítsa be, hogy fg is az a helyen n-szer differenciálható, és

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)!$$

A **14.–15.** feladatban határozza meg a függvényt a megadott pont közelében legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinomot!

14. $f(x) := \ln(1+x), \quad D(f) := (-1, +\infty), \quad a := 0.$

15. $f(x) := \cos(x), \quad D(f) := \mathbb{R}, \quad a := \dfrac{\pi}{4}.$

A **16.–17.** feladatban adja meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik az $\big(a, f(a)\big)$ pontban érinti a függvény grafikonját!

16. $f(x) := \operatorname{tg}(x), \quad D(f) := \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad a := \dfrac{\pi}{6}.$

17. $f(x) := \sqrt{x}, \quad D(f) := [0, +\infty), \quad a := 1.$

6.4. Megoldások

1. $f'(x) = \frac{6x^{\frac{5}{2}} - 3}{2x^{\frac{7}{2}} - 6x}, \quad x \in \big(\sqrt[5]{9}, +\infty\big).$

2. $f'(x) = 7 \cdot \frac{[e^x + \cos(x)] - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \cdot [e^x - \sin(x)]}{\operatorname{ch}^2(x)(e^x + \cos(x))^2}, \quad x \in D(f).$

Az f függvényt ott nem értelmeztük, ahol a nevezője nulla. A nevező zérushelyeinek halmaza megszámlálhatóan végtelen halmaz, melynek nincs valós torlódási pontja. A $D(f)$ értelmezési tartomány ennek a komplementere, páronként diszjunkt nyílt intervallumok megszámlálhatóan végtelen halmazának unióhalmaza.

3. $f'(x) = \cos(e^x - x^4) \cdot (e^x - 4x^3), \ x \in \mathbb{R}.$

4. $f'(x) = \frac{\ln(x)-2}{6\sqrt{x}\ln^2(x)}, \ x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$

5. $f'(x) = \operatorname{sh}(2^x + x^5) \cdot (2^x \ln(2) + 5x^4), \ x \in \mathbb{R}.$

6. $f'(x) = \frac{\frac{2x}{\cos^2(x)} + \ln(x) - \operatorname{tg}(x) - 2}{2x^{\frac{3}{2}}}, \ x \in D(f).$

7. $f'(x) = \frac{15}{(2+x)(3-x)} \cdot \ln^2\left(\frac{2+x}{3-x}\right), \ x \in (-2, 3).$

8. $f'(x) = \frac{1-2\ln(10)\cdot\lg(x)}{\ln(10)\cdot x^3} - 6\operatorname{arctg}(x) - \frac{6x}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}^+.$

9. $f'(x) = \frac{3x^2\cos(x^3)-\sin(x^3)}{e^x} + 10\sin(2x), \ x \in \mathbb{R}.$

10. $Q'(a) = 2a\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} x_n y_n, \ Q''(a) = 2\sum_{n=1}^{N} x_n^2, \ a \in \mathbb{R}.$

11. (a)

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{ha } n = 4k, \\ -\sin(x), & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\cos(x), & \text{ha } n = 4k+2, \\ \sin(x), & \text{ha } n = 4k+3, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) $(2^x)^{(n)} = (\ln 2)^n \cdot 2^x, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$

(c) $\left(\frac{1}{1+2x}\right)^{(n)} = (-1)^n\, 2^n\, n!\,(1+2x)^{-n-1}, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

12. (a) $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x),$
$f''(x) = 2\cos(x) - 4x\sin(x) - x^2\cos(x),$
$f'''(x) = -6\sin(x) - 6x\cos(x) + x^2\sin(x),$
$f''''(x) = -12\cos(x) + 8x\sin(x) + x^2\cos(x).$

(b) $f'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x),$
$f''(x) = e^{\sin(x)}\big(\cos^2(x) - \sin(x)\big),$
$f'''(x) = e^{\sin(x)}\big(\cos^3(x) - 3\sin(x)\cos(x) - \cos(x)\big).$

13. Teljes indukcióval bizonyítjuk a tételt. Ha $n = 1$, akkor a szorzat deriválási szabálya alapján igaz az állítás. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy f és g $(n+1)$-szer differenciálható az a helyen. Ezért létezik olyan nyílt intervallum, mely tartalmazza az a számot, és az intervallumon mindkét függvény n-szer differenciálható. Az indukciós feltevés szerint ennek az intervallumnak minden x pontjára

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Mindkét oldalt az a helyen deriválva, majd a jobb oldalt átalakítva, közben az

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}, \quad n, i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n$$

összefüggést is felhasználva a bizonyítandó állítást kapjuk.

14. $l(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$

15. $l(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

16. $y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}.$

17. $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{x+1}{2}.$

7. fejezet

Taylor-polinomok, L'Hôspital-szabály

7.1. Elméleti összefoglaló

7.1. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és az f függvény az a pontban n-szer differenciálható, akkor a

$$T_{n,a}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k =$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \ x \in \mathbb{R}$$

legfeljebb n-edfokú polinomot az f függvény a középpontú (másképpen a ponthoz tartozó) n-edik *Taylor-polinom*jának nevezzük.

Megjegyzések. A 0 középpontú n-edik Taylor-polinom (*MacLaurin-polinom*):

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Ha nem okoz félreértést, az n-edik Taylor-polinomot a rövidebb T_n szimbólummal is jelölhetjük.

Az első Taylor-polinom a függvény lineáris közelítése az adott pontban:

$$T_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.1. Tétel (Taylor-formula a maradéktag Lagrange-féle alakjával)**.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható az I nyílt intervallumon. Tetszőleges $a, x \in I$, $x \neq a$ esetén létezik olyan $c \in I$ az a és x számok között, melyre*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Megjegyzés. Ha az $f(x)$ függvényértéket a $T_{n,a}$ Taylor-polinom x helyen vett értékével közelítjük, e *közelítés hibája* $f(x) - T_{n,a}(x)$.

7.2. Tétel (L'Hôspital-szabály)**.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f és g az I intervallumon differenciálható függvény, továbbá legyen $g' \neq 0$. Legyen az a pont az I intervallum olyan torlódási pontja, ahol*

$$\lim_a f = \lim_a g = 0 \qquad \textit{vagy} \qquad \lim_a g = +\infty \qquad \textit{vagy} \qquad \lim_a g = -\infty.$$

Ha létezik $\lim_a \frac{f'}{g'}$*, akkor létezik* $\lim_a \frac{f}{g}$*, és a kettő egyenlő:*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}.$$

Megjegyzések. Ha a vizsgált pontban a számláló és a nevező is nullához tart, vagy mindkettő határértéke $+\infty$ és $-\infty$ valamelyike, akkor a hányadosuk határértékére nem adható általános szabály. Ilyen esetekben érdemes próbálkoznunk a L'Hôspital-szabály alkalmazásával.

Nem minden hányados határértékét kaphatjuk meg a L'Hôspital-szabály segítségével, amelyik e szabály feltételeinek eleget tesz (l. a 11. és a 12. kidolgozott feladatot).

7.2. Kidolgozott feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények megadott középpontú első Taylor-polinomját!

(a) $f(x) := e^x,\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ a := 0.$

(b) $f(x) := \sin(x),\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ a := 0.$

(c) $f(x) := \cos(x),\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ a := \frac{\pi}{2}.$

Megoldás.

(a) $f(x) = e^x,\ \ f'(x) = e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$ miatt $f(0) = 1,\ f'(0) = 1,$
ezért $T_{1,0}(x) = 1 + 1 \cdot x = 1 + x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

(b) $f(x) = \sin(x),\ \ f'(x) = \cos(x),\ \ x \in \mathbb{R}$ alapján $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,$
ezért $T_{1,0}(x) = 0 + 1 \cdot x = x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

(c) $f(x) = \cos(x),\ \ f'(x) = -\sin(x),\ \ x \in \mathbb{R}$ miatt $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$
ezért $T_{1,\frac{\pi}{2}}(x) = 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

2. Számolja ki az alábbi függvények nulla középpontú n-edik Taylor-polinomját!

(a) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1+x}},\ \ D(f) := (-1, +\infty),\ \ n := 2.$

(b) $f(x) := \ln(1+x),\ \ D(f) := (-1, +\infty),\ \ n := 3.$

(c) $f(x) := e^x,\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ n := 10.$

(d) $f(x) := \sin(x),\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ n := 11.$

(e) $f(x) := \sin(x),\ \ D(f) := \mathbb{R},\ \ n := 12.$

Megoldás.

(a) $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}},\ \ f'(x) = -\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\ \ f''(x) = \dfrac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}},$ $x \in (-1, +\infty),$
$f(0) = 1,\ \ f'(0) = -\dfrac{1}{2},\ \ f''(0) = \dfrac{3}{4}.$ Ezért $T_2(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{3}{8}\,x^2,$ $x \in \mathbb{R}.$

(b) $f(x) = \ln(1+x),\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\ f''(x) = (-1)\cdot(1+x)^{-2},$

$f'''(x) = 2\,(1+x)^{-3},\ \ x \in (-1, +\infty).$
$f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1,\ \ f''(0) = -1,\ \ f'''(x) = 2.\ \ T_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3},$ $x \in \mathbb{R}.$

(c) $f^{(k)}(x) = e^x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ f^{(k)}(0) = 1,\ \ \ k \in \mathbb{N}$ alapján

$$T_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}\,x^k = \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}, \\ x \in \mathbb{R}.$$

(d) $f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x),$ $f''''(x) = \sin(x),\ \ x \in \mathbb{R}$, a magasabb rendű deriváltakat l. a 6.2.10. (b) feladat megoldásában. Ezért $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,$ $f'''(0) = -1,\ f''''(0) = 0,$ általában $f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(4k+1)}(0) = 1,$ $f^{(4k+3)}(0) = -1,\ k \in \mathbb{N}.$

$$T_{11}(x) = \sum_{k=0}^{11} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

(e) $f^{(12)}(0) = 0$ miatt $T_{12}(x) = T_{11}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \dfrac{x^{11}}{11!},$ $x \in \mathbb{R}.$

3. (a) Legfeljebb mekkora hibával közelíti a szinuszfüggvényt a nulla középpontú harmadik Taylor-polinomja a $[-1, 1]$ intervallumon?

(b) Adja meg a szinuszfüggvénynek olyan nulla középpontú Taylor-polinomját, amelyik kisebb hibával közelíti a szinuszfüggvényt a $[-1, 1]$ intervallumon, mint 10^{-6}!

Megoldás.

(a) A szinuszfüggvény nulla középpontú harmadik Taylor-polinomja $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $x \in \mathbb{R}$. A Taylor-formula szerint bármely $x \in [-1, 1]$ esetén létezik olyan c szám 0 és x között, melyre

$$\sin(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!}\, x^4,$$

ezért

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = \frac{|\sin^{(4)}(c)|}{4!}\, |x|^4 \le \frac{1}{24}.$$

Jobb becslést kapunk, ha észrevesszük, hogy a szinuszfüggvény nulla középpontú harmadik és negyedik Taylor-polinomja megegyezik, és a Taylor-formulát a negyedik Taylor-polinomra írjuk fel. Így alkalmas 0 és x közötti c^* számra

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = \frac{|\sin^{(5)}(c^*)|}{5!}\, |x|^5 \le \frac{1}{120}, \quad x \in [-1, 1].$$

(b) Szintén a Taylor-formula szerint bármely $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in [-1, 1]$ esetén létezik olyan c szám 0 és x között, melyre

$$\sin(x) = T_{n,0}(x) + \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1},$$

így a

$$\left|\sin(x) - T_{n,0}(x)\right| = \frac{|\sin^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!}$$

becslést kapjuk. A hiba kisebb, mint 10^{-6}, ha $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$, tehát $n \ge 9$ esetén az n-edik Taylor-polinom megfelel.

4. Legyen $f(x) := \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Számítsa ki az f függvény határértékét a 2 helyen!

Megoldás. A számláló és a nevező határértéke $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 2) = 0$. A L'Hôspital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2x - 3} = 1.$$

Megjegyzés. Más módon, a nevezőt szorzattá bontva:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

5. Legyen $f(x) := \dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{5}, 1\right\}$. Számítsa ki az f függvény határértékét az (a) 1, (b) -1, (c) $-\infty$ helyen!

Megoldás.

(a) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x-1) = 0$ és $\lim\limits_{x\to1}(5x^2-x-4) = 0$. A L'Hôspital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \lim_{x\to1}\frac{(3x^2-2x-1)'}{(5x^2-x-4)'} = \lim_{x\to1}\frac{6x-2}{10x-1} = \frac{4}{9}.$$

Megjegyzés. Más módon, a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítva:

$$\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(5x+4)} = \frac{3x+1}{5x+4} \to \frac{4}{9}, \quad \text{ha} \ \ x \to 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to-1}(3x^2-2x-1) = 4, \qquad \lim_{x\to-1}(5x^2-x-4) = 2,$$

ezért a L'Hôspital-szabály feltétele nem teljesül, a szabályt nem használhatjuk. A hányados határértéke

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-2x-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(5x^2-x-4)} = 2.$$

(c) A nevező határértéke $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^2-x-4) = +\infty$, a L'Hôspital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{10x-1}.$$

Az új nevező határértéke $\lim\limits_{x\to-\infty}(10x-1) = -\infty$, ezért a L'Hôspital-szabály segítségével folytatva

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{10x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(6x-2)'}{(10x-1)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Megjegyzés. Másképpen, $x \neq 0$ esetén

$$\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}} \to \frac{3}{5}, \quad \text{amikor} \ \ x \to -\infty.$$

6. (a) Legyen adott $a \in (1, +\infty)$ esetén $f(x) := \dfrac{x}{a^x}$, $D(f) := \mathbb{R}$. Számítsa ki az f függvény határértékét a $+\infty$ helyen!

(b) Legyen $g(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$, $D(g) := [0, +\infty)$. Számítsa ki a g függvény határértékét a $+\infty$ helyen!

(c) Legyen $h(x) := \dfrac{x^{10}}{3^{2x+1}}$, $D(h) := \mathbb{R}$. Számítsa ki a h függvény határértékét a $+\infty$ helyen!

Megoldás.

(a) A nevező határértéke $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. A L'Hôspital-szabály alapján

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln(a)} = 0.$$

(b) Az előző pont eredményét felhasználva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Más módon: Ha $x \geq 1$, akkor $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{2^x} \leq \frac{x}{2^x}$, ezért az előző pont eredménye és a közrefogási elv segítségével szintén megkaphatjuk a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x} = 0$ eredményt.

(c) A L'Hôspital-szabályt tízszer alkalmazhatjuk egymás után, mert mindegyik nevező határértéke $x \to +\infty$ esetén $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{3^{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^9}{2\ln(3) \cdot 3^{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{90x^8}{4\ln^2(3) \cdot 3^{2x+1}} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{10!}{2^{10} \ln^{10}(3) \cdot 3^{2x+1}} = 0.$$

7. (a) Legyen adott $p \in \mathbb{R}^+$ esetén $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x^p}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$. Számítsa ki az f függvény határértékét a $+\infty$ helyen!

(b) Legyen $g(x) := \dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}$, $D(g) := \mathbb{R}^+$. Számítsa ki a g függvény határértékét a $+\infty$ helyen!

Megoldás.

(a) A nevező határértéke $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$, a L'Hôspital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{px^p} = 0.$$

(b) A nevező határértéke $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, a L'Hôspital-szabály segítségével

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{2x+1}.$$

Az új nevező határértéke $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$, még egyszer alkalmazhatjuk a L'Hôspital-szabályt:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Megjegyzés. Másképpen befejezve: $\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=0.$

8. Legyen $f(x):=\dfrac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$, $D(f):=\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Számítsa ki az f függvény határértékét a 0 helyen!

Megoldás. A számláló és a nevező határértéke is nulla, amikor $x\to 0$. A L'Hôspital-szabály alapján

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}.$$

A jobb oldal is olyan határérték, melyre a L'Hôspital-szabály alkalmazható, ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. Másképpen, a $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ és a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ határérték felhasználásával $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{1}{2}.$

9. (a) Legyen $f(x):=x\ln(x)$, $x\in\mathbb{R}^+$. Számítsa ki az f függvény határértékét a 0 helyen!

(b) Legyen $g(x):=x^x$, $x\in\mathbb{R}^+$. Számítsa ki a g függvény határértékét a 0 helyen!

(c) Legyen $h(x):=x^{\frac{1}{x-1}}$, $D(h):=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Számítsa ki a h függvény határértékét az 1 helyen!

Megoldás.

(a) A vizsgált függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$, ezért a kérdéses határérték jobb oldali határérték. A szorzatot $x\ln(x)=\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}^+$

hányadosként felírva a nevező jobb oldali határértéke a nullában $+\infty$. A hányadosra alkalmazható a L'Hôspital-szabály, mely szerint

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$$

(b) $x^x = e^{x\ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ alapján $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1$, mert (a) szerint $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ és az e alapú exponenciális függvény folytonos a nulla pontban.

(c) Alakítsuk át a vizsgált függvényt!

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{\ln(x)}{x-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq 1.$$

A kitevő határértéke a L'Hôspital-szabály szerint

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1,$$

mert $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$. Végül az e alapú exponenciális függvény 1 pontbeli folytonossága miatt

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}} = e.$$

10. Legyen $f(x) := \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$, $D(f) := (-1,+\infty) \setminus \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$. Számítsa ki az f függvény bal oldali határértékét az 1 helyen!

Megoldás. A vizsgált függvény alapjának határértéke $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x+1}{2} = 1$, a kitevőjéé $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = +\infty$. Az

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}, \quad x \in D(f)$$

átalakítás után az új kitevő két tényezőjének határértéke

$$\lim_{x\to 1-0} \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1-0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = +\infty.$$

Az új kitevőt hányadosként felírva

$$\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}, \quad x \in (-1,+\infty) \setminus \mathbb{N}.$$

A számláló és a nevező határértéke is nulla $x \to 1-0$ esetén, a L'Hôspital-szabály alapján

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

Végül az e alapú exponenciális függvény $-\frac{1}{\pi}$ pontbeli folytonossága miatt

$$\lim_{x\to 1-0} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}} = e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

Megjegyzés. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $e^{-\frac{1}{\pi}}$ a vizsgált függvény jobb oldali határértéke is az 1 pontban, ezért $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{\pi}}$. Tehát az f függvény folytonosan kiterjeszthető a $D(f)\cup\{1\}$ halmazra.

A **11.–12.** feladatban ellenőrizze, hogy a függvény határértékét a $+\infty$ helyen nem kapjuk meg a L'Hôspital-szabály alkalmazásával!

11. $f(x) := \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

Megoldás. A nevező határértéke $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, a L'Hôspital-szabály alapján

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

A jobb oldali hányados nevezőjének határértéke is $+\infty$, amikor $x\to+\infty$. Ismét a L'Hôspital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

ami az eredeti feladat.

Megjegyzés. Másképpen kiszámolható a határérték, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, $x\in\mathbb{R}^+$ felhasználásával $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$.

12. $f(x) := \dfrac{x-\cos(x)}{x+\sin(x)}$, $D(f) := \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Megoldás. A nevező határértéke $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin(x)) = +\infty$. A számláló és a nevező deriváltjának hányadosa

$$\frac{(x-\cos(x))'}{(x+\sin(x))'} = \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)},$$

melynek nem létezik határértéke $x \to +\infty$ esetén.

Megjegyzés. Más módon $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\cos(x)}{x+\sin(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\cos(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 1.$

7.3. Megoldandó feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények megadott középpontú első Taylor-polinomját!

(a) $f(x) := x^2,\ \ D(f) := \mathbb{R},\quad a := 0,\ a := 1$, ill. $a := -2.$

(b) $g(x) := \sqrt{1+x},\ \ D(g) := [-1, +\infty),\quad a := 0$, ill. $a := 3.$

(c) $h(x) := \ln(x),\ \ D(h) := \mathbb{R}^+,\quad a := 1$, ill. $a := 8.$

2. Számolja ki az alábbi függvények nulla középpontú harmadik Taylor-polinomját!

(a) $f(x) := \ln(\sin(x)+1),\ \ D(f) := \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$

(b) $g(x) := \operatorname{arctg}(x),\ \ D(g) := \mathbb{R}.$

3. Számolja ki a következő függvények adott középpontú negyedik Taylor-polinomját!

(a) $f(x){:=}\sin(x)$, $D(f){:=}\mathbb{R}$, $a{:=}\pi$. (b) $g(x){:=}e^x$, $D(g){:=}\mathbb{R}$, $a{:=}1$.

4. Számolja ki a következő függvények nulla középpontú tizedik Taylor-polinomját!

(a) $f(x) := \cos(x),\ \ D(f) := \mathbb{R}.$ (b) $g(x) := \operatorname{sh}(x),\ \ D(g) := \mathbb{R}.$

(c) $h(x) := \operatorname{ch}(x),\ \ D(h) := \mathbb{R}.$

5. Számolja ki a megadott függvények nulla középpontú n-edik Taylor-polinomját ($n\in\mathbb{N}$)!

(a) $f(x) := 2^x,\ \ D(f) := \mathbb{R}.$ (b) $g(x) := \dfrac{1}{1+x},\ \ D(g) := \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

6. (a) Legfeljebb mekkora hibával közelíti az e alapú exponenciális függvényt a nulla középpontú ötödik Taylor-polinomja a $[-2, 2]$ intervallumon?

(b) Adja meg az e alapú exponenciális függvénynek olyan nulla középpontú Taylor-polinomját, amelyik kisebb hibával közelíti az e alapú exponenciális függvényt a $[-2, 2]$ intervallumon, mint 10^{-3}!

A **7.–18.** feladatban számítsa ki a határértéket!

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos^3(x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(x))}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{th}(x)}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\cdot\ln(1-x)$. **14.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x+3}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 0+0} xe^{\frac{1}{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{x}}(x)$. **17.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)-x}{x^3}$.

7.4. Megoldások

1. (a) $T_{1,0}(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. $T_{1,1}(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$. $T_{1,-2}(x)=-4x-4$, $x\in\mathbb{R}$.
(b) $T_{1,0}(x)=\frac{1}{2}x+1$, $x\in\mathbb{R}$. $T_{1,3}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.
(c) $T_{1,1}(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$. $T_{1,8}(x)=\frac{1}{8}x+\ln 8-1$, $x\in\mathbb{R}$.

2. (a) $T_3(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, $x\in\mathbb{R}$. (b) $T_3(x)=x-\frac{x^3}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. (a) $T_4(x)=-(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3$, $x\in\mathbb{R}$.
(b) $T_4(x)=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3+\frac{e}{24}(x-1)^4$, $x\in\mathbb{R}$.

4. (a) $T_{10}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}$, $x\in\mathbb{R}$.
(b) $T_{10}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$, $x\in\mathbb{R}$.
(c) $T_{10}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{10}}{10!}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. (a) $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(\ln 2)^k}{k!}x^k$, $x\in\mathbb{R}$.
(b) $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$, $x\in\mathbb{R}$.

6. (a) Ha $x\in[-2,2]$, akkor alkalmas 0 és x közötti c számra
$e^x=T_5(x)+\frac{e^c}{6!}x^6$. Ezért $|e^x-T_5(x)|\le\frac{e^2 2^6}{6!}$.
(b) Ha $x\in[-2,2]$ és $n\in\mathbb{N}^+$, akkor alkalmas 0 és x közötti c^* számra

$$|e^x-T_n(x)|=\left|\frac{e^{c^*}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{e^2\,2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Így $|e^x-T_n(x)|<10^{-3}$ teljesül, ha $n\ge 10$, tehát T_n, $n\ge 10$ megfelelő.

7. $\frac{9}{2}$. **8.** 2. **9.** $\frac{4}{3}$. **10.** 4. **11.** 1. **12.** $\frac{2}{3}$. **13.** 0.
14. $+\infty$. **15.** $+\infty$. **16.** 1. **17.** 1. **18.** $-\frac{1}{3}$.

8. fejezet

A derivált alkalmazásai, függvényvizsgálat

8.1. Elméleti összefoglaló

8.1. Definíció. Legyen f valós függvény. Az f függvényt *monoton növekvőnek* nevezzük a $H \subset D(f)$ halmazon, ha minden $x, y \in H$, $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.

Az f függvényt *monoton csökkenőnek* nevezzük a $H \subset D(f)$ halmazon, ha minden $x, y \in H$, $x < y$ esetén $f(x) \geq f(y)$.

Az f függvényt *szigorúan monoton növekvőnek* nevezzük a $H \subset D(f)$ halmazon, ha minden $x, y \in H$, $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$.

Az f függvényt *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük a $H \subset D(f)$ halmazon, ha minden $x, y \in H$, $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$.

Az f függvényt monoton növekvőnek, monoton csökkenőnek, szigorúan monoton növekvőnek, szigorúan monoton csökkenőnek mondjuk, ha monoton növekvő a $D(f)$ halmazon, monoton csökkenő a $D(f)$ halmazon, szigorúan monoton növekvő a $D(f)$ halmazon, ill. szigorúan monoton csökkenő a $D(f)$ halmazon.

8.2. Definíció. Legyen f valós függvény. Az f függvénynek *maximuma van* az $a \in D(f)$ helyen, ha minden $x \in D(f)$ esetén $f(x) \leq f(a)$.

Az f függvénynek *minimuma van* az $a \in D(f)$ helyen, ha minden $x \in D(f)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.

Az f függvénynek *szélsőértéke van* az $a \in D(f)$ helyen, ha maximuma van vagy minimuma van az a helyen.

Az f függvénynek *lokális maximuma van* az $a \in D(f)$ helyen, ha létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in D(f) \cap (a - \delta, a + \delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$.

Az f függvénynek *lokális minimuma van* az $a \in D(f)$ helyen, ha létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in D(f) \cap (a - \delta, a + \delta)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.

Az f függvénynek *lokális szélsőértéke van* az $a \in D(f)$ helyen, ha lokális maximuma van vagy lokális minimuma van az a helyen.

8.1. Állítás. *Ha az f függvény differenciálható az a pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz. Pl. az $f(x) := x^3$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$, de a függvény szigorúan monoton növekvő, így nincs lokális szélsőértéke a 0 pontban.

8.2. Állítás. *Legyen az f függvény kétszer differenciálható az a pontban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma van, ha viszont $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor lokális maximuma.*

Megjegyzés. Ha f kétszer differenciálható az a pontban, továbbá $f'(a) = f''(a) = 0$, abból nem következik, hogy a függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a helyen. Pl. az $f(x) := x^4$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = f''(0) = 0$, mégis e függvénynek (lokális) minimuma van a 0 helyen.

8.3. Állítás. *Legyen az f függvény folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és differenciálható az intervallum belső pontjainak* $\operatorname{int} I$ *halmazán.*

Az f függvény akkor és csak akkor monoton növekvő az I intervallumon, ha $f'(x) \geq 0,\ \ x \in \operatorname{int} I$.

Az f függvény akkor és csak akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha $f'(x) \leq 0,\ \ x \in \operatorname{int} I$.

Ha $f'(x) > 0,\ \ x \in \operatorname{int} I$, akkor f szigorúan monoton növekvő az I intervallumon.

Ha $f'(x) < 0,\ \ x \in \operatorname{int} I$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.

Megjegyzések. Az utóbbi két kijelentés megfordítása nem igaz. Pl. az $f(x) := x^3$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő és $f'(0) = 0$; $g(x) := -x^3$, $D(g) := \mathbb{R}$ szigorúan monoton csökkenő, mégis $g'(0) = 0$.

Az állításban nem hagyható el az a feltétel, hogy a függvényt intervallumon vizsgáljuk. Pl. ha $D(f) := (0, 2) \setminus \{1\}$, és $x \in (0, 1)$ esetén $f(x) := x$, az $x \in (1, 2)$ esetben pedig $f(x) := x - 1$, akkor minden $x \in D(f)$ helyen $f'(x) > 0$, az f függvény mégsem monoton növekvő.

8.3. Definíció. Az f függvény *konvex* az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha minden $x, y \in I$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Az f függvény *konkáv* az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha minden $x, y \in I$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Az f függvény *szigorúan konvex* az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha minden $x, y \in I$, $x \neq y$ és $\lambda \in (0, 1)$ esetén $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Az f függvény *szigorúan konkáv* az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha minden $x, y \in I$, $x \neq y$ és $\lambda \in (0, 1)$ esetén $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

8.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f valós függvénynek az $a \in D(f)$ pontban *inflexió*ja van, ha az f függvény differenciálható az a pontban vagy a függvény a pontbeli különbségihányados-függvényének határértéke $+\infty$ és $-\infty$ egyike, továbbá valamely δ pozitív számra f konvex az $(a - \delta, a]$ intervallumon és konkáv az $[a, a + \delta)$ intervallumon vagy fordítva, konkáv az $(a - \delta, a]$ intervallumon és konvex az $[a, a + \delta)$ intervallumon.

Ekkor az a pontot *inflexiós pont*nak nevezzük.

Megjegyzések. Az inflexióról azt is mondják, hogy a függvény az inflexiós pontban alakot vált.

Ha az a pont inflexiós pontja az f függvénynek és ebben a pontban a függvény differenciálható, akkor az a pont egy környezetében attól jobbra, ill. balra f grafikonja az $(a, f(a))$ pontbeli érintő egyik, ill. másik oldalán fekszik.

8.4. Állítás. *Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban és ebben a pontban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$.*

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz. Pl. az $f(x) := x^4$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$, de a függvény konvex, így nincs inflexiója a 0 pontban.

8.5. Állítás. *Legyen az f függvény folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és kétszer differenciálható az intervallum belső pontjainak $\operatorname{int} I$ halmazán.*

Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha $f''(x) \geq 0$, $x \in \operatorname{int} I$.

Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha $f''(x) \leq 0$, $x \in \operatorname{int} I$.

Ha $f''(x) > 0$, $x \in \operatorname{int} I$, akkor f szigorúan konvex az I intervallumon.

Ha $f''(x) < 0$, $x \in \operatorname{int} I$, akkor f szigorúan konkáv az I intervallumon.

Megjegyzés. Az utóbbi két kijelentés megfordítása nem teljesül. Pl. az $f(x) := x^4$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény szigorúan konvex és $f''(0) = 0$, míg $g(x) := -x^4$, $D(g) := \mathbb{R}$ szigorúan konkáv, mégis $g''(0) = 0$.

8.5. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az $a \in \mathbb{R}$ szám *határpont*ja, ha bármely $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $(a - \delta, a + \delta) \cap H \neq \emptyset$ és $(a - \delta, a + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus H) \neq \emptyset$.

8.6. Definíció. Tegyük fel, hogy valamely $K \in \mathbb{R}$ esetén az f függvény értelmezve van a $(K, +\infty)$ intervallumon. Ha létezik olyan $a, b \in \mathbb{R}$, melyekre $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $l(x) := ax + b$, $D(l) := \mathbb{R}$ lineáris függvény az f függvény *aszimptotá*ja a $+\infty$ helyen. Ha $a = 0$, akkor az aszimptotát *vízszintes aszimptotá*nak nevezzük.

Legyen $\tilde{K}$ olyan valós szám, amelyikre az f függvény értelmezve van a $(-\infty, \tilde{K})$ intervallumon. Ha létezik olyan $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, melyekre

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - \tilde{a}x - \tilde{b}\big) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $\tilde{l}(x) := \tilde{a}x + \tilde{b}$, $D(\tilde{l}) := \mathbb{R}$ lineáris függvény az f függvény *aszimptotá*ja a $-\infty$ helyen. Ha $\tilde{a} = 0$, akkor az aszimptotát *vízszintes aszimptotá*nak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek *bal oldali függőleges aszimptotája van* a c helyen, ha a $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = -\infty$ határértékek egyike teljesül.

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek *jobb oldali függőleges aszimptotája van* a c helyen, ha a $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = -\infty$ határértékek egyike teljesül.

Egy függvénynek *kétoldali függőleges aszimptotája van* a c helyen, ha bal oldali függőleges aszimptotája van és jobb oldali függőleges aszimptotája van a c helyen.

8.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy valamely $K \in \mathbb{R}$ esetén az f függvény értelmezve van a $(K, +\infty)$ intervallumon. Az f függvénynek pontosan akkor van aszimptotája a $+\infty$ helyen, ha létezik az $a := \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ és a $b := \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) \in \mathbb{R}$ határérték. Ekkor az aszimptota az $l(x) := ax+b$, $x \in \mathbb{R}$ lineáris függvény.*

Megjegyzés. A $-\infty$ helyen vett aszimptotára hasonló állítás vonatkozik.

A *teljes függvényvizsgálat* lépései:

- Megállapítjuk az értelmezési tartomány határpontjait és a függvény szakadási pontjait.
- Megkeressük a függvény tengelymetszeteit (zérushelyek, a függvény értéke a 0 pontban, ha ott értelmezve van).
- Megvizsgáljuk, páros-e, páratlan-e, periodikus-e a függvény.
- Kiszámoljuk a függvény deriváltfüggvényét.
- Megkeressük a függvény lokális szélsőértékhelyeit, és azokban a pontokban kiszámoljuk a függvény értékét.
- Meghatározzuk azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény monoton növekvő, ill. monoton csökkenő.
- Kiszámoljuk a függvény második deriváltfüggvényét.
- Megkeressük a függvény inflexiós pontjait, és ott kiszámoljuk a függvény értékét.
- Megkeressük azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény konvex, ill. konkáv.
- Meghatározzuk a függvény határértékét, ill. egyoldali határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban, a függvény szakadási pontjaiban, valamint a $+\infty$ helyen, ha az értelmezési tartomány felülről nem korlátos, és a $-\infty$ helyen, ha az értelmezési tartomány alulról nem korlátos.
- Meghatározzuk a függvény grafikonjának aszimptotáit.
- Felrajzoljuk a függvény grafikonját.
- Megállapítjuk a függvény értékkészletét.

8.2. Kidolgozott feladatok

Az **1.–2.** feladatban keresse meg a függvény lokális szélsőértékhelyeit, és határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény monoton növekvő, ill. monoton csökkenő!

1. $f(x) := 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 30x^2 + 2,\ \ D(f) := \mathbb{R}$.

2. $g(x) := x - \sqrt[4]{x},\ \ D(g) := [0, +\infty)$.

Megoldás.

1. Az f függvény differenciálható, így a 8.1. Állítás szerint az f' deriváltfüggvény zérushelyei között vannak az f függvény lokális szélsőértékhelyei.

$$f'(x) = 60x^4 + 60x^3 - 60x^2 - 60x = 60x(x-1)(x+1)^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ezért a -1, a 0 és az 1 pontban lehet lokális szélsőértéke az f függvénynek.

Mivel $60(x+1)^2 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, a derivált előjelét $x \neq -1$ esetén az $x(x-1)$ tényezőjének előjele határozza meg. A deriváltfüggvény előjelének ismeretében a 8.3. Állítás alapján azt kapjuk, hogy f szigorúan monoton növekszik a $(-\infty, 0]$ és az $[1, +\infty)$ intervallumon, a $[0, 1]$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökken.

Ebből következik, hogy a 0 pontban lokális maximumot vesz fel a függvény, melynek értéke $f(0) = 2$, az 1 pontban pedig lokális minimuma van a függvénynek, értéke $f(1) = -21$. A -1 pontban nincs lokális szélsőértéke a függvénynek.

A kapott eredményeket táblázatba foglalhatjuk:

$D(f)$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	n ö v e k v ő			lok. max.	csökkenő	lok. min.	növekvő

Ebben és a későbbi táblázatokban is a következő rövidítéseket és jelöléseket használjuk:
lok.: lokális, max.: maximum, min.: minimum, infl.: inflexió, $+$: a függvény pozitív, $-$: a függvény negatív, 0: a függvény értéke nulla, $\nexists$: nem létezik.

2. A g függvény folytonos a $[0, +\infty)$, differenciálható az $\mathbb{R}^+$ halmazon, ezért a függvénynek lokális szélsőértéke az értelmezési tartományának olyan belső pontjában lehet, ahol a derivált 0, valamint $D(g)$ egyetlen határpontjában, a 0 helyen. A

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

követelménynek $x^* := \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$ tesz eleget.
A $g'(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldása

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} &> 0, \\ \sqrt[4]{x^3} &> \frac{1}{4}, \\ x &> \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = x^*. \end{aligned}$$

Hasonlóan $g'(x) < 0$ megoldása $0 < x < x^*$, tehát a g függvény szigorúan monoton csökken a $\left[0, \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\right]$ intervallumon, míg szigorúan monoton növekszik az $\left[\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}, +\infty\right)$ intervallumon. Az $\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$ helyen minimuma van a függvénynek, az értelmezési tartomány 0 határpontjában pedig lokális maximuma.

$D(g)$	0	$\left(0, \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\right)$	$\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$	$\left(\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}, +\infty\right)$
g'	$\nexists$	$-$	0	$+$
g	lok. max.	csökkenő	min.	növekvő

A **3.–4.** feladatban keresse meg a függvény inflexiós pontjait, és határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény konvex, ill. konkáv!

3. $f(x) := 2x^6 + 3x^5 - 10x^4 + 3x - 1, \ D(f) := \mathbb{R}.$

4. $g(x) := \dfrac{1}{1 + e^{-x}}, \ D(f) := \mathbb{R}.$

Megoldás.

3. Az f függvény kétszer differenciálható, így a 8.4. Állítás miatt az f'' második deriváltfüggvény zérushelyeiben lehet az f függvénynek inflexiója.

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 - 120x^2 = 60x^2(x-1)(x+2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

egyenlet megoldásai -2, 0, 1.

Az $f''(x)$ szám előjele $x \neq 0$ esetén azonos $(x-1)(x+2)$ előjelével, ezért f'' pozitív a $(-\infty, -2)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumon, negatív a $(-2, 1)$ intervallumon a 0 pont kivételével. Tehát az f függvény konvex a $(-\infty, -2]$ és az $[1, +\infty)$ intervallumon, konkáv a $[-2, 1]$ intervallumon. A -2 és az 1 pontban inflexiója van, a 0 helyen nincs.

Az eredmény táblázatban:

$D(f)$	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	infl.	k o n k á v			infl.	konvex

4. A g függvény kétszer differenciálható, inflexiója a 8.4. Állítás szerint g'' zérushelyeiben lehet.

$$g'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \qquad g''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az utóbbi zérushelye az $e^{-x} - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlet megoldása, $x = 0$.

A $g''(x)$ hányados számlálójának első tényezője, valamint a nevezője pozitív, ezért $g''(x)$ akkor pozitív, amikor $x < 0$, és akkor negatív, amikor $x > 0$. Tehát g konvex a $(-\infty, 0]$ intervallumon, míg konkáv a $[0, +\infty)$ intervallumon, így 0 inflexiós pont.

Táblázatban:

$D(g)$	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
g''	$+$	0	$-$
g	konvex	infl.	konkáv

Az **5.–8.** feladatban végezze el a függvény teljes vizsgálatát!

5. $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

6. $g(x) := x \ln(x)$, $D(f) := \mathbb{R}^+$.

7. $h(x) := \dfrac{1-x^3}{x^2}$, $D(h) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. $F(x) := x + \sin(x)$, $D(F) := \mathbb{R}$.

Megoldás.

5. A függvény kétszer differenciálható. Zérushelye nincs, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. A függvény páros, nem páratlan és nem periodikus.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ezért csak a 0 pontban lehet lokális szélsőértéke az f függvénynek. Mivel $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0,\ \ x \in \mathbb{R},$ a deriváltfüggvény pozitív az $\mathbb{R}^-$, negatív az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(x^2-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ennek zérushelyei -1 és 1, ezekben a pontokban lehet az f függvénynek inflexiója. Az $f''(x)$ szám előjele megegyezik az x^2-1 tényezőjének előjelével, tehát f'' pozitív a $(-\infty,-1)$ és az $(1,+\infty)$ intervallumon, negatív a $(-1,1)$ intervallumon.

$D(f)$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	növekvő			max.	csökkenő		
	konvex	infl.	konkáv			infl.	konvex

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ Ebből következik, hogy $l(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ vízszintes aszimptota a $-\infty$ és a $+\infty$ helyen is, más aszimptota nincs. $R(f) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$.

Megjegyzés. Az f függvény a valószínűségszámításban szereplő standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ha $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma \in \mathbb{R}^+$, akkor

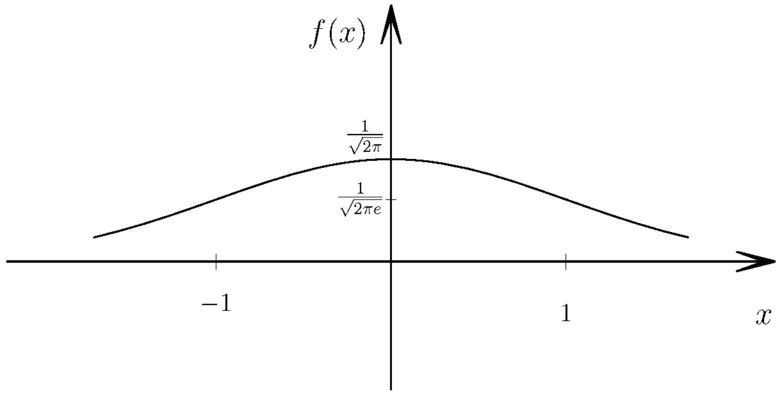
$$f_{m,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\quad D(f_{m,\sigma}) := \mathbb{R}$$

az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye, melynek maximumhelye m.

6. Az értelmezési tartomány egyetlen határpontja 0. A függvény kétszer differenciálható. Zérushelye 1, a 0 helyen nincs értelmezve. A függvény nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

$g'(x) = \ln(x) + 1,\ \ x \in \mathbb{R}^+,$ és a g függvénynek a deriváltfüggvénye zérushelyén, az $\frac{1}{e}$ pontban lehet lokális szélsőértéke. A derivált előjele: $g'(x) > 0$, ha $x > \frac{1}{e}$, és $g'(x) < 0$, ha $0 < x < \frac{1}{e}$. $g''(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$.

$D(g)$	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
g'	$-$	0	$+$
g''	$+$	$+$	$+$
g	csökkenő	min.	növekvő
		konvex	



8.1. ábra. Az $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény grafikonja

Határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$. A határértéket a 0 helyen a L'Hôspital-szabály alkalmazásával számoljuk ki:

$$\lim_{x\to0} x\ln(x) = \lim_{x\to0+0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0+0}(-x) = 0.$$

A függvénynek nincs aszimptotája. $R(g) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

7. Az értelmezési tartomány határpontja 0, a függvény kétszer differenciálható. Zérushelye 1, a 0 pontban nincs értelmezve. A függvény nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

$$h(x) = \frac{1-x^3}{x^2} = x^{-2} - x, \quad h'(x) = -2x^{-3} - 1 = -\frac{2+x^3}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

A deriváltfüggvény egyetlen zérushelye $-\sqrt[3]{2}$, itt lehet a h függvénynek lokális szélsőértéke.

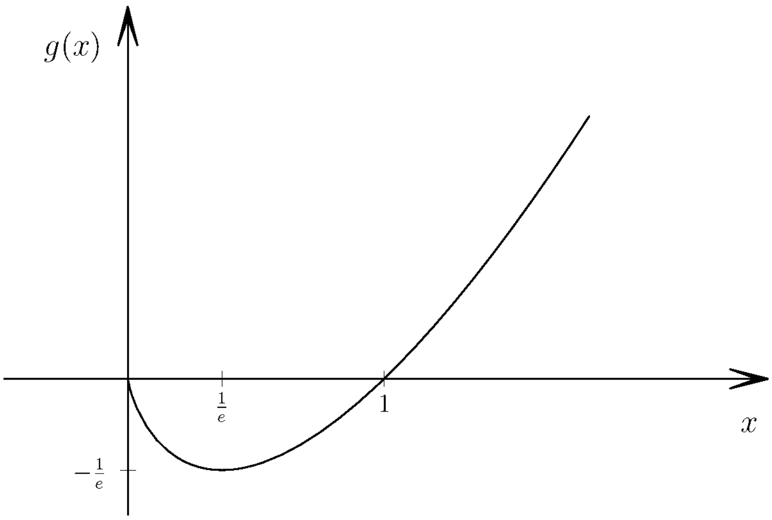
A derivált előjele:

$$h'(x) = -\frac{2+x^3}{x^3} > 0, \text{ ha } \left.\begin{array}{r} 2+x^3 > 0 \\ x^3 < 0 \end{array}\right\} \text{ vagy } \left.\begin{array}{r} 2+x^3 < 0 \\ x^3 > 0 \end{array}\right\},$$

$$\text{azaz} \quad -\sqrt[3]{2} < x < 0,$$

$$h'(x) = -\frac{2+x^3}{x^3} < 0, \text{ ha } \left.\begin{array}{r} 2+x^3 > 0 \\ x^3 > 0 \end{array}\right\} \text{ vagy } \left.\begin{array}{r} 2+x^3 < 0 \\ x^3 < 0 \end{array}\right\},$$

$$\text{azaz} \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ \text{vagy} \\ x < -\sqrt[3]{2}. \end{array}$$



8.2. ábra. A $g(x) := x\ln(x)$, $D(g) := \mathbb{R}^+$ függvény grafikonja

A második derivált $h''(x) = \dfrac{6}{x^4} > 0,\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}$	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
h'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
h''	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$
h	csökkenő	lok. min.	növekvő	$\nexists$	csökkenő
	k o n v e x				konvex

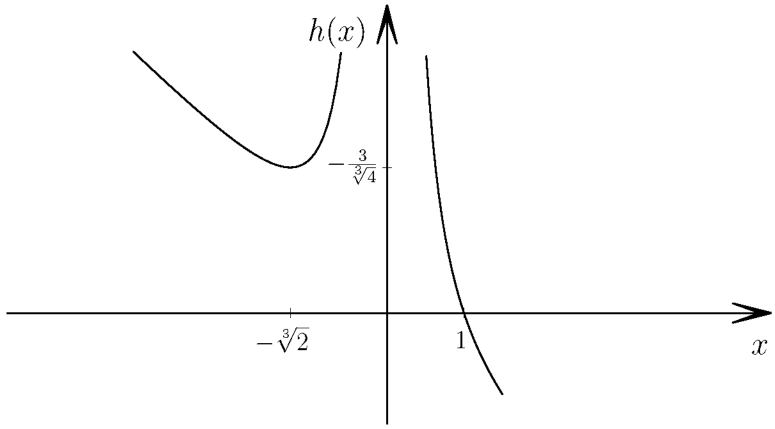
Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} h(x) = +\infty.$$

Aszimptoták: A h függvénynek a 0 pontban kétoldali függőleges aszimptotája van, hiszen $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$. A $-\infty$ és a $+\infty$ helyen $l(x) := -x$, $x \in \mathbb{R}$ az aszimptota, mert

$$\lim_{x\to-\infty} \big(h(x) + x\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(h(x) + x\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$R(h) = \mathbb{R}$.



8.3. ábra. A $h(x) := \dfrac{1-x^3}{x^2}$, $D(h) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény grafikonja

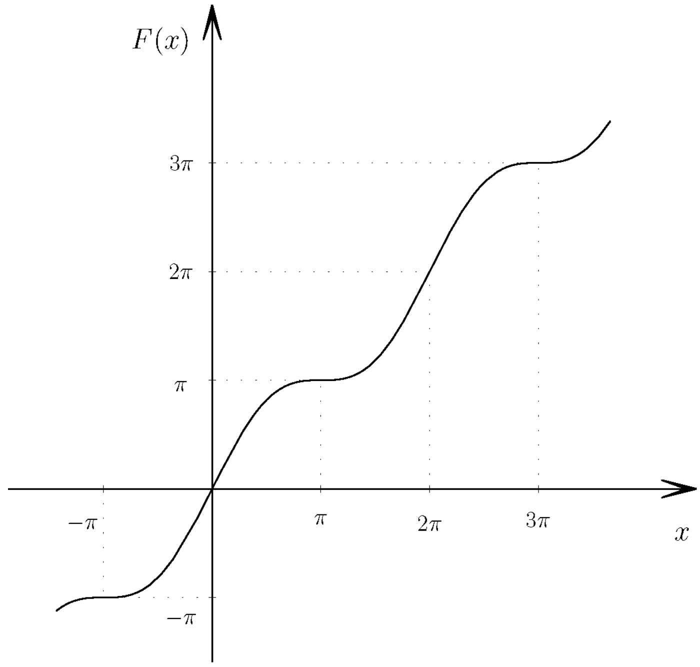
8. A függvény kétszer differenciálható. Zérushelye a 0 pont, más zérushelye nincs (lásd később), az origó egyben a függvény grafikonjának vízszintes tengelymetszete is. A függvény páratlan, nem páros és nem periodikus.
A deriváltfüggvény $F'(x) = 1 + \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, melynek zérushelyei $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Az F' deriváltfüggvény nemnegatív, sőt, bármely $\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumra való leszűkítése pozitív, így F szigorúan monoton növekvő függvény. Ezért nem lehet több zérushelye.
A második deriváltfüggvény $F''(x) = -\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, zérushelyei $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$F''(x) = -\sin(x) > 0, \quad \text{ha} \quad (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$
$$F''(x) = -\sin(x) < 0, \quad \text{ha} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$D(F)$	...	$(-\pi, 0)$	0	$(0,\pi)$	π	$(\pi, 2\pi)$	2π	$(2\pi, 3\pi)$	...
F'		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
F''		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
F		n konvex	ö inflexió	v konkáv	e inflexió	k konvex	v inflexió	ő konkáv	

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
A függvénynek nincs aszimptotája. $R(F) = \mathbb{R}$.

9. Mutassa meg, hogy az $f(x) := x^9 + 2x - 3$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvénynek pontosan egy zérushelye létezik.



8.4. ábra. Az $F(x) := x + \sin(x)$, $D(F) := \mathbb{R}$ függvény grafikonja

Megoldás. Mivel $f(0) = -3 < 0$ és $f(2) = 513 > 0$, ezért a Bolzano-tétel szerint 0 és 2 között a függvénynek létezik zérushelye.

Az f függvény $f'(x) = 9x^8 + 2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ miatt szigorúan monoton növekvő, így többször nem veheti fel a nulla értéket.

10. Legyen $N \in \mathbb{N}^+$ és $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq n \leq N$ esetén

$$Q(a) := \sum_{n=1}^{N} (y_n - ax_n)^2, \quad D(Q) := \mathbb{R}.$$

Határozza meg a Q polinomfüggvény minimumhelyét, ha az x_n, $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq n \leq N$ számok valamelyike nem nulla!

Megoldás. A függvény kétszer differenciálható, és a 6.3.10. feladat eredménye

$$Q'(a) = 2a \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2 \sum_{n=1}^{N} x_n y_n, \quad Q''(a) = 2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

A deriváltfüggvény egyetlen zérushelye

$$a^* := \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n y_n}{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n^2},$$

itt lehet a Q függvénynek szélsőértéke. Mivel $Q''(a^*) = 2 \sum\limits_{n=1}^{N} x_n^2 > 0$, a 8.2. Állítás szerint a Q függvénynek lokális minimuma van az a^* helyen.

A Q' deriváltfüggvény negatív a $(-\infty, a^*)$ intervallumon és pozitív az $(a^*, +\infty)$ intervallumon, ezért a Q függvénynek minimuma van az a^* helyen.

Másképpen befejezve: A

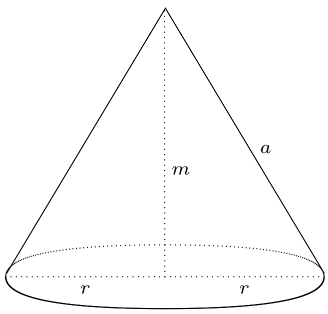
$$Q(a) = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2\right) a^2 - 2\left(\sum_{n=1}^{N} x_n y_n\right) a + \sum_{n=1}^{N} y_n^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

függvény pozitív főegyütthatós másodfokú polinomfüggvény, így ahol lokális minimuma van, ott minimuma is.

Megjegyzés. Ha az x_n, $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \le n \le N$ számok mindegyike nulla, akkor Q konstansfüggvény.

11. Az azonos alkotójú egyenes körkúpok közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

Megoldás. Jelölje az egyenes körkúp alkotóját a, magasságát m, alapkörének sugarát r $(a, m, r \in \mathbb{R}^+,\ m, r < a)$.



8.5. ábra. Egyenes körkúp

A kúp térfogata $\frac{1}{3}r^2\pi m = \frac{\pi}{3}(a^2 - m^2)m$, ezért adott $a \in \mathbb{R}^+$ alkotó esetén vizsgálhatjuk a térfogatot a magasság függvényében:

$$V(m) := \frac{\pi}{3}(a^2 - m^2)m, \quad D(V) := (0, a).$$

A differenciálható V függvénynek abban az m^* pontban lehet szélsőértéke, ahol

$$V'(m^*) = \tfrac{\pi}{3}\big(a^2 - 3(m^*)^2\big) = 0$$
$$m^* = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Mivel a deriváltfüggvény folytonos, és annak egyetlen zérushelyén $V''\big(\frac{a}{\sqrt{3}}\big) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi a < 0$, a V függvénynek az $\frac{a}{\sqrt{3}}$ helyen maximuma van, $V\big(\frac{a}{\sqrt{3}}\big) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\,a^3$ az értéke.

Megjegyzés. A V' deriváltfüggvény a $\big(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\big)$ intervallumon pozitív, az $\big(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\big)$ intervallumon pedig negatív. Ebből is következik, hogy a V függvénynek az $\frac{a}{\sqrt{3}}$ helyen maximuma van.

$D(V)$	$\big(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\big)$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\big(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\big)$
V'	$+$	0	$-$
V	növekvő	max.	csökkenő

12. Bizonyítsa be, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $x - \dfrac{1}{2}\,x^2 < \ln(1 + x) < x$.

Megoldás. Legyen

$$f(x) := x - \ln(1 + x), \quad D(f) := [0, +\infty).$$

A függvény folyonos a $[0, +\infty)$, továbbá differenciálható az $\mathbb{R}^+$ halmazon, és

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő, így $f(0) = 0$ miatt a függvény pozitív az $\mathbb{R}^+$ halmazon, ami ekvivalens a bizonyítandó jobb oldali egyenlőtlenséggel.
Legyen

$$g(x) := \ln(1 + x) - \left(x - \frac{1}{2}\,x^2\right), \quad D(g) := [0, +\infty).$$

Ez a függvény is folytonos a $[0, +\infty)$, differenciálható az $\mathbb{R}^+$ halmazon, valamint

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = \frac{x^2}{1 + x} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

tehát g szigorúan monoton növekvő. Mivel $g(0) = 0$, a g függvény pozitív az $\mathbb{R}^+$ halmazon, és ez egyenértékű a bizonyítandó bal oldali egyenlőtlenséggel.

13. Igazolja az $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{arctg}(x) + \dfrac{\pi}{4}$, $x \in (-1, 1)$ azonosságot!

Megoldás. A bal és a jobb oldal különbsége az

$$f(x) := \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}, \quad D(f) := (-1, 1)$$

függvény, mely differenciálható, és

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Mivel $f(0) = 0$ és f' a $(-1, 1)$ intervallumon értelmezett nulla konstans függvény, így f is, ezzel az azonosságot beláttuk.

8.3. Megoldandó feladatok

Az **1.–3.** feladatban keresse meg a függvény lokális szélsőértékhelyeit, és határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény monoton növekvő, ill. monoton csökkenő!

1. $f(x) := 2x^3 - 3x^2 + 1$, $D(f) := \mathbb{R}$.

2. $g(x) := x - \sqrt{x}$, $D(g) := [0, +\infty)$.

3. $h(x) := \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$, $D(h) := \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A **4.–6.** feladatban keresse meg a függvény inflexiós pontjait, és határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyekre leszűkítve a függvény konvex, ill. konkáv!

4. $f(x) := x^4 - 2x^2$, $D(f) := \mathbb{R}$.

5. $g(x) := e^{-x} - e^{-2x}$, $D(g) := \mathbb{R}$.

6. $h(x) := \dfrac{x}{(1+x)^2}$, $D(h) := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A **7.–12.** feladatban végezze el a függvény teljes vizsgálatát!

7. $f(x) := \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

8. $g(x) := (x - 3)\sqrt{x}$, $D(g) := [0, +\infty)$.

9. $h(x) := x^2 \ln(x)$, $D(h) := \mathbb{R}^+$.

10. $F(x) := \dfrac{10\ln(x)}{x}$, $D(F) := \mathbb{R}^+$.

11. $G(x) := \dfrac{x^2}{x+2}$, $D(G) := \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

12. $H(x) := x^2 - \dfrac{1}{x}$, $D(H) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13. Legyen $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < \mu$ esetén

$$x(t) := Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}, \quad D(x) := \mathbb{R}.$$

Végezze el az x függvény teljes vizsgálatát!

14. Az azonos kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

15. Az azonos térfogatú egyenes körhengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

A **16.–17.** feladatban igazolja az egyenlőtlenséget!

16. $1 + x \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

17. $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

8.4. Megoldások

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$.

$D(f)$	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	növekvő	lok. max.	csökkenő	lok. min.	növekvő

2. $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

$D(g)$	0	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
g'	$\nexists$	$-$	0	$+$
g	lok. max.	csökkenő	min.	növekvő

3. $h'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
h'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
h	csökkenő	min.	növekvő	$\nexists$	csökkenő

4. $f'(x) = 4x^3 - 4x,\ \ f''(x) = 12x^2 - 4,\ \ x \in \mathbb{R}.$

$D(f)$	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	infl.	konkáv	infl.	konvex

5. $g'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x},\ \ g''(x) = e^{-x} - 4e^{-2x},\ \ x \in \mathbb{R}.$

$D(g)$	$(-\infty, \ln(4))$	$\ln(4)$	$(\ln(4), +\infty)$
g''	$-$	0	$+$
g	konkáv	infl.	konvex

6. $h'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3},\ \ h''(x) = \frac{2x-4}{(1+x)^4},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
h''	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
h	konkáv	$\nexists$	konkáv	infl.	konvex

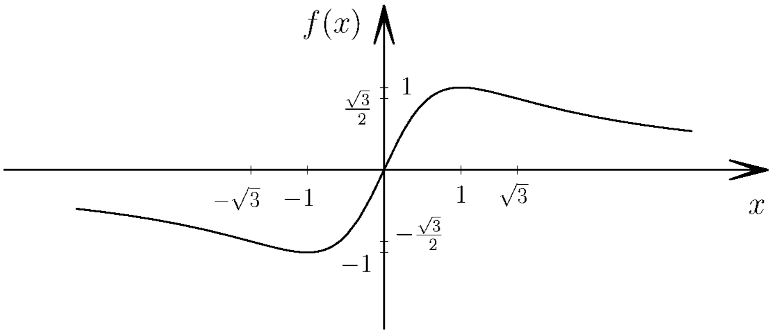
7. A függvény zérushelye 0 és $f(0) = 0$. A függvény páratlan, nem páros, nem periodikus. $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},\ \ f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3},\ \ x \in \mathbb{R}.$

$\mathbb{R}$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	csökkenő			min.	növekvő			max.	csökkenő		
	konkáv	infl.	konvex			infl.	konkáv			infl.	konvex

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ezért a $-\infty$ és a $+\infty$ helyen is vízszintes aszimptota $l(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$. Más aszimptota nincs. $R(f) = [-1, 1]$.

8. Az értelmezési tartománynak 0 a határpontja, ott a függvény (jobbról) folytonos. Zérushelyei 0 és 3, $g(0) = 0$. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

$g'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}},\ \ g''(x) = \frac{3x+3}{4x^{\frac{3}{2}}},\ \ x \in \mathbb{R}^+.$



8.6. ábra. Az $f(x) := \dfrac{2x}{x^2+1}$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény grafikonja

$D(g)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
g'	$\nexists$	$-$	0	$+$
g''	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
g	lok. max.	csökkenő	min.	növekvő
		k o n v e x		

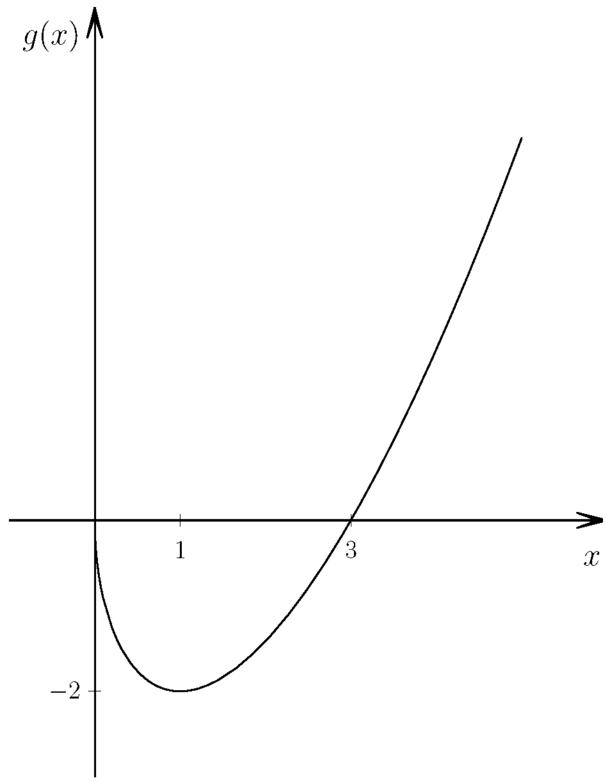
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. A függvénynek nincs aszimptotája. $R(g) = [-2, +\infty)$.

9. Az értelmezési tartomány határpontja 0, a függvény zérushelye 1. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.
$h'(x) = x(2\ln(x)+1)$, $h''(x) = 2\ln(x)+3$, $x \in \mathbb{R}^+$.

$D(h)$	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$
h'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
h''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
h	c s ö k k e n ő			min.	növekvő
	konkáv	infl.	k o n v e x		

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. A függvénynek nincs aszimptotája. $R(h) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

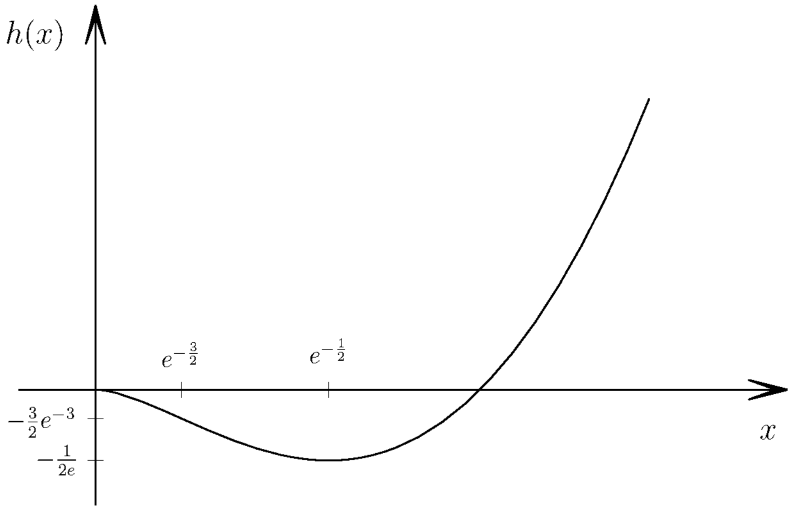
10. Az értelmezési tartomány határpontja 0, a függvény zérushelye 1. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.
$F'(x) = \frac{10(1-\ln(x))}{x^2}$, $F''(x) = \frac{10(2\ln(x)-3)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^+$.



8.7. ábra. A $g(x) := (x-3)\sqrt{x}$, $D(g) := [0, +\infty)$ függvény grafikonja

$D(F)$	$(0,e)$	e	$(e,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
F'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
F''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
F	növekvő	max.	c s ö k k e n ő		
	k o n k á v			infl.	konvex

$\lim\limits_{x\to 0} F(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 0$. Az előbbi szerint a függvénynek jobb oldali függőleges aszimptotája van a 0 helyen, az utóbbi miatt pedig $l(x) := 0$, $x \in \mathbb{R}$ vízszintes aszimptota a $+\infty$ helyen, más aszimptota nincs. $R(F) = \left(-\infty, \frac{10}{e}\right]$.



8.8. ábra. A $h(x) := x^2 \ln(x)$, $D(h) := \mathbb{R}^+$ függvény grafikonja

11. Az értelmezési tartomány határpontja -2, a függvény zérushelye 0, $f(0) = 0$. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus. $G'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$, $G'(x) = \frac{8}{(x+2)^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

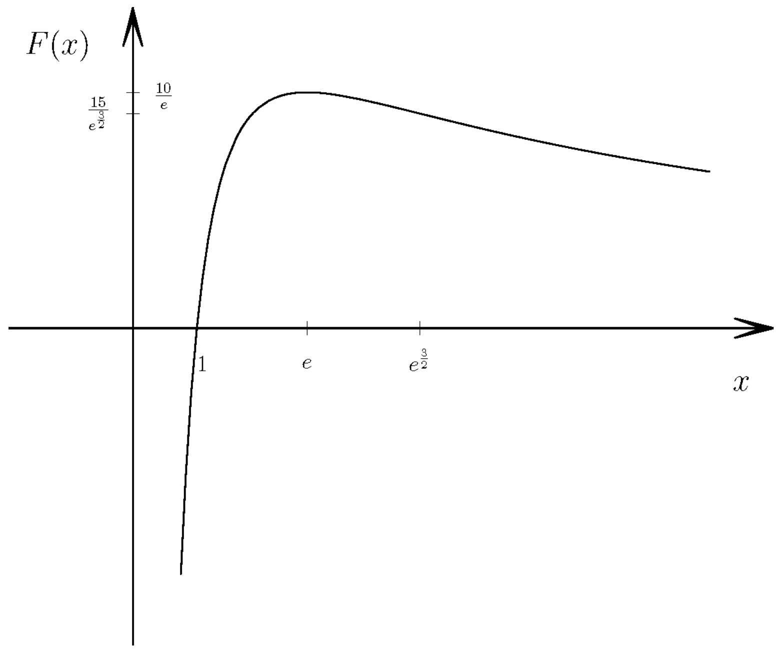
$\mathbb{R}$	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
G'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
G''	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
G	növekvő	lok. max.	csökkenő	$\nexists$	csökkenő	lok. min.	növekvő
	k o n k á v				k o n v e x		

$\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2-0} G(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0} G(x) = +\infty$. A G függvénynek a -2 helyen függőleges aszimptotája van. Mivel

$$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},$$

ezért

$$\lim_{x\to-\infty} \big(G(x) - (x-2)\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(G(x) - (x-2)\big) = 0,$$



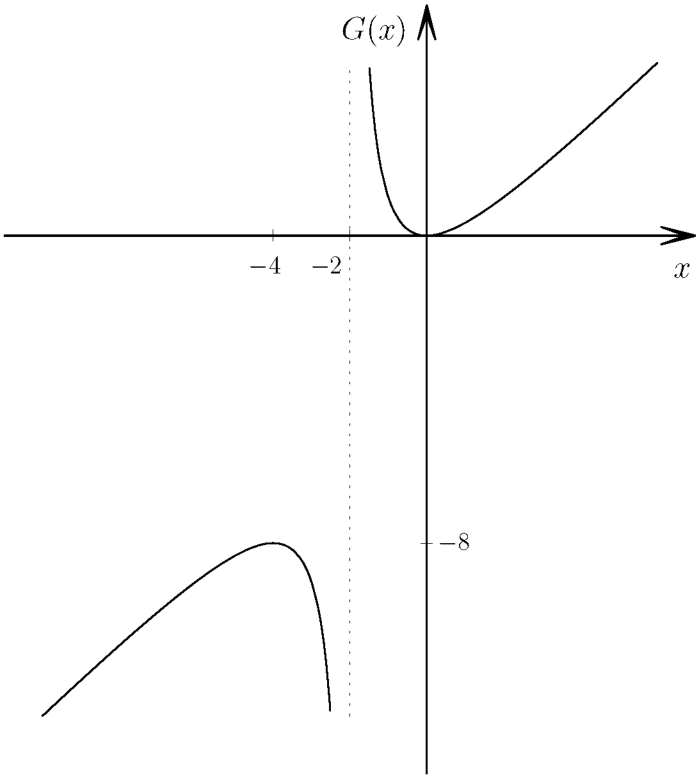
8.9. ábra. Az $F(x) := \dfrac{10\ln(x)}{x}$, $D(F) := \mathbb{R}^+$ függvény grafikonja

tehát $l(x) := x - 2,\ \ x \in \mathbb{R}$ aszimptota a $-\infty$ és a $+\infty$ helyen is. Más aszimptota nincs. $R(G) = \mathbb{R} \setminus (-8, 0)$.

12. Az értelmezési tartomány határpontja 0, a függvény zérushelye 1. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

$H'(x) = 2x + \frac{1}{x^2},\ \ H''(x) = 2 - \frac{2}{x^3},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

$\mathbb{R}$	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
H'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
H''	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
H	csökkenő	lok. min.	növekvő	$\nexists$	n ö v e k v ő		
	k o n v e x				konkáv	infl.	konvex



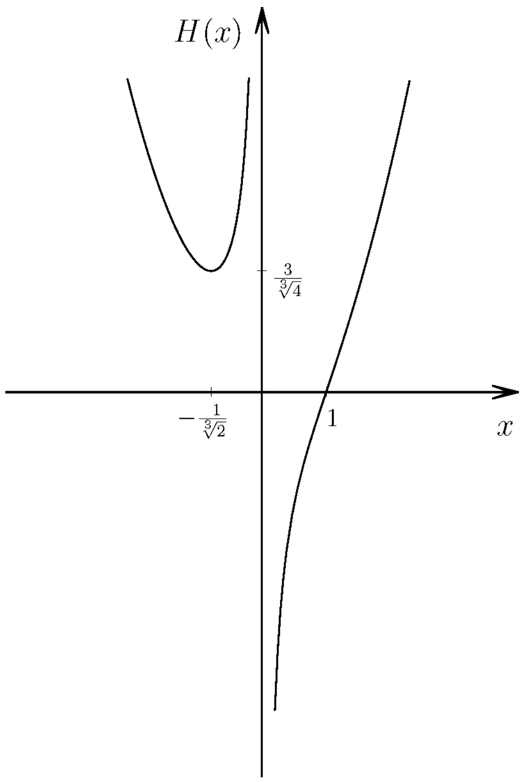
8.10. ábra. A $G(x) := \dfrac{x^2}{x+2}$, $D(G) := \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ függvény grafikonja

Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-\tfrac{1}{x}\right)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\tfrac{1}{x}\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to0+0}\left(x^2-\tfrac{1}{x}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to0-0}\left(x^2-\tfrac{1}{x}\right)=+\infty.$$

A H függvénynek a 0 helyen függőleges aszimptotája van, más aszimptota nincs. $R(H)=\mathbb{R}$.

13. A függvénynek akkor van zérushelye, ha A és B ellentétes előjelű ($A < 0 < B$ vagy $B < 0 < A$), ekkor az egyetlen zérushelye $t_0 := \frac{1}{\lambda-\mu}\ln\left(-\frac{A}{B}\right)$. A függvény értéke a 0 helyen $x(0) = A + B$. A függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.



8.11. ábra. A $H(x) := x^2 - \dfrac{1}{x}$, $D(H) := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény grafikonja

A deriváltfüggvény

$$x'(t) := -A\lambda e^{-\lambda t} - B\mu e^{-\mu t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

melynek szintén akkor létezik zérushelye, ha A és B ellentétes előjelű. Az egyedüli zérushelye $t_1 := \frac{1}{\lambda-\mu} \ln\left(-\frac{A}{B} \cdot \frac{\lambda}{\mu}\right)$.

A második deriváltfüggvény

$$x''(t) := A\lambda^2 e^{-\lambda t} + B\mu^2 e^{-\mu t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ennek is akkor van zérushelye, ha A és B ellentétes előjelű, mégpedig az egyetlen zérushelye $t_2 := \frac{1}{\lambda-\mu} \ln\left(-\frac{A}{B} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)$.

Ha A és B ellentétes előjelű, akkor $0 < \lambda < \mu$ miatt

$$t_2 = \frac{1}{\lambda-\mu}\ln\left(-\frac{A}{B}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\lambda-\mu}\ln\left(-\frac{A}{B}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{\lambda-\mu}\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) > t_1.$$

Ha $A < 0 < B$, akkor az x függvény táblázata

$\mathbb{R}$	$(-\infty, t_1)$	t_1	(t_1, t_2)	t_2	$(t_2, +\infty)$
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x''	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	csökkenő	min.	növekvő		
	konvex			infl.	konkáv

A $B < 0 < A$ esetben pedig az $x(t) = -\big((-A)e^{-\lambda t} + (-B)e^{-\mu t}\big)$ átalakítás mutatja, hogy a $-x$ függvényre érvényes az a táblázat, ami az előző esetben az x függvényre, így ekkor

$\mathbb{R}$	$(-\infty, t_1)$	t_1	(t_1, t_2)	t_2	$(t_2, +\infty)$
x'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	növekvő	max.	csökkenő		
	konkáv			infl.	konvex

Határértékek, aszimptoták: Ha $A < 0 < B$, akkor

$$\lim_{t\to-\infty}\left(Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}\right) = \lim_{t\to-\infty} e^{-\lambda t}\left(A + Be^{(\lambda-\mu)t}\right) = +\infty,$$

$B < 0 < A$ esetén $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$. Mindkét esetben $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, ezért $l(t) := 0$, $t \in \mathbb{R}$ vízszintes aszimptota a $+\infty$ helyen, más aszimptota nincs.
Ha $A < 0 < B$, akkor $R(x) = [x(t_1), +\infty)$, ha pedig $B < 0 < A$, akkor az értékkészlet $R(x) = (-\infty, x(t_1)]$.

Ha $A, B \geq 0$ és nem mindkét együttható nulla, akkor x szigorúan monoton csökkenő konvex függvény, $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$ és $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Az $l(t) := 0$, $t \in \mathbb{R}$ függvény vízszintes aszimptota a $+\infty$ helyen, más aszimptota nincs. $R(x) = \mathbb{R}^+$.

Végül ha $A, B \leq 0$ és nem mindkettő nulla, akkor x szigorúan monoton növekvő konkáv függvény, $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ és $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Az $l(t) := 0,\ t \in \mathbb{R}$ függvény vízszintes aszimptota a $+\infty$ helyen, más aszimptota nincs. $R(x) = \mathbb{R}^-$.

14. Az $a, b \in \mathbb{R}^+$ oldalú téglalap területe ab, kerülete $2(a+b)$. Ha $K \in \mathbb{R}^+$ adott, akkor a K kerületű, $a, b \in \mathbb{R}^+$ oldalú téglalap területe az a oldal függvényeként

$$T(a) := a\left(\frac{K}{2} - a\right), \quad D(T) := \left(0, \frac{K}{2}\right).$$

Ennek a függvénynek maximuma van a $\frac{K}{4}$ helyen, ezért az azonos kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.

15. Ha az egyenes körhenger magassága $m \in \mathbb{R}^+$ és alapkörének sugara $r \in \mathbb{R}^+$, akkor a térfogata $\pi r^2 m$, felszíne $2\pi r m + 2\pi r^2$. Ha e henger térfogata az adott $V \in \mathbb{R}^+$ szám, akkor a felszíne az alapköre sugarának függvényeként

$$A(r) := \frac{2V}{r} + 2\pi r^2, \quad D(A) := \mathbb{R}^+.$$

Ennek a függvénynek minimuma van a $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ helyen, ezért a legkisebb felszínű henger magassága $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, alapkörének sugara $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

16. Az $f(x) := e^x - (1+x)$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, 0]$ intervallumon, szigorúan monoton növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon, ezért minimuma van a 0 helyen, melynek értéke 0.

17. Az $f(x) := \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, $D(f) := [0, +\infty)$ függvény szigorúan monoton növekvő, tehát minimuma van a 0 helyen, ennek értéke 0. A függvény a szigorú monoton növekedése miatt az $\mathbb{R}^+$ halmazon pozitív.

9. fejezet

Primitív függvény

9.1. Elméleti összefoglaló

9.1. Definíció. Az f valós függvény *primitív függvény*ének nevezzük az $I \subset D(f)$ intervallumon az ott értelmezett F folytonos függvényt, ha F differenciálható I belső pontjainak $\operatorname{int} I$ halmazán, és $F'(x) = f(x)$, $x \in \operatorname{int} I$.

Az intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényének nevezzük az F függvényt, ha F az f függvény primitív függvénye a $D(f)$ intervallumon. A primitív függvények halmazát $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jelöli. Az f függvényt *integrandus*nak hívjuk.

Megjegyzés. Nem minden intervallumon értelmezett függvénynek létezik primitív függvénye, valamint nem minden elemi függvény primitív függvényei elemi függvények. Pl. $f(x) := e^{-x^2}$, $D(f) := \mathbb{R}$ elemi függvény, de a primitív függvényei nem azok.

9.1. Állítás. *Minden intervallumon értelmezett folytonos függvénynek létezik primitív függvénye.*

9.2. Állítás. *Egy intervallumon értelmezett függvény bármely két primitív függvényének különbsége állandó.*

Megjegyzés. Ha az f függvény egyik primitív függvénye F, akkor a primitív függvények $\int f = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$ halmazát röviden így szokás jelölni: $\int f = F + C,\ \ C \in \mathbb{R}$.

9.3. Állítás. *Ha a közös intervallumon értelmezett f és g függvénynek létezik primitív függvénye, valamint $c \in \mathbb{R}$, akkor a cf, $f+g$, $f-g$ függvényeknek is létezik primitív függvénye, és*

$$\int (cf) = c\int f, \qquad \int (f+g) = \int f + \int g, \qquad \int (f-g) = \int f - \int g.$$

Megjegyzés. A szorzat, a hányados és a kompozíció primitív függvényeire nem érvényes hasonló állítás.

9.4. Állítás. Ha az I intervallumon értelmezett f függvénynek egy primitív függvénye F, akkor $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ esetén az $x \mapsto f(ax+b)$, $ax + b \in I$

függvénynek is létezik primitív függvénye, és

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

9.5. Állítás. *Legyen f nyílt intervallumon értelmezett differenciálható függvény. Ha $f \neq 0$, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int \frac{f'}{f} = \ln(|f|) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ és f^α értelmezve van, akkor az $f^\alpha f'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int f^\alpha f' = \frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

9.1. Tétel (parciális integrálás)**.** *Ha f és g közös intervallumon értelmezett differenciálható függvény, továbbá az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Megjegyzés. Az egyenlőség bal oldalán halmaz, a jobb oldalán egy függvény és egy halmaz különbsége szerepel. Az utóbbin azt a halmazt értjük, melynek elemeit úgy kapjuk, hogy az fg függvényből kivonjuk fg' egy-egy primitív függvényét:

$$fg - \int fg' := \left\{ fg - H : H \in \int fg' \right\}.$$

9.2. Tétel (integrálás helyettesítéssel)**.** *Ha az f függvénynek a J intervallumon létezik primitív függvénye, g pedig az I intervallumon értelmezett olyan differenciálható szigorúan monoton függvény, melyre $R(g) \subset J$, akkor az $y \mapsto f(g(y))g'(y)$, $y \in I$ függvénynek létezik primitív függvénye, továbbá*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(y))\,g'(y)\,\mathrm{d}y \,\Big|_{y=g^{-1}(x)}.$$

Megjegyzés. A tétel második állítása tömörebb jelöléssel

$$\int f = \left(\int (f \circ g)\, g' \right) \circ g^{-1}.$$

A következő táblázatban és később is a rövidség kedvéért az $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ egyenlőséget úgy értjük, hogy az f integrandust és az F primitív függvényt is leszűkítjük az integrandus értelmezési tartományának valamelyik részintervallumára, továbbá C tetszőleges valós szám.

9.6. Állítás (nevezetes elemi függvények primitív függvényei)**.**

$\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \in \mathbb{R},\ n \neq -1.$

$\int \dfrac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(|x|) + C.$

$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$

$\int a^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln(a)} a^x + C,\ \ a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1.$

$\int \ln(x) \, \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.$

$\int \log_a(x) \, \mathrm{d}x = x\log_a(x) - \dfrac{1}{\ln(a)} x + C,$ $a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1.$

$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C.$

$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C.$

$\int \mathrm{tg}\,(x) \, \mathrm{d}x = -\ln(|\cos(x)|) + C.$

$\int \mathrm{ctg}\,(x) \, \mathrm{d}x = \ln(|\sin(x)|) + C.$

$\int \dfrac{1}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\,(x) + C.$

$\int \dfrac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,(x) + C.$

$\int \mathrm{sh}\,(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,(x) + C.$

$\int \mathrm{ch}\,(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,(x) + C.$

$\int \mathrm{th}\,(x) \, \mathrm{d}x = \ln(\mathrm{ch}\,(x)) + C.$

$\int \mathrm{cth}\,(x) \, \mathrm{d}x = \ln(|\mathrm{sh}\,(x)|) + C.$

$\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{cth}\,(x) + C.$

$\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{th}\,(x) + C.$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\,(x) + C.$

$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,(x) + C.$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$ a $(-1,1)$ intervallumon.

$\int \dfrac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arth}\,(x) + C$ a $(-1,1)$ intervallumon.

$\int \dfrac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arcth}\,(x) + C$ a $(-\infty,-1)$ és az $(1,+\infty)$ intervallumon.

9.2. Kidolgozott feladatok

1. Adja meg a következő primitív függvényeket!

(a) $\int x \, \mathrm{d}x.$ (b) $\int x^2 \, \mathrm{d}x.$ (c) $\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$

(d) $\int e^{2x} \, \mathrm{d}x.$ (e) $\int e^{1-3x} \, \mathrm{d}x.$ (f) $\int \sin(5x) \, \mathrm{d}x.$

(g) $\int \cos(4x-1) \, \mathrm{d}x.$ (h) $\int \dfrac{1}{1-2x} \, \mathrm{d}x.$ (i) $\int \dfrac{1}{x^2+2x+5} \, \mathrm{d}x.$

(j) $\int \dfrac{1}{2x^2+10} \, \mathrm{d}x.$ (k) $\int \dfrac{1}{x^2-4x+4} \, \mathrm{d}x.$

Megoldás.
(a) $\int x^1 \, dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(c) $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C, \quad x \in [0, +\infty).$

(d) $\int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(e) $\int e^{1-3x} \, dx = \frac{e^{1-3x}}{-3} + C = -\frac{1}{3} e^{1-3x} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(f) $\int \sin(5x) \, dx = \frac{-\cos(5x)}{5} + C = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(g) $\int \cos(4x-1) \, dx = \frac{1}{4} \sin(4x-1) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(h) $\int \frac{1}{1-2x} \, dx = -\frac{1}{2} \ln(|1-2x|) + C, \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ vagy $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$

(i) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} \, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,$ $x \in \mathbb{R}.$

(j) $\int \frac{1}{2x^2+10} \, dx = \frac{1}{10} \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{5}})^2+1} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(k) $\int \frac{1}{x^2-4x+4} \, dx = \int (x-2)^{-2} \, dx = -\frac{1}{x-2} + C, \quad x \in (-\infty, 2)$ vagy $x \in (2, +\infty).$

2. Számolja ki az alábbi primitív függvényeket!

(a) $\int \sin^2(x) \cos(x) \, dx.$ (b) $\int \operatorname{tg}(x) \, dx.$ (c) $\int \operatorname{ctg}(x) \, dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \, dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x^2+1} \, dx.$ (f) $\int \cos^2(x) \, dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx.$ (h) $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} \, dx.$ (i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2} \, dx.$

(j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{3e^x+1} \, dx.$

Megoldás.
(a) $\int \sin^2(x) \cos(x) \, dx = \int \sin^2(x) \, (\sin(x))' \, dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\int \operatorname{tg}(x) \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} \, dx = -\ln(|\cos(x)|) + C,$ ahol valamely k egészre $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$

(c) $\int \operatorname{ctg}(x) \, dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)} \, dx = \ln(|\sin(x)|) + C, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ valamely k egészre.

(d) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(e) $\int \frac{x+1}{2x^2+1} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{(2x^2+1)'}{2x^2+1} \, dx + \int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1} \, dx =$
$= \frac{1}{4} \ln(2x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

(f) A $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1),\ \ x \in \mathbb{R}$ azonosság alapján
$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos(2x)+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C,\ \ x \in \mathbb{R}.$

(g) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C,\ \ x \in \mathbb{R}^+.$

(h) $\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} + C,$ ahol adott k egész szám esetén $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right).$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + C,\ \ x \in \mathbb{R}^+.$

(j) $\int \frac{e^x}{3e^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3e^x}{3e^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(3e^x+1) + C,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3. Határozza meg a következő primitív függvényeket!

(a) $\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$ (b) $\int x\,e^x\,\mathrm{d}x.$ (c) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

(a) Parciális integrálással az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \underset{f}{x}\,\underset{g}{\sin(x)} - \int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

(b) Parciális integrálással az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,\mathrm{d}x = \underset{f}{x}\,\underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{e^x}\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

(c) Parciális integrálással az $\mathbb{R}^+$ halmazon

$$\int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\ln(x)}\mathrm{d}x = \underset{f}{x}\,\underset{g}{\ln(x)} - \int \underset{f}{x}\cdot\underset{g'}{\tfrac{1}{x}}\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(x) - x + C.$$

A **4.–8.** feladatban parciális integrálással határozza meg a primitív függvényeket!

4. $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$ **5.** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x.$ **8.** $\displaystyle\int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

4. Parciális integrálással a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ vagy az $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ intervallumon

$$\int \frac{x}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int x\cdot(2x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{(2x-1)^{-1}}{-2} - \int 1\cdot\frac{(2x-1)^{-1}}{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{x}{2(2x-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2(2x-1)} + \frac{1}{4}\ln(|2x-1|) + C.$$

5. Parciális integrálással a $(-1,1)$ intervallumon

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \arcsin(x).$$

Adott intervallumon bármely két primitív függvény különbsége állandó, ezért

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\Big) + C, \quad x \in (-1,1).$$

6. Parciális integrálással a $(-2,+\infty)$ intervallumon

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int x\cdot(x+2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \int 1\cdot\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2x\,(x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\,(x+2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

7. Parciális integrálással az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = x^2\,\frac{e^{2x}}{2} - \int 2x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

A jobb oldal második tagját is parciálisan integráljuk, ismét az exponenciális függvényt tekintjük deriváltfüggvénynek:

$$\int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

E kettőből

$$\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Ha C tetszőleges valós szám lehet, akkor $-C$ is.)

Megjegyzés. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, akkor az $\int x^n c^{ax}\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \sin(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \mathrm{sh}\,(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \mathrm{ch}\,(ax)\,\mathrm{d}x$ primitív függvényeket kiszámolhatjuk n alkalommal parciálisan integrálva.

8. Kétszer parciálisan integrálunk az $\mathbb{R}$ halmazon, mindkét alkalommal az exponenciális függvényt választjuk a deriváltfüggvénynek.

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Bármely két primitív függvény különbsége állandó, így

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, e^x \big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Másképpen: Kétféleképpen parciálisan integrálunk az $\mathbb{R}$ halmazon. Ha az exponenciális függvényt tekintjük a deriváltfüggvénynek, akkor

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha pedig a szinuszfüggvényt, akkor

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

A két egyenlőséget összeadva, és felhasználva, hogy az $\mathbb{R}$ intervallumon egy függvény bármely két primitív függvényének különbsége állandó, a

$$2\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C^*,$$
$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, e^x\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + \frac{C^*}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

eredményt kapjuk. (Ha C^* tetszőleges valós szám lehet, akkor $\frac{C^*}{2}$ is.)

A **9.–13.** feladatban helyettesítéssel számítsa ki a primitív függvényeket!

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x.$ **10.** $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$ **11.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{3e^x+1}\,\mathrm{d}x.$

12. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2(x)+1}{\operatorname{tg}^2(x)+4}\,\mathrm{d}x.$ **13.** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

9. Alkalmazzuk a 9.2. Tételt! Legyen $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $D(f) := [0,+\infty)$ és $g(x) := x^2$, $D(g) := [0,+\infty)$. Ekkor g nyilván differenciálható és szigorúan monoton, ezért a tétel alapján

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{y^2}+1}\cdot 2y\,\mathrm{d}y\,\Big|_{y=\sqrt{x}} = 2\int \frac{y}{y+1}\,\mathrm{d}y\,\Big|_{y=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int\Big(1-\frac{1}{y+1}\Big)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\sqrt{x}} = 2\big(y-\ln(y+1)\big)+C\Big|_{y=\sqrt{x}} =$$
$$= 2\big(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\big)+C.$$

A klasszikus módon: Az $y=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ helyettesítést alkalmazva $x=y^2,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2y,\ \ \mathrm{d}x=2y\,\mathrm{d}y$ alapján

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{y+1}\cdot 2y\,\mathrm{d}y=$$
$$=2(y-\ln(y+1))+C=2\big(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\big)+C.$$

10. A 9.2. Tételben legyen $f(x):=x\sqrt{x+1},\ D(f):=[-1,+\infty)$ és $g(x):=x^2-1,\ D(g):=[0,+\infty)$.

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int(y^2-1)\sqrt{(y^2-1)+1}\cdot 2y\,\mathrm{d}y\,\Big|_{y=\sqrt{x+1}}=$$
$$=\int(2y^4-2y^2)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\sqrt{x+1}}=\frac{2}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+C\Big|_{y=\sqrt{x+1}}=$$
$$=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

A klasszikus módon: Az $y=\sqrt{x+1},\ \ x\in[-1,+\infty)$ helyettesítéssel $x=y^2-1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2y,\ \ \mathrm{d}x=2y\,\mathrm{d}y,$

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int(y^2-1)y\cdot 2y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{5}\,y^5-\frac{2}{3}\,y^3+C=$$
$$=\frac{2}{5}\,(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

11. A 9.2. Tételben legyen $f(x):=\frac{e^x}{3e^x+1},\ \ D(f):=\mathbb{R}$ és $g(x):=\ln(x)$, $D(g):=\mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\int\frac{e^x}{3e^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{e^{\ln(y)}}{3e^{\ln(y)}+1}\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\Big|_{y=e^x}=\int\frac{1}{3y+1}\,\mathrm{d}y\,\Big|_{y=e^x}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln(3y+1)+C\,\Big|_{y=e^x}=\frac{1}{3}\ln(3e^x+1)+C.$$

A klasszikus módon: Az $y=e^x,\ \ x\in\mathbb{R}$ helyettesítéssel $x=\ln y$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y},\ \ \mathrm{d}x=\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y,$

$$\int\frac{e^x}{3e^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{y}{3y+1}\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int\frac{1}{3y+1}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\ln(3y+1)+C=\frac{1}{3}\ln(3e^x+1)+C.$$

Megjegyzés. Másképpen kaptuk meg ugyanezt az eredményt a 2.(j) feladatban.

12. A 9.2. Tételben legyen $f(x) := \frac{\operatorname{tg}^2(x)+1}{\operatorname{tg}^2(x)+4}$ értelmezve pl. a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, valamint $g(x) := \operatorname{arctg}(x)$, $D(g) := \mathbb{R}$.

A klasszikus módon, az $y = \operatorname{tg}(x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = \operatorname{arctg}(y)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+y^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$ alapján a primitív függvények a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2(x)+1}{\operatorname{tg}^2(x)+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y^2+1}{y^2+4}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{y}{2})^2+1}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{2}\right) + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Megjegyzés. Ha adott k egész esetén a $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ intervallumon keressük a primitív függvényeket, akkor azok

$$F(x) := \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{\operatorname{tg}(x)}{2}\right) + C, \quad D(F) := \left(-\tfrac{\pi}{2}+k\pi, \tfrac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

13. Legyen a 9.2. Tételben $f(x) := \sqrt{1-x^2}$, $D(f) := [-1,1]$ és $g(x) := \sin(x)$, $D(g) := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Az így leszűkített szinuszfüggvény szigorúan monoton növekvő.

A klasszikus módon, $x \in [-1,1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén az $x = \sin(y)$, azaz $y = \arcsin(x)$ helyettesítéssel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos(y)$, $\mathrm{d}x = \cos(y)\,\mathrm{d}y$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2(y)}\cdot\cos(y)\,\mathrm{d}y = \int \cos^2(y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int \frac{\cos(2y)+1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y + C = \frac{1}{2}\sin(y)\cos(y) + \frac{1}{2}y + C =$$
$$= \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + C.$$

A második és az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy a koszinuszfüggvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon nemnegatív.

Megjegyzés. E primitív függvényeket az 5. feladatban parciális integrálással számoltuk ki, a két eredmény azonos.

A **14.–19.** feladatban határozza meg a racionális törtfüggvény primitív függvényeit!

14. $\displaystyle\int \frac{4x+2}{2x-1}\,\mathrm{d}x.$ **15.** $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x.$ **16.** $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$ **18.** $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x.$ **19.** $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

14. A számláló és a nevező is elsőfokú polinom. Maradékos osztással $4x+2 = 2(2x-1)+4$, $x \in \mathbb{R}$, ezért a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ vagy az $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ intervallumon

$$\int \frac{4x+2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2x-1)+4}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \\ = \int \left(2 + \frac{4}{2x-1}\right)\mathrm{d}x = 2x + 2\ln(|2x-1|) + C.$$

15. A számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom, és az utóbbinak nincs valós gyöke. Maradékosan osztva a számlálót a nevező deriváltjával a $4x = 2(2x+6)-12$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőséget kapjuk. Ebből az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \frac{4x}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2x+6)-12}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = \\ = 2\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x - 12\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ = 2\ln(x^2+6x+10) - 12\mathrm{arctg}\,(x+3) + C.$$

16. Maradékos osztással $x = \frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ alapján a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ vagy az $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ intervallumon

$$\int \frac{x}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int (2x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{4}\ln(|2x-1|) - \frac{1}{4(2x-1)} + C.$$

Megjegyzés. Ezeket a primitív függvényeket parciális integrálással számoltuk ki a 4. feladatban, az

$$\int \frac{x}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2(2x-1)} + \frac{1}{4}\ln(|2x-1|) + C$$

eredményt kaptuk. A két eredmény különbözőnek tűnik, de a

$$-\frac{1}{4(2x-1)} = -\frac{x}{2(2x-1)} + \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

azonosság szerint egyenlő. Az azonosságot pl. úgy igazolhatjuk, hogy a jobb oldalát közös nevezőre hozzuk.

17. A nevező másodfokú polinom, melynek két valós gyöke van, ezért felírhatjuk szorzatként: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Bontsuk ún.

*parciális tört*ek összegére az integrandust, vagyis keressünk olyan A és B valós számokat, melyekre

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Tudjuk, hogy ilyen A és B szám létezik. A közös nevezővel szorozva

$$1 = A(x+1) + B(x-1), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Az egyenlet mindkét oldalán polinomfüggvény áll. Ezek folytonosak, így az egyenlőség $x = -1$ és $x = 1$ esetén is fennáll:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 - 2B, &&\text{vagyis} && B = -\tfrac{1}{2}, \\ 1 &= 2A + 0, &&\text{vagyis} && A = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

A parciális törtek felhasználásával a primitív függvények a $(-\infty, -1)$, a $(-1, 1)$ vagy az $(1, +\infty)$ intervallumon

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Areafüggvényeket használva is megoldhatjuk a feladatot. A $(-1, 1)$ intervallumon

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{arth}(x) + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C,$$

a $(-\infty, -1)$ vagy az $(1, +\infty)$ intervallumon pedig

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{arcth}(x) + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

18. A nevezőbeli másodfokú polinomnak két valós gyöke van, és a gyöktényezős alakja $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$. Parciális törtek összegeként írjuk fel az integrandust, majd közös nevezőre hozzuk a jobb oldalt:

$$\frac{3x-5}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}.$$

A bal és a jobb oldal számlálója egyenlő, tehát

$$3x - 5 = A(x-2) + B(x+3) = (A+B)x + (-2A+3B).$$

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha az együtthatóik rendre egyenlők. Ez egyenletrendszert ad az együtthatókra:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ -2A + 3B &= -5 \end{aligned}\right\}, \quad \text{megoldása} \quad A = \frac{14}{5},\ B = \frac{1}{5}.$$

Ennek alapján a primitív függvények a $(-\infty, -3)$, a $(-3, 2)$ vagy a $(2, +\infty)$ intervallumon

$$\int \frac{3x-5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{14}{5}}{x+3} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{14}{5}\ln(|x+3|) + \frac{1}{5}\ln(|x-2|) + C.$$

19. Maradékos osztással $x^3 + 1 = x(x^2-4) + (4x+1),\ x \in \mathbb{R},$ ezért

$$\frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)+(4x+1)}{x^2-4} = x + \frac{4x+1}{x^2-4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

A jobb oldal utolsó tagját parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$$

$$4x + 1 = A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + (2A - 2B),$$

$$\left.\begin{aligned} A + B = 4 \\ 2A - 2B = 1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{azaz} \quad A = \frac{9}{4},\ B = \frac{7}{4}.$$

A fentieket felhasználva a $(-\infty, -2)$, a $(-2, 2)$ vagy a $(2, +\infty)$ intervallumon

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}\ln(|x-2|) + \frac{7}{4}\ln(|x+2|) + C.$$

20. Többféle módon határozza meg az $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ primitív függvényeket az $\mathbb{R}$ halmazon, majd hasonlítsa össze az eredményeket!

Megoldás.

(a) $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)\,(\sin(x))'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C_1,\ \ C_1 \in \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

(b) A $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ azonosság alapján az $\mathbb{R}$ halmazon $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C_2,\ \ C_2 \in \mathbb{R}.$

(c) A koszinuszfüggvényre, mint deriváltfüggvényre tekintve parciális integrálással az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x) - \int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$

amit átrendezve $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C_3$, $C_3 \in \mathbb{R}$, mert bármely két primitív függvény különbsége állandó.

Mindhárom megoldás ugyanazt a függvényhalmazt adja, hiszen trigonometrikus azonosságot alkalmazva

$$-\frac{1}{4}\cos(2x)+C_2 = -\frac{1}{4}\big(1-2\sin^2(x)\big)+C_2 = \frac{1}{2}\sin^2(x)+\left(C_2-\frac{1}{4}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

A **21.–24.** feladatban adott $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ paraméter esetén számítsa ki a primitív függvényeket!

21. $\displaystyle\int e^{-st}\,\mathrm{d}t.$ **22.** $\displaystyle\int te^{-st}\,\mathrm{d}t.$

23. $\displaystyle\int e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t,\quad a\in\mathbb{R}.$ **24.** $\displaystyle\int e^{-st}\mathrm{sh}\,(at)\,\mathrm{d}t,\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{-s,s\}.$

Megoldás.

21. $\displaystyle\int e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s} + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

22. Parciális integrálással az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int t\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\mathrm{d}t = -\frac{t}{s}\,e^{-st} - \frac{1}{s^2}\,e^{-st} + C.$$

23. Kétszer parciálisan integrálva az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\begin{aligned}
&\int e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\cos(at) - \frac{a}{s}\int e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\cos(at) - \frac{a}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\sin(at) + \frac{a}{s}\int e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\cos(at) + \frac{ae^{-st}}{s^2}\sin(at) - \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Mivel adott intervallumon bármely két primitív függvény különbsége állandó,

$$\int e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-st}}{a^2+s^2}\big(a\sin(at) - s\cos(at)\big) + C$$

az $\mathbb{R}$ intervallumon.

24. Minden $a, s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^{-st}\mathrm{sh}\,(at) = e^{-st}\,\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}\big(e^{(a-s)t} - e^{-(a+s)t}\big),$$

ezért $|a| \neq |s|$ esetén az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int e^{-st}\mathrm{sh}\,(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} + \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\right) + C.$$

Megjegyzés. Az előző megoldáshoz hasonlóan két parciális integrálással is megkaphatjuk az eredményt.

25. Legyen f az I nyílt intervallumon differenciálható függvény és $s \in \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy az I intervallumon

$$\int e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f(t) + s\int e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Megoldás. A $t \mapsto e^{-st} f(t),\ t \in I$ függvény folytonos, ezért van primitív függvénye. A parciális integrálás 9.1. Tétele szerint a $t \mapsto e^{-st} f'(t)$, $t \in I$ függvénynek is van primitív függvénye, és az említett tétel a bizonyítandó összefüggést adja.

9.3. Megoldandó feladatok

Az **1.–27.** feladatban határozza meg a primitív függvényeket!

1. $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,\mathrm{d}x.$ **2.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x-1}\,\mathrm{d}x.$ **3.** $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^4+3}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x.$ **5.** $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(1+\sin^2(x))^2}\,\mathrm{d}x.$ **8.** $\displaystyle\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x.$ **9.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+2e^x)^2}\,\mathrm{d}x.$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ctg}\,(x)+3}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ **11.** $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$ **12.** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^{\,2}(x)\,\mathrm{d}x.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x.$ **15.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x.$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$ **17.** $\displaystyle\int x\sin(4x)\,\mathrm{d}x.$ **18.** $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$

19. $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{tg}^{\,2}(x)}{1+2\mathrm{tg}\,(x)}\,\mathrm{d}x.$ **20.** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$ **21.** $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x.$

22. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2-x}\,\mathrm{d}x.$ **23.** $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$ **24.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x.$ **26.** $\displaystyle\int \frac{1-2x}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x.$ **27.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x.$

A **28.–30.** feladatban adott $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter esetén számítsa ki a primitív függvényeket!

28. $\displaystyle\int e^{-st}e^{at}\,\mathrm{d}t, \quad a \in \mathbb{R}.$ **29.** $\displaystyle\int t^2 e^{-st}\,\mathrm{d}t.$

30. $\displaystyle\int e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t, \quad a \in \mathbb{R}.$

9.4. Megoldások

1. $\int \frac{2}{3x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln(|3x+4|) + C$ a $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ vagy a $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ intervallumon.

2. $\int \sqrt[3]{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}(2x-1)^{\frac{4}{3}} + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

3. $\int \frac{2x^3}{x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^4+3) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

4. $\int \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$ az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

5. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin(x)} + C$ valamely k egész esetén a $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon.

6. $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\cos(2x)} + C$ valamely k egész esetén a $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ intervallumon.

7. $\int \frac{\sin(2x)}{(1+\sin^2(x))^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+\sin^2(x)} + C = \frac{2}{-3+\cos(2x)} + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

8. $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

9. $\int \frac{e^x}{(1+2e^x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(1+2e^x)} + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

10. $\int \frac{\operatorname{ctg}(x)+3}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\operatorname{ctg}(x)+3)^2}{2} + C$ valamely k egész esetén a $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon.

11. $\int \frac{1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{|e^x-1|}{e^x}\right) + C = \ln(|e^x-1|) - x + C$ az $\mathbb{R}^-$ vagy az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

12. $\int \operatorname{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(x) - x + C$ valamely k egész esetén a $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ intervallumon.

13. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|\ln(x)|) + C$ a $(0,1)$ vagy az $(1,+\infty)$ intervallumon.

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C$ az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

15. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(e^x) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

16. $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ a $(-1,1)$ intervallumon.

17. $\int x\sin(4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\,x\cos(4x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

18. $\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{2}x + C$ a $(-1,+\infty)$ intervallumon.

19. $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2(x)}{1+2\operatorname{tg}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(|1+2\operatorname{tg}(x)|) + C$ az $\left\{x\in\mathbb{R}\colon \cos(x)\neq 0, \operatorname{tg}(x)\neq -\frac{1}{2}\right\}$ halmaz bármely részintervallumán.

20. $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

21. $\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,x(x-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{28}\,(x-1)^{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{28}(x-1)^{\frac{4}{3}}(4x+3) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

22. $\int \frac{3x+2}{2-x}\,\mathrm{d}x = -3x - 8\ln(|2-x|) + C$ a $(-\infty,2)$ vagy a $(2,+\infty)$ intervallumon.

23. $\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln(|x+1|) + \frac{3}{x+1} + C$ a $(-\infty,-1)$ vagy a $(-1,+\infty)$ intervallumon.

24. $\int \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = x + \ln(|x^2-2x+2|) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

25. $\int \frac{x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln(|x-1|) + \frac{4}{5}\ln(|x+4|) + C$ a $(-\infty,-4)$, a $(-4,1)$ vagy az $(1,+\infty)$ intervallumon.

26. $\int \frac{1-2x}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\ln(|2x-3|) - \frac{3}{5}\ln(|x+1|) + C$ a $(-\infty,-1)$, a $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ vagy a $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ intervallumon.

27. $\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 - x + \frac{8}{3}\ln(|x+2|) + \frac{1}{3}\ln(|x-1|) + C$ a $(-\infty,-2)$, a $(-2,1)$ vagy az $(1,+\infty)$ intervallumon.

28. Ha $a\in\mathbb{R}$, $a\neq s$, akkor $\int e^{-st}e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} + C$, ha pedig $a=s$, akkor $\int e^{-st}e^{at}\,\mathrm{d}t = t + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

29. $\int t^2e^{-st}\,\mathrm{d}t = -e^{-st}\left(\frac{t^2}{s} + \frac{2t}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

30. $\int e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{a^2+s^2}\big(s\sin(at) + a\cos(at)\big) + C$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

10. fejezet

Riemann-integrál, improprius integrál

10.1. Elméleti összefoglaló

10.1. Definíció. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $n \in \mathbb{N}^+$, valamint az $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ számokra teljesül $a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_n := b$, akkor a

$$\Phi := \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

intervallumokból álló halmazt az $[a, b]$ intervallum *felosztás*ának nevezzük.

10.2. Definíció. Ha Φ az $[a, b]$ intervallum felosztása és az f függvény korlátos ezen az intervallumon, akkor az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *alsó*, ill. *felső integrálközelítő összege*

$$s(f, \Phi) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}), \qquad S(f, \Phi) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

10.3. Definíció. Jelölje az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát $\mathcal{F}$. Ha az f függvény korlátos az $[a, b]$ intervallumon, továbbá

$$\sup\{s(f, \Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\} = \inf\{S(f, \Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\},$$

akkor az f függvényt az $[a, b]$ intervallumon *Riemann-integrálható*nak nevezzük.

Egy függvényt Riemann-integrálhatónak nevezünk, ha korlátos zárt intervallumon van értelmezve és az értelmezési tartományán Riemann-integrálható.

A $\sup\{s(f, \Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\} = \inf\{S(f, \Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\}$ számot az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett *Riemann-integrál*jának hívjuk, jele $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

10.4. Definíció. Ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, akkor az f függvény grafikonja, a vízszintes tengely, valamint az $x = a$, ill. $x = b$ egyenletű függőleges egyenesek által határolt síkidom *előjeles területének* mondjuk az $\int_a^b f$ Riemann-integrált.

Megjegyzések. E síkidom vízszintes tengely feletti részét pozitív, e tengely alatti részét negatív előjellel vesszük figyelembe. Ha a függvény nemnegatív, akkor az említett síkidom területét szokás a *függvény grafikonja alatti terület*nek is mondani.

A Riemann-integrált *határozott integrál*nak is hívjuk.

10.5. Definíció. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, akkor $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

10.1. Tétel. *Ha egy korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény folytonos, akkor Riemann-integrálható.*

Ha egy korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény monoton és korlátos, akkor Riemann-integrálható.

10.2. Tétel. *Ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény és $c \in (a, b)$, akkor f az $[a, c]$ és a $[c, b]$ intervallumon is Riemann-integrálható, és* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b g$.

10.3. Tétel. *Ha f és g az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény és $c \in \mathbb{R}$, akkor cf, $f + g$, $f - g$ is az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, továbbá*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f, \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

10.4. Tétel. *Ha f és g az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, valamint $f \leq g$ az $[a, b]$ intervallumon, akkor* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

10.5. Tétel. *Ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, továbbá*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

10.6. Tétel. *Ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény és $m, M \in \mathbb{R}$ olyan számok, melyekre* $m \leq f \leq M$ *az $[a, b]$ intervallumon,* *akkor*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

10.7. Tétel (Newton–Leibniz-tétel)**.** *Ha f az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, és egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon F, akkor* $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Megjegyzés. A Newton–Leibniz-tétel alkalmazásakor gyakran használjuk az $[F]_a^b := F(b) - F(a)$ jelölést.

10.8. Tétel (parciális integrálás)**.** *Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon differenciálható függvény, valamint f' és g' Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

10.9. Tétel (integrálás helyettesítéssel)**.** *Ha f az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, g pedig a $[c,d]$ intervallumon értelmezett differenciálható szigorúan monoton függvény, melyre g' a $[c,d]$ intervallumon Riemann-integrálható és $R(g) = [a,b]$, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.10. Tétel (grafikon ívhossza)**.** *Ha f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, akkor a grafikonjának ívhossza*

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}.$$

10.6. Definíció. Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, valamint $f \leq g$, akkor az

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

halmazt az *első változóra nézve normáltartomány*nak, az

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a,b],\ f(y) \leq x \leq g(y)\big\}$$

halmazt a *második változóra nézve normáltartomány*nak nevezzük. Röviden mindkettőt normáltartománynak hívjuk.

10.11. Tétel (normáltartomány területe)**.** *Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, valamint $f \leq g$, akkor az*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

normáltartomány területe $\int_a^b (g-f)$.

10.7. Definíció. Ha f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett Riemann-integrálható nemnegatív függvény, akkor az f függvény grafikonja és a vízszintes tengely által közrefogott síkidom vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ y^2+z^2 \leq f^2(x)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

halmazt *forgástest*nek, a $\pi \int_a^b f^2$ számot a *forgástest térfogatá*nak nevezzük.

10.8. Definíció. Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonosan differenciálható és nemnegatív, akkor az $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2+z^2 \leq f^2(x)\right\}$ *forgástest palástjának felszíne* $2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$.

10.9. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ és $a < b$. Ha az f valós függvény minden $y \in (a,b)$ esetén az $[a,y]$ intervallumon Riemann-integrálható, továbbá létezik $\lim\limits_{y \to b-0} \int_a^y f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $[a,b)$ intervallumon vett *improprius integrálja konvergens.*

Ha a fenti határérték nem létezik vagy létezik, de nem valós szám, hanem $+\infty$ vagy $-\infty$ valamelyike, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $[a,b)$ intervallumon vett *improprius integrálja divergens.*

Ha a fenti határérték létezik, az

$$\int_a^b f := \lim_{y \to b-0} \int_a^y f$$

értéket az f függvény $[a,b)$ intervallumon vett *improprius integrál*jának nevezzük.

Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ha az f valós függvény minden $y \in (a,b)$ esetén az $[y,b]$ intervallumon Riemann-integrálható, továbbá létezik $\lim\limits_{y \to a+0} \int_y^b f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $(a,b]$ intervallumon vett *improprius integrálja konvergens.*

Ha a fenti határérték nem létezik vagy létezik, de nem valós szám, hanem $+\infty$ vagy $-\infty$ valamelyike, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $(a,b]$ intervallumon vett *improprius integrálja divergens.*

Ha a fenti határérték létezik, azt az f függvény $(a,b]$ intervallumon vett *improprius integrál*jának nevezzük, jele $\int_a^b f$.

10.10. Definíció. Legyen az f valós függvény az (a,b) intervallum bármely korlátos zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Ha valamely $c \in (a,b)$ esetén az $\int_a^c f$ és az $\int_c^b f$ improprius integrál konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény (a,b) intervallumon vett *improprius integrálja konvergens.*

Ha $\int_a^c f$ és $\int_c^b f$ valamelyike divergens, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény (a,b) intervallumon vett *improprius integrálja divergens.*

Ha mindkét fenti improprius integrál létezik, és az összegük értelmezve van, akkor az

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{y\to a+0} \int_y^c f + \lim_{y\to b-0} \int_c^y f$$

értéket az f függvény (a,b) intervallumon vett *improprius integrál*jának nevezzük.

Megjegyzés. A definíció ugyanazt adja, ha c helyett más valós számmal vágjuk ketté az (a,b) intervallumot.

10.2. Kidolgozott feladatok

1. Számolja ki az alábbi Riemann-integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_1^3 (x^2+3x-2)\,\mathrm{d}x$. (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$. (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Megoldás.

(a) $\int_1^3 (x^2+3x-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^3 = \left(9+\frac{27}{2}-6\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right) = \frac{50}{3}$.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$.

(c) $\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\Big(x - \frac{\sin(2x)}{2}\Big)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

(d) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln^3(x)\right]_1^e = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

A **2.**–**5.** feladatban számítsa ki a Riemann-integrált!

2. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\cos(lx)\,\mathrm{d}x,\quad k, l \in \mathbb{N}^+.$

4. $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,\sin(lx)\,\mathrm{d}x,\quad k, l \in \mathbb{N}^+.$

5. $\displaystyle\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

2. Parciális integrálással

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

3. A $\cos(kx)\cos(lx) = \frac{1}{2}\big[\cos([k-l]x) + \cos([k+l]x)\big],\ x \in \mathbb{R}$ azonosság szerint $k \neq l$ esetén

$$\int \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin([k-l]x)}{k-l} + \frac{\sin([k+l]x)}{k+l}\right) + C,\quad x \in \mathbb{R},$$

ezért a Newton–Leibniz-tételt alkalmazva

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin([k-l]x)}{k-l} + \frac{\sin([k+l]x)}{k+l}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ha $k = l$, akkor

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2kx)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\sin(2kx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

4. A $\sin(kx)\sin(lx) = \frac{1}{2}\big[\cos([k-l]x) - \cos([k+l]x)\big],\ x \in \mathbb{R}$ azonosságból $k \neq l$ esetén következik

$$\int \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin([k-l]x)}{k-l} - \frac{\sin([k+l]x)}{k+l}\right) + C,\quad x \in \mathbb{R},$$

így

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin([k-l]x)}{k-l} - \frac{\sin([k+l]x)}{k+l}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

A $k = l$ esetben

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2kx)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin(2kx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

5. Az integrandus páratlan függvény, ezért a nulla pontra szimmetrikus $[-2\pi, 2\pi]$ intervallumot félbevágva az 10.2. Tétel szerint

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2\pi}^{0} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az első tagban helyettesítéssel kapjuk az

$$\int_{-2\pi}^{0} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{0} (-y)\sin^2(-y)\cdot(-1)\,\mathrm{d}y = -\int_{0}^{2\pi} y\sin^2(y)\,\mathrm{d}y$$

összefüggést, ezért a feladatbeli Riemann-integrál nulla.

Megjegyzés. Általában is igaz, hogy ha f páratlan függvény, mely adott $a\in\mathbb{R}^+$ esetén Riemann-integrálható a $[-a, a]$ intervallumon, akkor $\int_{-a}^{a} f = 0$.

6. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén határozza meg az $\int_0^\pi \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált!

Megoldás. Legyen $I_n := \int_0^\pi \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $I_0 = \pi$ és $I_1 = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$. Rekurziót keresünk e sorozatra. Parciálisan integrálva bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén

$$I_n = \int_0^\pi \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

amiből következik $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, majd teljes indukcióval

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0,\ n \in \mathbb{N}^+, \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1.\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Tehát $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$ és

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(2n)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}\pi, & \text{ha } k = 2n,\ n \in \mathbb{N}^+, \\[2ex] \dfrac{(2n)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1} \cdot 2, & \text{ha } k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

7. Mennyi az $f(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $D(f) := \mathbb{R}$ és a $g(x) := x^2$, $D(g) := \mathbb{R}$ függvény grafikonja által határolt korlátos tartomány területe?

Megoldás. Ha a két grafikonnak (x, y) közös pontja, akkor $y = f(x) = g(x)$, így $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x^2$. Ennek megoldásai $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Tehát f és g grafikonja két pontban metszi egymást, és a $[-\frac{1}{2}, 1]$ intervallumon $f \geq g$, ezért a két grafikon által határolt korlátos tartomány területe

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} (f-g) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{9}{16}.$$

8. Egy gömb alakú tartályban az átmérő kétharmadáig áll a víz. A gömb térfogatának mekkora része a víz térfogata?

Megoldás. Tekintsük a gömb sugarát egységnyinek. Ilyen gömböt kapunk, ha az $f(x) := \sqrt{1-x^2}$, $D(f) := [-1, 1]$ nemnegatív függvény grafikonja alatti tartományt a vízszintes tengely körül megforgatjuk. Mivel a gömbben az átmérő kétharmadáig áll a víz, annak térfogata

$$V_{\text{víz}} := \pi \int\limits_{-1}^{\frac{1}{3}} f^2 = \pi \int\limits_{-1}^{\frac{1}{3}} (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{\frac{1}{3}} = \frac{80}{81}\pi.$$

Az egységnyi sugarú gömb térfogata $V_{\text{gömb}} := \frac{4\pi}{3}$, tehát a keresett arány

$$\frac{V_{\text{víz}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{\frac{80}{81}\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{20}{27}.$$

9. Számolja ki az $f(x) := \operatorname{ch}(x)$, $D(f) := [0,2]$ függvény grafikonjának ívhosszát, a grafikonja alatti területet, majd f grafikonjának a vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát és a forgástest palástjának felszínét!

Megoldás. A grafikon ívhossza

$$\int_0^2 \sqrt{1+(f')^2} = \int_0^2 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x = [\operatorname{sh}(x)]_0^2 = \operatorname{sh}(2).$$

A grafikon alatti terület $\int_0^2 f = \int_0^2 \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x = [\operatorname{sh}(x)]_0^2 = \operatorname{sh}(2)$.

A függvény grafikonjának a vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata

$$\pi\int_0^2 f^2 = \pi\int_0^2 \operatorname{ch}^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \pi\left[\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x) + \frac{1}{2}x\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}\big(\operatorname{sh}(4)+4\big).$$

E test palástjának felszíne

$$2\pi\int_0^2 f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi\int_0^2 \operatorname{ch}(x)\cdot\operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\pi}{2}\big(\operatorname{sh}(4)+4\big).$$

10. Határozza meg a következő improprius integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,\mathrm{d}x.$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_5^{6} \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x.$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^{y} e^{-4x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{y\to+\infty} \left[\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^y =$

$= \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\frac{e^{-4y}}{-4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}.$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^y \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}[\mathrm{tg}\,(x)]_0^y = \\ = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\big(\mathrm{tg}\,(y)-0\big) = +\infty.$$

(c) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ = \lim_{y\to+\infty}\left[\tfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\left(\tfrac{x}{3}\right)\right]_0^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\left(\tfrac{y}{3}\right)-0\right) = \tfrac{\pi}{6}.$$

(d) $$\int_5^6 \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to5+0}\int_y^6 \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to5+0}\left[2\sqrt{x-5}\,\right]_y^6 = \\ = \lim_{y\to5+0}\left(2-2\sqrt{y-5}\,\right) = 2.$$

(e) $$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \lim_{y\to-1+0}\int_y^0 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{y\to1-0}\int_0^y \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \lim_{y\to-1+0}[\mathrm{arth}\,(x)]_y^0 + \lim_{y\to1-0}[\mathrm{arth}\,(x)]_0^y = \\ = \lim_{y\to1-0}\mathrm{arth}\,(x) - \lim_{y\to-1+0}\mathrm{arth}\,(x) = +\infty.$$

(f) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \lim_{y\to-\infty}[\mathrm{arctg}\,(x)]_y^0 + \lim_{y\to+\infty}[\mathrm{arctg}\,(x)]_0^y = \\ = \lim_{y\to-\infty}\big(0-\mathrm{arctg}\,(y)\big) + \lim_{y\to+\infty}\big(\mathrm{arctg}\,(y)-0\big) = \pi.$$

11. Mely $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén konvergens az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, az $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, ill. az $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál?

Megoldás. A definíció, majd a Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p-1}, & \text{ha } p>1,\\ \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) = +\infty, & \text{ha } p<1,\\ \lim\limits_{y\to+\infty}[\ln(x)]_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty}\ln(y) = +\infty, & \text{ha } p=1. \end{cases}$$

Tehát az első improprius integrál $p > 1$ esetén konvergens.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{y\to 0+0}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+0}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{y^{1-p}}{1-p}\right) = +\infty, & \text{ha } p > 1, \\ \lim\limits_{y\to 0+0}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+0}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{y^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p < 1, \\ \lim\limits_{y\to 0+0}[\ln(x)]_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+0}(-\ln(y)) = +\infty, & \text{ha } p = 1. \end{cases}$$

A második improprius integrál $0 < p < 1$ esetén konvergens.

Az $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ összefüggés szerint a harmadik improprius integrál semelyik $p \in \mathbb{R}^+$ esetén sem konvergens.

12. Adott $\lambda \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén számítsa ki az $\int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált!

Megoldás. $\int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_0^y \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{y\to+\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^y =$

$$= \lim_{y\to+\infty}(1 - e^{-\lambda y}) = 1.$$

10.3. Megoldandó feladatok

Az **1.–9.** feladatban számolja ki a Riemann-integrált!

1. $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 4x - 1)\,\mathrm{d}x.$ **2.** $\displaystyle\int_{-2}^1 (2x^5 - x + 3)\,\mathrm{d}x.$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x.$ **5.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos(2x)\,\mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2}\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$ **8.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ **9.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$

10. Adott $k, l \in \mathbb{N}^+$ esetén számolja ki az $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált!

11. Mennyi az $f(x) := (e-1)x + 1$, $D(f) := \mathbb{R}$ és a $g(x) := e^x$, $D(g) := \mathbb{R}$ függvény grafikonja által határolt korlátos tartomány területe?

12. Mennyi az $f(x) := \sin^{\frac{3}{2}}(x)$, $D(f) := [0, \pi]$ függvény grafikonjának a vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata?

13. Számolja ki az $f(x) := x^2$, $D(f) := [0,1]$ függvény grafikonjának ívhosszát, a grafikonja alatti területet, valamint f grafikonjának a vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

A **14.–17.** feladatban határozza meg az improprius integrált!

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x}\,\mathrm{d}x$. **15.** $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. **16.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. **17.** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x$.

18. Adott $a, s \in \mathbb{R}^+$ esetén számítsa ki az $\int_a^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t$ improprius integrált!

19. Adott $s \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén számítsa ki az $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-st}\,\mathrm{d}t$ improprius integrált!

20. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ és $s \in \mathbb{R}^+$ esetén határozza meg az $\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t$ improprius integrált!

10.4. Megoldások

1. 12. **2.** $-\frac{21}{2}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{\pi}{4}$. **5.** $\frac{4}{3}$. **6.** 0. **7.** 0.

8. $\frac{\pi}{2}$. **9.** $e^2 - 1 - \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$. **10.** 0. **11.** $\frac{3-e}{2}$. **12.** $\frac{4}{3}\pi$.

13. A grafikon ívhossza $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\operatorname{arsh}(2)$, a grafikon alatti terület $\frac{1}{3}$, a grafikonnak a vízszintes tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata $\frac{\pi}{5}$.

14. $\frac{1}{\ln(2)}$. **15.** -1. **16.** $\frac{\pi}{2}$. **17.** $+\infty$. **18.** $\frac{e^{-sa}}{s}$. **19.** $\frac{2}{s^3}$. **20.** $\frac{n!}{s^{n+1}}$.

11. fejezet

Hatványsorok, Taylor-sorok

11.1. Elméleti összefoglaló

11.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat. Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

részletösszeg-sorozatot jelenti, és a középpontú *hatványsor*nak nevezzük. Az a_n, $n \in \mathbb{N}$ számokat a hatványsor *együtthatói*nak hívjuk.

A hatványsor *konvergenciahalmazá*nak nevezzük azon x valós számok halmazát, melyekre a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ numerikus sor konvergens.

11.1. Tétel (Cauchy–Hadamard-tétel)**.** *Bármely hatványsor konvergenciahalmaza intervallum, mely a végpontjaitól eltekintve a hatványsor középpontjára szimmetrikus.*

A hatványsor az intervallum minden belső pontjában abszolút konvergens.

Megjegyzés. Ezért a hatványsor konvergenciahalmazát másképpen *konvergenciaintervallum*nak mondjuk.

11.2. Definíció. Egy hatványsor *konvergenciasugará*nak nevezzük azt az R nemnegatív valós számot vagy a $+\infty$ értéket, amelyik esetén a hatványsor H konvergenciahalmazára fennáll az $(a-R, a+R) \subset H \subset [a-R, a+R]$ összefüggés.

11.2. Tétel (Cauchy–Hadamard-formula)**.** *Ha a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *hatványsor esetén létezik a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *határérték, akkor a hatványsor konvergenciasugara*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \textit{ha } \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}^+, \\ +\infty, & \textit{ha } \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ 0, & \textit{ha } \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty. \end{cases}$$

Megjegyzés. Minden hatványsor konvergenciasugarát megadja a fenti formula, ha abban mindenhol a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték helyett a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ felső határértéket írjuk.

11.3. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsor *összegfüggvény*ének nevezzük azt az f függvényt, amelyik a hatványsor konvergenciahalmazán van értelmezve, és ott a függvényérték $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

11.3. Tétel (Abel-tétel)**.** *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos függvény.*

Megjegyzés. A 11.4. Tétel szerint az összegfüggvény a konvergenciaintervallum minden belső pontjában differenciálható, ezért folytonos is. Ha a hatványsor a konvergenciaintervallum valamelyik végpontjában konvergens, akkor az Abel-tétel szerint az összegfüggvény abban a végpontban is folytonos.

11.4. Tétel. *Legyen a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *hatványsor konvergenciasugara a pozitív R érték, összegfüggvénye pedig f. Az összegfüggvény a konvergenciahalmaz bármely belső pontjában akárhányszor differenciálható, és a deriváltakat tagonkénti deriválással számolhatjuk ki:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}, \quad x \in (a-R, a+R),$$

és tetszőleges $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in (a-R, a+R).$$

11.1. Következmény. *Ha a pozitív konvergenciasugarú* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *hatványsor összegfüggvénye f, akkor $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.*

11.2. Következmény (az együtthatók egyértelműsége)**.** *Ha két azonos középpontú hatványsor összegfüggvénye egyenlő egy nyílt intervallumon, mely tartalmazza a hatványsorok középpontját, akkor a két hatványsor együtthatói rendre egyenlők.*

11.5. Tétel. *Legyen a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *hatványsor konvergenciasugara a pozitív R érték, összegfüggvénye f. Az összegfüggvény primitív függvényeit az $(a-R, a+R)$ intervallumon tagonként képezve kaphatjuk:*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

11.6. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *hatványsor* f *összegfüggvényének Riemann-integrálja a konvergenciahalmaz bármely* $[\alpha, \beta]$ *korlátos zárt részintervallumán meghatározható tagonkénti integrálással:*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta}.$$

11.4. Definíció. Ha $a \in \mathbb{R}$ és az f függvény akárhányszor differenciálható az a pontban, akkor az f függvény a középpontú *Taylor-sor*ának nevezzük az alábbi hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Megjegyzések. A Taylor-sor részletösszegei a Taylor-polinomok.

Létezik olyan akárhányszor differenciálható függvény, mely a teljes $\mathbb{R}$ halmazon értelmezve van, és a nulla középpontú Taylor-sora minden nullától különböző helyen divergens.

Létezik olyan akárhányszor differenciálható függvény is, pl. $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és $f(0) := 0$, melyre $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, ezért a nulla középpontú Taylor-sorának összegfüggvénye nulla konstans függvény. Az összegfüggvény értéke a középpont kivételével egyetlen x helyen sem egyenlő az $f(x)$ függvényértékkel.

11.7. Tétel (nevezetes nulla középpontú sorfejtések)**.**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + ..., \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \frac{1}{6!}\,x^6 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 + \frac{1}{7!}\,x^7 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \frac{1}{6!}\,x^6 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1) \quad \text{(mértani sor)}.$$

11.2. Kidolgozott feladatok

1. Mi a konvergenciahalmaza az alábbi hatványsoroknak?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$. (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$.

Megoldás.

(a) A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Tehát a konvergenciahalmaza $(-1, 1)$.

(b) A hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$, ezért konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, divergens a $[-1, 1]$ intervallumon kívül. A konvergenciaintervallum két végpontjában külön meg kell vizsgálni a sort: $x = -1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ sor Leibniz-típusú, így konvergens, $x = 1$ esetén pedig $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1^n$ a harmonikus sor, ami divergens. Tehát a konvergenciahalmaz $[-1, 1)$.

(c) A konvergenciasugár $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$, ezért a hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, míg a $[-1, 1]$ intervallumon kívül divergens. Ha $x = -1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a harmonikus sor, ami divergens, $x = 1$ esetén pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor Leibniz-típusú, ezért konvergens. E hatványsor konvergenciahalmaza $(-1, 1]$.

(d) A hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}} = 1$, ezért konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, divergens a $[-1, 1]$ intervallumon kívül. Az $x = 1$ esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sor konvergens, $x = -1$ esetén pedig $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$ abszolút konvergens, így konvergens (vagy Leibniz-típusú, azért konvergens). A hatványsor konvergenciahalmaza $[-1, 1]$.

Megjegyzés. Az iménti négy példa mutatja, hogy a konvergenciahalmaz lehet nyílt, felülről nyílt, alulról nyílt, valamint zárt intervallum is.

2. Mi a konvergenciahalmaza az alábbi hatványsoroknak?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$. (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^n} x^n$. (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$. (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{2n+1} x^n$.

Megoldás.

(a) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (5x)^n$ sor $5x$ kvóciensű mértani sor, mely pontosan akkor konvergens, amikor $|5x| < 1$, azaz $|x| < \frac{1}{5}$. Ezért a konvergenciahalmaz $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

(b) Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^{2n}}{n^n}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$, ezért a konvergenciasugár $+\infty$ és a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

(c) Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^n}{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ alapján a konvergenciasugár $+\infty$, így a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

(d) Az $1 < \frac{3n^2+1}{2n+1} < \frac{3}{2}n$, $n \in \mathbb{N}^+$ egyenlőtlenségek alapján

$$1 < \sqrt[n]{\left|\frac{3n^2+1}{2n+1}\right|} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}}\sqrt[n]{n},$$

majd az utóbbiból a közrefogási elv miatt következik

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3n^2+1}{2n+1}\right|} = 1,$$

tehát a konvergenciasugár $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3n^2+1}{2n+1}\right|}} = 1$. A két végpontban, $x = -1$ és $x = 1$ esetén a numerikus sor tagjai nem tartanak nullához, ezért a hatványsor mindkét végpontban divergens. Így a konvergenciahalmaz $(-1, 1)$.

A **3.**–**7.** feladatban fejtse nulla középpontú hatványsorba a függvényt!

3. $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

4. $f(x) := e^{-2x}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

5. $f(x) := \dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

6. $f(x) := \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

7. $f(x) := \ln(1+x)$, $D(f) := (-1, +\infty)$.

Megoldás.

3. Az $y := -x^2$ jelölés mellett $|x| < 1$ pontosan akkor teljesül, amikor $|y| < 1$, ezért az $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$, $|y| < 1$ sorfejtés az alábbi eredményt adja:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

A hatványsor konvergenciahalmaza $(-1, 1)$.

4. Az $e^y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$, $y \in \mathbb{R}$ sorfejtésből az $y := -2x$, $x \in \mathbb{R}$ helyettesítéssel kapható

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. A nevező két zérushelye -1 és 3, így $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$. A vizsgált függvényt parciális törtekre bontva

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$
$$1 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x + (-3A + B).$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -3A + B &= 1 \end{aligned}\right\},$$

tehát $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$. Mindkét parciális tört sorbafejthető mértani sor segítségével:

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{12 \cdot 3^n} x^n, \quad |x| < 3.$$

Ezért

$$\frac{1}{x^2-2x+3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12 \cdot 3^n} \right) x^n, \ |x| < 1.$$

A hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon. Ha $x = 1$ vagy $x = -1$, akkor a sor tagjai nem tartanak nullához, ezért a sor divergens. Így a határpontokban sem érvényes a sorfejtés, a hatványsor konvergenciahalmaza $(-1, 1)$.

6. Az $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$, $|y| < 1$ sorfejtésből az $y := -x$ helyettesítéssel kapható

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

Ennek mindkét oldalát deriválva, majd a jobb oldalon a deriválást tagonként elvégezve $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapján $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots .$$

A hatványsor $x = 1$ és $x = -1$ esetén divergens, ezért ott nem érvényes a sorfejtés, a konvergenciahalmaz $(-1, 1)$.

7. Az előző megoldás elején kapott $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$ sorfejtés mindkét oldalának primitív függvényeit képezve a $(-1, 1)$ intervallumon, a jobb oldalon ezt tagonként végezve

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + C =$$
$$= \sum_{n^*=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^*-1}}{n^*} x^{n^*} + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ alkalmas állandó. Az utolsó lépésben az $n \in \mathbb{N}$ index helyett az $n^* := n+1 \in \mathbb{N}^+$ új indexszel adtuk meg a hatványsort. A C állandót meghatározhatjuk, ha az $x = 0$ helyen kiszámoljuk a bal és a jobb oldal értékét: $0 = C$.

A hatványsor konvergens az $x = 1$ helyen, ebben a pontban a bal oldali függvény és Abel tétele szerint a jobb oldali hatványsor is folytonos, ezért a sorfejtés ott is érvényes:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

A kapott hatványsor konvergenciasugara 1, ezért a $(-1, 1]$ intervallumon érvényes a sorfejtés.

8. Határozza meg az alábbi hatványsorok összegfüggvényét!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$. (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} x^n$. (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

Megoldás.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$ a mértani sor összege alapján, ha $|3x| < 1$, azaz $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} x^n = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{2}{4-x}$ szintén a mértani sor összege alapján, amikor $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, vagyis $x \in (-4, 4)$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ az e alapú exponenciális függvény sorfejtése szerint.

A **9.–10.** feladatban határozza meg a hatványsor összegfüggvényét!

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

Megoldás.

9. A hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n+1|}} = 1$, konvergenciahalmaza $(-1, 1)$. Legyen az összegfüggvény

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad D(f) := (-1, 1).$$

A primitív függvényeit tagonként képezve a $(-1, 1)$ intervallumon

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} + C = \frac{1}{1-x} - 1 + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. Ebből deriválással kapható

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 + C\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Megjegyzés. Ha $|x| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ sor összegét egy x tényezőt kiemelve is megkaphatjuk, mert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x}$. A két eredmény egyenlő, hiszen $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10. A hatványsor konvergenciahalmazának meghatározására a hányadoskritériumot alkalmazzuk. Tetszőleges $x \neq 0$ valós számra

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} x^{2n+3}}{\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2,$$

ezért $|x| < 1$ esetén a sor konvergens, míg $|x| > 1$ esetén divergens. Ha $x = -1$ vagy $x = 1$, akkor a sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. A hatványsor konvergenciahalmaza $[-1, 1]$.

Legyen az összegfüggvény $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $D(f) := [-1, 1]$. Ezt bármely $x \in (-1, 1)$ esetén tagonként deriválhatjuk, és mértani sort kapunk:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1 - (-x^2)}.$$

A $(-1, 1)$ intervallumon a primitív függvény definíciója és $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ szerint

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + C^*,$$

ahol $C^* \in \mathbb{R}$ alkalmas állandó, melyet az $x = 0$ helyen könnyen kiszámolhatunk: $0 = C^*$.

Abel tétele következtében a kapott egyenlőség az $x = -1$ és az $x = 1$ helyen is teljesül, ezért

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

11. Számolja ki a sorok összegét!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$. (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$.

Megoldás.

(a) Az $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ sorfejtést az $x = 2$ számra alkalmazva a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ eredményre jutunk.

(b) A $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ sorfejtésből $x = \pi$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = -1$ eredményt kapjuk.

(c) A $\operatorname{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ sorfejtésben $x = \sqrt{3}$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{3})$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{3}) - 1$.

12. Adjon meg olyan valós számot, amelyik az $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$ Riemann-integrált legfeljebb 10^{-3} hibával közelíti!

Megoldás. Az e alapú exponenciális függvény nulla középpontú $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, $y \in \mathbb{R}$ sorfejtésében $y := -x^2$ esetén

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A kapott sorfejtést a $[0,1]$ intervallumon tagonként integrálva

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right]_0^1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \ldots .$$

A sor Leibniz-típusú, ezért annak $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!}$, $n \in \mathbb{N}$ részletösszegei felváltva felülről, ill. alulról közelítik a sor összegét, és a közelítés hibája legfeljebb a sorban a részletösszeg utolsó tagját követő tag abszolút értéke:

$$\left| s_n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} \right| \le \frac{1}{(2n+3)(n+1)!},$$

így

$$\left| s_n - \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right| = \left| s_n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} \right| \le 10^{-3}$$

már $n = 4$ esetén teljesül. A Riemann-integrált legfeljebb 10^{-3} hibával közelíti

$$s_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!}.$$

11.3. Megoldandó feladatok

Az **1.–4.** feladatban mi a konvergenciahalmaza a hatványsornak?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, x^n$. **2.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$. **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \sqrt{n}\right) x^n$. **4.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$.

Az **5.–12.** feladatban fejtse nulla középpontú hatványsorba a függvényt!

5. $f(x) := \dfrac{1}{1-4x^2}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. **6.** $f(x) := xe^{2x}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

7. $f(x) := \cos(3x)$, $D(f) := \mathbb{R}$. **8.** $f(x) := \sin(x^2)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

9. $f(x) := \sin^2(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$. **10.** $f(x) := \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $D(f) := \mathbb{R}$.

11. $f(x) := \dfrac{x}{(1+x)^2}$, $D(f) := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **12.** $f(x) := \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $D(f) := \mathbb{R}$.

A **13.–15.** feladatban határozza meg a hatványsor összegfüggvényét!

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$. **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{2^n n!}$. **15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

A **16.–17.** feladatban számolja ki a sor összegét!

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n!}$. **17.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n}$.

18. Adjon meg olyan valós számot, amelyik az $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ Riemann-integrált legfeljebb 10^{-6} hibával közelíti!

11.4. Megoldások

1. $(-1, 1)$. **2.** $(-2, 2)$. **3.** $(-1, 1)$. **4.** $\mathbb{R}$.

5. $\frac{1}{1-4x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. $xe^{2x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

7. $\cos(3x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

8. $\sin(x^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{4n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

9. $\sin^2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

10. $\frac{x^2}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}, \quad x \in (-1, 1)$.

11. $\frac{x}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^n, \quad x \in (-1, 1)$.

12. $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}\, x^{2n+1}, \quad x \in [-2, 2]$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right),\ \ x \in [-2, 2).$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{2^n n!} = e^{\frac{x^4}{2}} - 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\ \ x \in (-1, 1).$ **16.** $\sqrt[3]{e}.$ **17.** $\ln\left(\frac{4}{3}\right).$

18. Az integrandust sorbafejtve, majd tagonként integrálva

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

A Leibniz-típusú sor $s_3 := 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!}$ harmadik részletösszegére érvényes az $\left| s_3 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \right| \le \frac{1}{9 \cdot 9!} < 10^{-6}$ becslés, ezért s_3 megfelelő közelítés.

12. fejezet

Parciális derivált, érintősík

12.1. Elméleti összefoglaló

Az előző fejezetekhez hasonlóan *valós függvénynek* nevezzük az olyan f függvényeket, amelyekre $D(f) \subset \mathbb{R}$ és $R(f) \subset \mathbb{R}$. Használjuk még a következő elnevezéseket is:

- $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ és $R(f) \subset \mathbb{R}$ – f vektor-skalár függvény
- $D(f) \subset \mathbb{R}$ és $R(f) \subset \mathbb{R}^n$ – f vektor értékű függvény
- $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ és $R(f) \subset \mathbb{R}^n$ – f vektormező.

Többváltozós függvények vizsgálatakor félkövér szimbólummal jelöljük a vektorokat, amelyek dimenzióját általában nem írjuk ki. Használjuk az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jelölést.

12.1. Definíció. Ha egy f vektor-skalár függvény esetén rögzített $x_1, \ldots,$ x_{j-1}, $x_{j-1}, \ldots, x_n$-re az $x_j \mapsto f(\mathbf{x})$ hozzárendeléssel adott (valós) függvény deriváltja x_j-ben létezik, akkor azt az f függvény $\mathbf{x}$ pontban vett *j-edik változó szerinti parciális derivált*jának nevezzük.

A fentiekre a

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{x}) \quad \text{vagy} \quad \partial_j f(\mathbf{x}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial}{\partial_{x_j}} f(\mathbf{x})$$

jelöléseket használják. Így a parciális derivált az egyes $\mathbf{x}$ helyeken egy szám, azaz a parciális derivált maga is vektor-skalár függvény. Van értelme tehát többszörös (egymás utáni) parciális deriváltakról beszélni. Megjegyezzük még, hogy a parciális deriváltak értelmezési tartománya minden esetben része az eredeti függvény értelmezési tartományának. Ez utóbbit csak akkor adjuk meg, ha $D(\partial_j f) \neq D(f)$.

A j-edik változó szerinti parciális derivált k-adik változó szerinti parciális deriváltjának $\mathbf{x}$-beli értékére a

$$\partial_{x_k x_j} f(\mathbf{x}) \quad \text{vagy} \quad \partial_{kj} f(\mathbf{x}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial^2}{\partial_{x_k} \partial_{x_j}} f(\mathbf{x})$$

jelölések használatosak.

Gyakran vizsgálunk kétváltozós skalár-vektor függvényeket, amelyek változóját (x, y) jelöli. Az ilyen függvények grafikonját egy felületként képzelhetjük el. A valós függvények deriváltjának fogalmához hasonlóan olyan lineáris függvényt szeretnénk értelmezni (ennek grafikonja egy sík), amellyel egy pont körül jól közelíthető f grafikonja.

12.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az s függvény grafikonja érinti f grafikonját az (x_0, y_0) pontban, ha $s(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, emellett

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + \mathbf{h}) - s((x_0, y_0) + \mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Természetesen merül fel a kérdés, hogy mikor létezik érintősík, és ha létezik, akkor hogyan számítható ki. Erre ad választ a következő állítás.

12.1. Állítás. *Ha az f kétváltozós vektor-skalár függvény $\partial_x f$ és $\partial_y f$ parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (x_0, y_0) pont egy környezetében, akkor létezik egyetlen, az f grafikonját $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érintő s lineáris függvény (amelyet* érintősík*nak nevezünk), és ez a következő hozzárendeléssel adható meg:*

$$s(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (12.1)$$

Gyakran sík egyenletéről beszélünk, és ennek megfelelően (12.1) bal oldalára a z változót írjuk.

12.2. Kidolgozott feladatok

A fentiek alapján az x_j változó szerinti parciális deriváltat úgy számíthatjuk ki az $\mathbf{x}$ pontban, hogy a többi változót állandónak vesszük, és az így kapott függvényt annak (egyetlen) x_j változója szerint deriváljuk.

1. Számítsuk ki az $f(x, y) = 5x - 3y + 2$ hozzárendeléssel adott függvény x szerinti parciális deriváltját!

Megoldás. A fentiek szerint az $x \mapsto 5x - 3y + 2$ hozzárendeléssel definiált függvény deriváltját kell kiszámítanunk (itt y konstansnak tekintendő). Így azt kapjuk, hogy

$$\partial_x(5x - 3y + 2) = 5.$$

2. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy + \cos(x)$ hozzárendeléssel adott függvény y szerinti parciális deriváltját!

Megoldás. A fentiek szerint az $y \mapsto xy + \cos(x)$ hozzárendeléssel definiált függvény deriváltját kell kiszámítanunk (itt x konstansnak tekintendő). Így azt kapjuk, hogy

$$\partial_y(xy + \cos x) = x.$$

3. Számítsuk ki az $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ hozzárendeléssel adott függvény y szerinti parciális deriváltját!

Megoldás. A fentiek szerint az $y \mapsto e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ hozzárendeléssel definiált függvény deriváltját kell kiszámítanunk (itt x-et konstansnak kell tekintenünk). Így azt kapjuk, hogy

$$\partial_y(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \partial_y \frac{x^2+y^2}{2} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot y.$$

4. Számítsuk ki az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = \frac{1}{5}\}$ halmazon értelmezett $f(x,y) = \frac{1}{1-5xy}$ hozzárendeléssel adott függvény x szerinti parciális deriváltját!

Megoldás. Az $x \mapsto \frac{1}{1-5xy}$ hozzárendeléssel definiált függvény deriváltját kell kiszámítanunk (itt y-t konstansnak kell tekintenünk). Azaz kapjuk, hogy

$$\partial_x \frac{1}{1-5xy} = \frac{1}{(1-5xy)^2} \cdot \partial_x(1-5xy) = \frac{-5y}{(1-5xy)^2}.$$

5. Számítsuk ki az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = \frac{3}{2}\}$ halmazon értelmezett $f(x,y) = \frac{x}{2xy-3}$ hozzárendeléssel adott függvény esetén a ∂_{yx} (kétszeres) parciális deriváltját!

Megoldás. A fenti példák alapján

$$\partial_{yx} \frac{x}{2xy-3} = \partial_y \left(\partial_x \frac{x}{2xy-3}\right) = \partial_y \left(\frac{2xy-3-x\cdot 2y}{(2xy-3)^2}\right) =$$
$$= \partial_y \left(\frac{-3}{(2xy-3)^2}\right) = \frac{3}{(2xy-3)^3} \cdot \partial_y(2xy-3) = \frac{6x}{(2xy-3)^3}.$$

A következő példákban érintősíkok egyenletét határozzuk meg a (12.1) formula alkalmazásával.

6. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonját az $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$ pontban érintő sík egyenletét!

Megoldás. A (12.1) formula alkalmazásához az abban szereplő mennyiségeket adjuk meg. $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, továbbá

$$\partial_x f(x,y) = 2x \quad \text{és} \quad \partial_y f(x,y) = 2y,$$

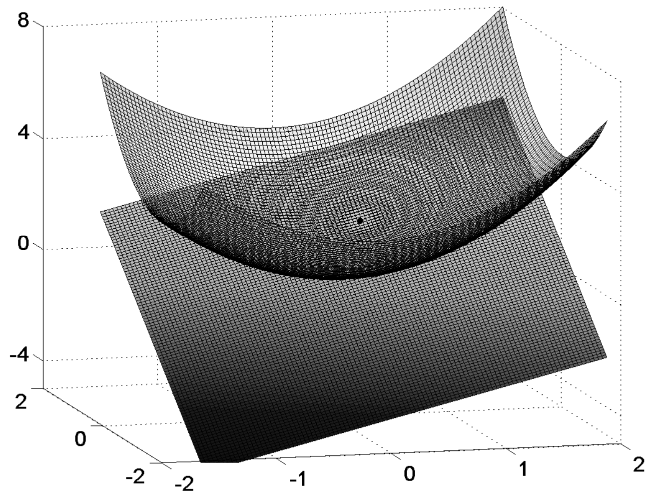
vagyis

$$\partial_x f(x_0,y_0) = 1 \quad \text{és} \quad \partial_y f(x_0,y_0) = 2.$$

A (12.1) formulába helyettesítve tehát

$$f(x_0,y_0)+\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)=\frac{5}{4}+x-\frac{1}{2}+2(y-1),$$

azaz a keresett egyenlet $z = x + 2y - \frac{5}{4}$.



12.1. ábra. Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja és ennek az $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$ pontbeli érintősíkja

Megjegyzés. Az ilyen típusú feladatoknál mindig ellenőrizzük, hogy a harmadik koordináta valóban az $f(x_0, y_0)$ függvényértékkel egyezik meg, továbbá, hogy $(x_0, y_0) \in D(f)$ teljesül!

7. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x^2 - y = 1\}$ halmazon értelmezett $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2+y}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonját az $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ pontban érintő sík egyenletét!

Megoldás. A (12.1) formula alkalmazásához az abban szereplő mennyiségeket adjuk meg. $(x_0, y_0) = (1, 2) \in D(f)$, továbbá

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x}{(1-x^2+y)^2} \quad \text{és} \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{1}{(1-x^2+y)^2},$$

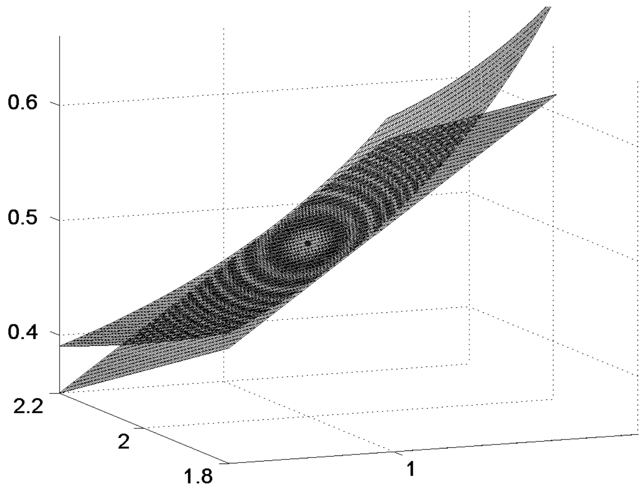
vagyis

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \partial_y f(x_0,y_0) = -\frac{1}{4}.$$

A (12.1) formulába helyettesítve tehát

$$f(x_0,y_0)+\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(y-2),$$

a keresett egyenlet tehát $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y$.



12.2. ábra. Az $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2+y}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja és ennek az $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ pontbeli érintősíkja

8. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 1\}$ halmazon értelmezett $f(x,y) = \frac{xy}{1-xy}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonját a $(0,1,0)$ pontban érintő sík egyenletét!

Megoldás. A (12.1) formula alkalmazásához az abban szereplő mennyiségeket adjuk meg. $(x_0, y_0) = (0,1) \in D(f)$, továbbá

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(1-xy) + xy^2}{(1-xy)^2} \quad \text{és} \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x(1-xy) + x^2 y}{(1-xy)^2},$$

vagyis

$$\partial_x f(x_0,y_0) = 1 \quad \text{és} \quad \partial_y f(x_0,y_0) = 0.$$

A (12.1) formulába helyettesítve tehát

$$f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) = 0 + x + 0,$$

azaz $z = x$ a keresett egyenlet.

9. Adjuk meg az a és b paramétereket úgy, hogy az $f(x,y) = e^{ax+by}$ hozzárendeléssel adott függvény $(0,0,1)$-beli érintősíkjának egyenlete $z = 2x + y + 1$ legyen!

Megoldás. A feladatban adott f függvény esetén $(x_0, y_0) = (0,0)$, továbbá

$$\partial_x f(x,y) = ae^{ax+by} \quad \text{és} \quad \partial_y f(x,y) = be^{ax+by},$$

vagyis

$$\partial_x f(x_0, y_0) = a \quad \text{és} \quad \partial_y f(x_0, y_0) = b.$$

Ezért a $(0, 0, 1)$-beli érintősík egyenlete

$$z = 1 + ax + by,$$

vagyis ha ez azonos $2x + y + 1$-gyel, akkor $a = 2$ és $b = 1$.

10. Adjuk meg az a és b paramétereket úgy, hogy az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : ax+by > -1\}$ halmazon értelmezett $f(x, y) = \ln{(ax + by + 1)}$ hozzárendeléssel adott függvény $(0, 0, 0)$-beli érintősíkjának egyenlete $z = -x + y$ legyen!

Megoldás. A feladatban adott f függvény esetén $(x_0, y_0) = (0, 0)$, továbbá

$$\partial_x f(x, y) = \frac{a}{ax + by + 1} \quad \text{és} \quad \partial_y f(x, y) = \frac{b}{ax + by + 1},$$

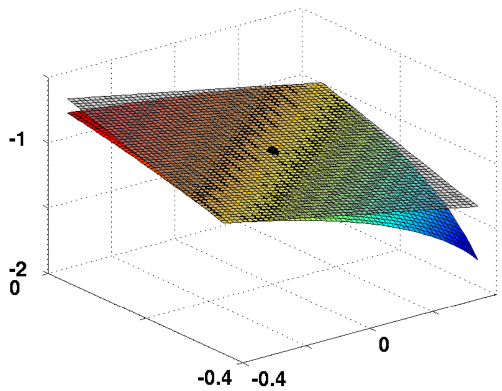
vagyis

$$\partial_x f(x_0, y_0) = a \quad \text{és} \quad \partial_y f(x_0, y_0) = b.$$

Ezért a $(0, 0, 0)$-beli érintősík egyenlete

$$z = ax + by,$$

vagyis ha ez azonos $-x + y$-nal, akkor $a = -1$ és $b = 1$.



12.3. ábra. A 10. feladat megoldása: az $f(x, y) = \ln(-x + y + 1)$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja és ennek a $(0, 0, 0)$ pontbeli érintősíkja

11. Adjuk meg az a és b paramétereket úgy, hogy az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : ax+by > -1\}$ halmazon értelmezett $f(x, y) = \ln(ax + by + 1)$ hozzárendeléssel adott függvény $(0,0,0)$-beli érintősíkja azonos legyen az $g(x,y) = \sin(x-y)$ hozzárendeléssel adott függvény $(0,0,0)$-beli érintősíkjával!

Megoldás. Az előző feladatban kiszámoltuk, hogy az f függvény $(0,0,0)$-beli érintősíkjának egyenlete

$$z = ax + by$$

alakú. A g függvény esetén ugyanúgy $(x_0, y_0) = (0,0)$, továbbá

$$\partial_x g(x,y) = \cos(x-y) \quad \text{és} \quad \partial_y g(x,y) = -\cos(x-y),$$

vagyis

$$\partial_x g(x_0,y_0) = 1 \quad \text{és} \quad \partial_y g(x_0,y_0) = -1.$$

Ezért a g függvény $(0,0,0)$-beli érintősíkjának egyenlete

$$z = x - y,$$

vagyis ha ez azonos $z = ax + by$-nal, akkor $a = 1$ és $b = -1$.

12.3. Megoldandó feladatok

Ahogy az előző fejezetekben is, a megoldandó feladatoknál rendszerint nem adjuk meg külön az egyes függvények értelmezési tartományát. Ezen azt a legbővebb halmazt értjük, ahol az egyes hozzárendeléseket értelmezzük.

Az **1–6.** feladatokban számítsuk ki az egyes parciális deriváltakat, ahol az egyszerűség kedvéért a megfelelő függvények helyett azok hozzárendelési szabályát adjuk meg!

1. $\partial_y[y\cos(x-y)]$. **2.** $\partial_y[\operatorname{sh}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)]$. **3.** $\partial_x \frac{\sin(x-2y)}{x^2y}$.

4. $\partial_x \frac{x}{x^2+y^2}$. **5.** $\partial_z \frac{\cos(xyz)}{1+x-z}$. **6.** $\partial_z[xz^2 + e^{\frac{xy}{z}}]$.

A **7–10.** feladatokban számítsuk ki a felírt többszörös parciális deriváltakat, ahol az egyszerűség kedvéért a megfelelő függvények helyett azok hozzárendelési szabályát adjuk meg!

7. $\partial_{xx}[y\sin(x-y)]$. **8.** $\partial_{yy}[y\cos(x-y)]$. **9.** $\partial_{xy}e^{xy}$. **10.** $\partial_{xyz}[xz^2 + \frac{x}{z}e^{\frac{xy}{z}}]$.

A **11–16.** feladatokban határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel értelmezett f függvények grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontokban érintő síkok egyenletét!

11. $f(x,y) = 1 - 2x + 4y$.
(a) $(x_0,y_0) = (-5,7)$, (b) $(x_0,y_0) = (-1,3)$, (c) $(x_0,y_0) = (0.3, 2.1)$.

12. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$.

(a) $(x_0, y_0) = (1,1)$, (b) $(x_0, y_0) = (0,0)$, (c) $(x_0, y_0) = (-1,1)$.

13. $f(x,y) = y\sin(x-y)$.

(a) $(x_0, y_0) = (0,\pi)$, (b) $(x_0, y_0) = (\pi,0)$, (c) $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

14. $f(x,y) = ye^{xy}$.

(a) $(x_0, y_0) = (0,0)$, (b) $(x_0, y_0) = (0,1)$, (c) $(x_0, y_0) = (1,0)$.

15. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(a) $(x_0, y_0) = (1,0)$, (b) $(x_0, y_0) = (3,4)$, (c) $(x_0, y_0) = (0,-2)$.

16. $f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{\sin(x+y)}$.

(a) $(x_0, y_0) = (0,\pi)$, (b) $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, (c) $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

12.4. Megoldások

Minden esetben a megfelelő hozzárendelési szabályt adjuk meg.

Parciális deriváltak kiszámítása:

1. $(x,y) \mapsto \cos(x-y) + y\sin(x-y)$.

2. $(x,y) \mapsto \mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}(x-y) - \mathrm{sh}(x+y)\mathrm{sh}(x-y)$.

3. $(x,y) \mapsto \frac{x\cos(x-2y) - 2\sin(x-2y)}{x^3 y}$.

4. $(x,y) \mapsto \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

5. $(x,y,z) \mapsto \frac{xy(1+x-z)\sin(xzy) + \cos(xzy)}{(1+x-z)^2}$.

6. $(x,y,z) \mapsto 2xz - \frac{xy}{z^2} e^{\frac{xy}{z}}$.

Többszörös parciális deriváltak kiszámítása:

7. $(x,y) \mapsto -y\sin(x-y)$. **8.** $(x,y) \mapsto 2\sin(x-y) - y\cos(x-y)$.

9. $(x,y) \mapsto e^{xy}(xy+1)$. **10.** $(x,y,z) \mapsto -e^{\frac{xy}{z}}\left(\frac{4x}{z^3} + \frac{5x^2y}{z^4} + \frac{x^3y^2}{z^5}\right)$.

Függvénygrafikonok érintősíkjának kiszámítása:

11. (a) $z = -2x + 4y + 1$. (b) $z = -2x + 4y + 1$. (c) $z = -2x + 4y + 1$.

12. (a) $z = 2x - 4y + 1.$ (b) $z = 0.$ (c) $z = -2x - 4y + 1.$

13. (a) $z = -\pi x + \pi y - \pi^2.$ (b) $z = 0.$ (c) $z = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y.$

14. (a) $z = y.$ (b) $z = x + y.$ (c) $z = y.$

15. (a) $z = 1.$ (b) $z = \frac{16}{125}x - \frac{12}{125}y + \frac{3}{5}.$ (c) $z = \frac{1}{2}x.$

16. (a) Nem értelmes, mivel $(0, \pi) \notin D(f)$.
(b) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + y + 2 - \frac{\pi}{2}\right).$
(c) $z = y + 1.$

13. fejezet

Vektorszámítási alapismeretek

13.1. Elméleti összefoglaló

Különböző, parciális deriváltakból származtatott mennyiségeket definiálunk, amelyeknek a természettudományos alkalmazásokban fontos szerepük van. Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért az $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat sorvektorként jelöljük.

13.1. Definíció. Legyen f egy vektor-skalár függvény! Ekkor a

$$D_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \partial_1 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}) \text{ léteznek}\}$$

halmazon az

$$\mathbf{x} \mapsto (\partial_1 f(\mathbf{x}), \partial_2 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}))$$

hozzárendeléssel definiált függvényt f *gradiensfüggvényé*nek nevezzük.
Jelölése: $\operatorname{grad} f$ vagy ∇f.

Megjegyzés. $\nabla f(x)$ azonosítható az f függvény x-beli deriváltjával, ha az létezik.

13.2. Definíció. Adott g vektormező esetén jelölje $g_1, g_2, \dots, g_n$ ennek koordinátafüggvényeit, azaz azokat az vektor-skalár függvényeket, amelyekre $g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$. Ekkor a

$$D_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \partial_1 g_1(\mathbf{x}), \dots, \partial_n g_n(\mathbf{x}) \text{ léteznek}\}$$

halmazon az

$$\mathbf{x} \mapsto \partial_1 g_1(\mathbf{x}) + \partial_2 g_2(\mathbf{x}) + \dots + \partial_n g_n(\mathbf{x})$$

hozzárendeléssel definiált függvényt g *divergenciafüggvényé*nek nevezzük.
Jelölése: $\operatorname{div} g$ vagy $\nabla \cdot g$.

Megjegyzés. Amennyiben g egy áramlás fluxusának sűrűségét adja meg, akkor $\operatorname{div} g$ azonosítható az áramlásban található forrássűrűséggel. Gyakran forrásmentes egy áramlási mező; ekkor divergenciája nulla.

13.3. Definíció. Adott h vektormező esetén, amelyre $D(h), R(h) \subset \mathbb{R}^3$ jelölje h_1, h_2, h_3 a h függvény koordinátafüggvényeit! Ekkor a

$$D_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \partial_2 h_3(\mathbf{x}), \partial_3 h_2(\mathbf{x}), \partial_3 h_1(\mathbf{x}), \partial_1 h_3(\mathbf{x}), \partial_1 h_2(\mathbf{x}), \partial_2 h_1(\mathbf{x}) \text{ léteznek}\}$$

halmazon az

$$\mathbf{x} \to (\partial_2 h_3(\mathbf{x}) - \partial_3 h_2(\mathbf{x}), \partial_3 h_1(\mathbf{x}) - \partial_1 h_3(\mathbf{x}), \partial_1 h_2(\mathbf{x}) - \partial_2 h_1(\mathbf{x}))$$

hozzárendeléssel definiált függvényt h *rotációfüggvényé*nek nevezzük.

Jelölése: $\operatorname{rot} h$ vagy $\nabla \times h$.

Megjegyzés. Az angol irodalomban gyakran a $\operatorname{curl} h$ jelölést alkalmazzák.

13.2. Kidolgozott feladatok

A fent bevezetett mennyiségekre vonatkozó azonosságokat igazolunk.

1. Igazoljuk, hogy az u vektor-skalár függvényre az

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \partial_{ij} g(\mathbf{x})) \text{ léteznek minden } i, j\text{-re}\}$$

halmazon

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \partial_{11} u + \partial_{22} u + \cdots + \partial_{nn} u,$$

teljesül!

Megoldás. Definíció szerint az egyenlőség bal oldalát először a gradiens, majd a divergencia definíciója alapján alakítva nyerjük, hogy

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot (\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_n u) = \partial_1(\partial_1 u) + \partial_2(\partial_2 u) + \cdots + \partial_n(\partial_n u)$$

ami valóban ugyanaz, mint a feladatban szereplő jobb oldal.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges u vektormezőre az

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \partial_{ij} u_k(\mathbf{x})) \text{ léteznek minden } i, j, k\text{-ra}\}$$

halmazon

$$\nabla \cdot (\nabla \times u) = 0$$

teljesül!

Megoldás. Definíció szerint az egyenlőség bal oldalát először a rotáció, majd a divergencia definíciója alapján alakítva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times u) &= \nabla \cdot (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = \\ &= \partial_{12} u_3 - \partial_{13} u_2 + \partial_{23} u_1 - \partial_{21} u_3 + \partial_{31} u_2 - \partial_{32} u_1,\end{aligned}$$

ami a Young-tétel miatt valóban nulla.

A **3–5.** feladatokban számítsuk ki ∇u értékét az egyes hozzárendeléssel megadott u függvények esetén!

3. $u(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$. **4.** $u(x, y, z) = \frac{4xy}{z}$. **5.** $u(x, y) = xy \sin(x - y)$.

Megoldások.

3. Mivel

$$\partial_1 u(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2} \quad \text{és} \quad \partial_2 u(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2},$$

ezért a gradiens definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla u(x,y) = (-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2}).$$

4. Mivel

$$\partial_1 u(x,y,z) = \frac{4y}{z}, \quad \partial_2 u(x,y,z) = \frac{4x}{z} \quad \text{és} \quad \partial_3 u(x,y,z) = -\frac{8xy}{z^2},$$

ezért a gradiens definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{4y}{z}, \frac{4x}{z}, -\frac{8xy}{z^2}\right),$$

ahol a definícióban említett D_0 halmaz a következő: $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

5. Mivel

$$\partial_1 u(x,y) = y\sin(x-y) + xy\cos(x-y)$$

és

$$\partial_2 u(x,y) = x\sin(x-y) - xy\cos(x-y),$$

ezért a gradiens definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla u(x,y) = (y\sin(x-y) + xy\cos(x-y), x\sin(x-y) - xy\cos(x-y)).$$

A **6–11.** feladatokban számítsuk ki $\nabla \cdot u(x,y,z)$ értékét a megadott u függvények esetén!

6. $u(x,y) = (x+y, x-y)$.

7. $u(x,y) = (\sin(xy), \sin(xy))$.

8. $u(x,y) = (y\sqrt{x^2+y^2}, -x\sqrt{x^2+y^2})$.

9. $u(x,y,z) = (x, xy, xyz)$.

10. $u(x,y,z) = (x^2-x^2y, z-2xy, xyz)$.

11. $u(x,y,z) = \nabla xyz$.

Megoldások.

6. A divergencia definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla \cdot u(x,y) = \partial_1[x+y] + \partial_2[x-y] = 1 - 1 = 0.$$

7. A divergencia definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\nabla\cdot u(x,y) &= \partial_1[\sin(xy)]+\partial_2[\sin(xy)] = \\ &= y\cos(xy)+x\cos(xy) = (x+y)\cos(xy).\end{aligned}$$

8. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy

$$\nabla\cdot u(x,y) = \partial_1[y\sqrt{x^2+y^2}]+\partial_2[-x\sqrt{x^2+y^2}] = \frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

ahol a definícióban említett D_0 halmaz: $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.

9. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy

$$\nabla\cdot u(x,y,z) = \partial_1[x]+\partial_2[xy]+\partial_3[xyz] = 1+x+xy.$$

10. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy

$$\begin{aligned}\nabla\cdot u(x,y,z) &= \partial_1[x^2-x^2y]+\partial_2[z-2xy]+\partial_3[2xyz] = \\ &= 2x-2xy-2x+xy = -xy.\end{aligned}$$

11. Az első feladat eredménye alapján

$$\nabla\cdot(\nabla xyz) = \partial_{11}xyz+\partial_{22}xyz+\partial_{33}xyz = 0.$$

A **12–15.** feladatokban számítsuk ki $\nabla\times u(x,y,z)$ értékét a megadott u függvények esetén!

12. $f(x,y,z) = (y,z,x)$. **13.** $f(x,y,z) = (x,z,y)$.

14. $u(x,y,z) = (x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy)$. **15.** $u(x,y,z) = (x^2-y^2, z-2xy, xyz)$.

Megoldások.

12. A rotáció definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla\times u(x,y,z) = (\partial_2x-\partial_3z, \partial_3y-\partial_1x, \partial_1y-\partial_2z) = (-1,-1,-1).$$

13. A rotáció definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\nabla\times u(x,y,z) = (\partial_2y-\partial_3z, \partial_3x-\partial_1y, \partial_1x-\partial_2z) = (0,0,0).$$

14. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\nabla\times u(x,y,z) &= \Big(\partial_2[z^2-xy]-\partial_3[y^2-zx], \partial_3[x^2-yz]- \\ &\qquad -\partial_1[z^2-xy], \partial_1[y^2-zx]-\partial_2[x^2-yz]\Big) = \\ &= (-x+x, -y+y, -z+z) = (0,0,0).\end{aligned}$$

15. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\nabla\times u(x,y,z) = \\ &= \big(\partial_2[xyz]-\partial_3[z-2xy], \partial_3[x^2-y^2]-\partial_1[xyz], \partial_1[z-2xy]-\partial_2[x^2-y^2]\big) = \\ &= (xz-1, -yz, 0).\end{aligned}$$

13.3. Megoldandó feladatok

Az **1–4.** feladatokban számítsuk ki az egyes hozzárendelésekkel megadott f függvények gradiensét a lehető legbővebb halmazon, ahol az értelmezett! Adjuk is meg minden esetben a D_0 halmazt!

1. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. $f(x,y) = xy\ln(x)$.

3. $f(x,y,z) = xyz$.

4. $f(x,y,z) = \frac{x}{y^2+z^2}$.

Az **5–10.** feladatokban számítsuk ki az egyes hozzárendelésekkel megadott f függvények divergenciáját! Adjuk meg minden esetben a D_0 halmazt!

5. $f(x,y,z) = (1,x,z)$.

6. $f(x,y,z) = (x\sin(x), \cos(y), xz)$.

7. $f(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$.

8. $f(x,y) = (ye^{x^2-y^2}, xe^{x^2-y^2})$.

9. $f(x,y,z) = (xy, -xy, z)$.

10. $f(x,y,z) = (\frac{x}{y^2}, \frac{z}{y}, \frac{z^2}{2y^2}+2)$.

A **11–14.** feladatokban számítsuk ki az egyes hozzárendelésekkel megadott f függvények rotációját! Adjuk meg minden esetben a D_0 halmazt!

11. $f(x,y,z) = (yz, zx, xy)$.

12. $f(x,y,z) = (\frac{y}{z}, \frac{y}{z}, y^2)$.

13. $f(x,y,z) = (yz, zx, y)$.

14. $f(x,y,z) = (\frac{y}{z}, \frac{y}{z}, y - \frac{xy}{z^2})$.

További feladatok:

15. Igazoljuk, hogy $\nabla \cdot (\nabla \times u) = 0$, ha u minden koordinátafüggvényének összes másodrendű parciális deriváltja létezik!

16. Adjuk meg az $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és a $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó $\nabla \cdot (vu)$ mennyiség egy ekvivalens alakját a

$$D_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \partial_1 u(\mathbf{x}), \partial_1 v(\mathbf{x}), \ldots, \partial_n u(\mathbf{x}), \partial_n v(\mathbf{x}) \text{ léteznek}\}$$

halmazon!

13.4. Megoldások

Gradiensek kiszámítása:

1. $\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)})^{\frac{3}{2}}\right)$, $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. $f(x,y) = (y\ln(x+y), x\ln(x))$, $D_0 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

3. $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $D_0 = \mathbb{R}^2$.

4. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{y^2+z^2}, \frac{2y}{y^2+z^2}, \frac{2z}{y^2+z^2}\right)$, $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Divergenciák kiszámítása:

5. $1, \ D_0 = \mathbb{R}^2$.

6. $x\cos(x) + \sin(x), \ D_0 = \mathbb{R}^3$.

7. 0, ha $(x, y), \ D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

8. $0, \ D_0 = \mathbb{R}^2$.

9. $y - x + 1, \ D_0 = \mathbb{R}^3$.

10. $\frac{1}{y^2}, \ D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Rotációk kiszámítása:

11. $(0,0,0), \ D_0 = \mathbb{R}^3$.

12. $(2y + \frac{y}{z^2}, -\frac{y}{z^2}, -\frac{1}{z}), \ D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

13. $(1 - x, y, 0), \ D_0 = \mathbb{R}^3$.

14. $(1 + \frac{y-x}{z^2}, 0, -\frac{1}{z}), \ D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

További feladatok:

15. $\partial_1(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) + \partial_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) + \partial_3(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0$.

16. $(\nabla v) \cdot u + v\nabla \cdot u$.

14. fejezet

Többváltozós függvények szélsőérték-vizsgálata

14.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben vektor-skalár függvények szélsőértékeinek kiszámításával foglalkozunk. Csak olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek értelmezési tartományuk minden belső pontjában kétszer deriválhatók.

14.1. Állítás. *Az f vektor-skalár függvénynek olyan $\mathbf{x}$ pontokban lehet lokális szélsőértéke, ahol*

$$\partial_1 f(\mathbf{x}) = \partial_2 f(\mathbf{x}) = \cdots = \partial_n f(\mathbf{x}) = 0$$

teljesül, azaz $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ pontokat f kritikus vagy stacionárius pontjainak *nevezzük.*

14.2. Állítás. *Ha az $\mathbf{x}$ kritikus pontban a*

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(\mathbf{x}) & \partial_{21} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{n1} f(\mathbf{x}) \\ \partial_{12} f(\mathbf{x}) & \partial_{22} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{n2} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{1n} f(\mathbf{x}) & \partial_{2n} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{nn} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

ún. Hesse-féle mátrix

- *negatív definit, akkor f-nek $\mathbf{x}$-ben szigorú lokális maximuma van,*
- *pozitív definit, akkor f-nek $\mathbf{x}$-ben szigorú lokális minimuma van,*
- *indefinit, akkor f-nek $\mathbf{x}$-ben nem lehet szélsőértéke.*

Megjegyzések. Elképzelhető az is, hogy $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ pozitív vagy negatív szemidefinit. Csak ebből az adatból általában semmire nem tudunk következtetni.

A továbbiakban nem jelezzük, hogy egy szélsőérték szigorú értelemben is szélsőérték.

14.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 1$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = 4x + 12 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = 6y - 6.$$

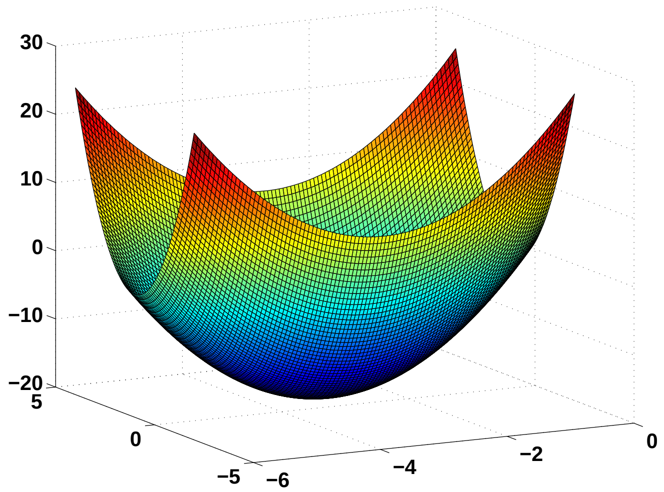
Vagyis mindkét parciális deriváltak pontosan akkor nulla, ha $x_0 = -3$ és $y_0 = 1$, tehát az egyetlen kritikus pont, ahol szélsőérték lehet, az $(x_0, y_0) = (-3, 1)$.
A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x,y) = 4,\ \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 0 \text{ és } \partial_{22} f(x,y) = 6.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix minden (x,y) pontban a következő alakú:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix diagonális, így sajátértékei a diagonálisban levő elemek: 4 és 6. Vagyis az $(x,y) = (-3,1)$ kritikus pontban (is) $\nabla^2 f$ pozitív definit, így a vizsgált f függvénynek itt lokális minimuma van, a minimum értéke pedig $f(-3,1) = -20$.



14.1. ábra. Az $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 1$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja

2. Határozzuk meg az $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + x + y$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = -x^2 + 1 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = -y + 1.$$

Vagyis abból a feltételből, hogy a parciális deriváltak nullák, azt kapjuk (a második egyenlet alapján), hogy $y = 1$, és az első egyenlet szerint $x = 1$ vagy $x = -1$. Azaz a kritikus pontok: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ és $(x_2, y_2) = (-1, 1)$. Ezeken a helyeken lehet szélsőértéke f-nek.
A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x,y) = -2x,\ \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x,y) = -1.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x, y) pontban a következő alakú:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tehát a kritikus pontokban

$$\nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Az első esetben, mivel a mátrix diagonális, közvetlenül kapjuk, hogy a sajátértékek 2 és -1, ezért a mátrix indefinit, tehát $(-1, 1)$-ben nincs szélsőérték.
- A második esetben hasonlóan kapjuk, hogy a sajátértékek -2 és -1, tehát $(1, 1)$ lokális maximumhely. Itt $f(1, 1) = \frac{7}{6}$.

3. Határozzuk meg az $f(x, y) = -2x^3 + y^2 + 6xy + 3$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = -6x^2 + 6y \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y + 6x.$$

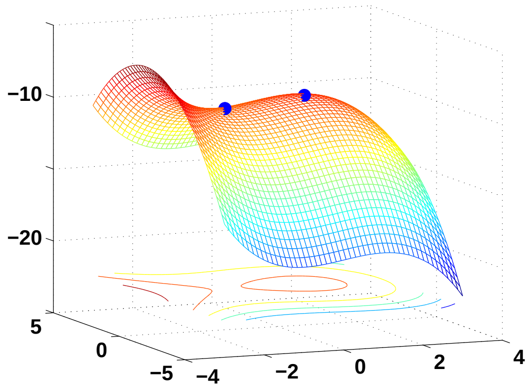
Vagyis az a feltétel, hogy a parciális deriváltak nullák, a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} 0 = -6x^2 + 6y, \\ 0 = 2y + 6x. \end{cases}$$

Ennek megoldásához az első egyenletből kapott $y = x^2$ feltételt helyettesítjük be a második egyenletbe:

$$0 = 2x^2 + 6x = 2x(x + 3),$$

azaz a kritikus pontok: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ és $(x_2, y_2) = (-3, 9)$. Ezeken a helyeken lehet szélsőértéke f-nek.



14.2. ábra. Az $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + x + y$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja néhány szintvonallal és a $(-1, 1)$ és az $(1, 1)$ kritikus pontokban felvett értékekkel

A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x, y) = -12x, \quad \partial_{12} f(x, y) = \partial_{21} f(x, y) = 6 \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x, y) = 2.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x, y) pontban a következő alakú:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -12x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

tehát a kritikus pontokban

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \nabla^2 f(-3, 9) = \begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Az első esetben a sajátértékeket a

  $$0 = -\lambda(2 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 36$$

  egyenlet megoldásaiként kapjuk, azaz

  $$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 144}}{2},$$

  amelyek közül az egyik pozitív, a másik pedig negatív. Így a $(0, 0)$ kritikus pontban f-nek nem lehet szélsőértéke.

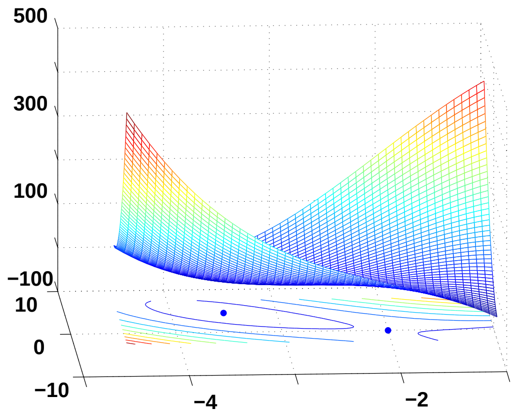
- A második esetben a sajátértékeket a

$$0 = (36 - \lambda)(2 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 38\lambda + 36$$

egyenlet megoldásaiként kapjuk, azaz

$$\lambda_{1,2} = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 144}}{2},$$

amelyek mindketten pozitívak. Így a $(-3, 9)$ kritikus pontban f-nek minimuma van, f minimális értéke pedig $(-3, 9) = -24$.



14.3. ábra. Az $f(x, y) = -2x^3 + y^2 + 6xy + 3$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja néhány szintvonallal és a kritikus pontok vetületeivel

4. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f(x, y) = (x-1)y + \frac{1}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x, y) = y - \frac{1}{x^2} \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x, y) = x - 1.$$

Vagyis az a feltétel, hogy a parciális deriváltak nullák, azt adja (a második egyenlőség alapján), hogy $x = 1$, valamint az első egyenletből $y = 1$ adódik. Tehát az egyetlen kritikus pont: $(1, 1)$. Ezen a helyen lehet szélsőértéke f-nek.

A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{12} f(x, y) = \partial_{21} f(x, y) = 1 \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x, y) = 0.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x, y) pontban a következő alakú:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tehát a kritikus pontban

$$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

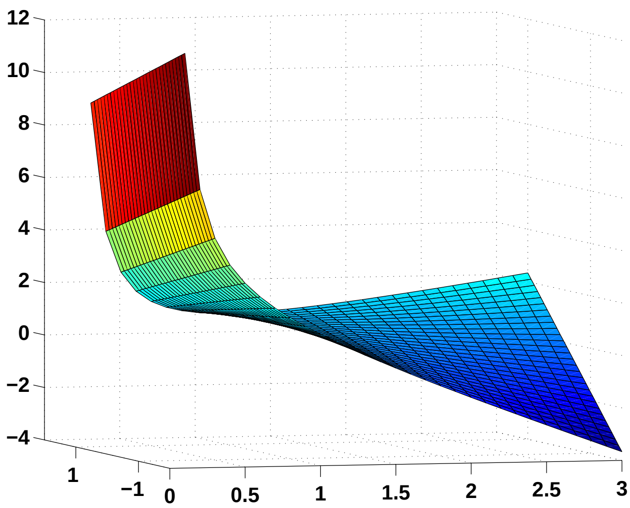
Vagyis a megfelelő sajátértékeket a

$$0 = -\lambda(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

egyenlet megoldásaiként kapjuk, azaz

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2},$$

amelyek közül az egyik pozitív, a másik pedig negatív. Így az $(1, 1)$ kritikus pontban f-nek nem lehet szélsőértéke.



14.4. ábra. Az $f(x, y) = (x - 1)y + \frac{1}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja

5. Határozzuk meg az $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x}$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = (2x - x^2 + y^2)e^{-x} \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = -2ye^{-x}.$$

Vagyis az a feltétel, hogy a parciális deriváltak nullák, azt adja (a második egyenlőség alapján), hogy $y = 0$, valamint az első egyenletből ekkor $x_1 = 0, x_2 = 2$ adódik. Tehát a kritikus pontok: $(0,0)$ és $(2,0)$ Ezeken a helyeken lehet szélsőértéke f-nek.
A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x,y) = (-2x + x^2 - y^2 + 2 - 2x)e^{-x},$$
$$\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 2ye^{-x} \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x,y) = -2e^{-x}.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x,y) pontban a következő alakú:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 + 2 - 4x)e^{-x} & 2ye^{-x} \\ 2ye^{-x} & -2e^{-x} \end{pmatrix},$$

tehát az $(x_0, y_0) = (0,0)$ kritikus pontban

$$\nabla^2 f(0,0) = e^0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vagyis a megfelelő sajátértékek 2 és -2, tehát ebben a kritikus pontban nincs szélsőérték. Hasonlóan, az $(x_0, y_0) = (2,0)$ kritikus pontban

$$\nabla^2 f(2,0) = e^{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vagyis a megfelelő sajátértékek -2 és -2, tehát ebben a kritikus pontban lokális maximum van, amelynek értéke $f(2,0) = 4e^{-2}$.

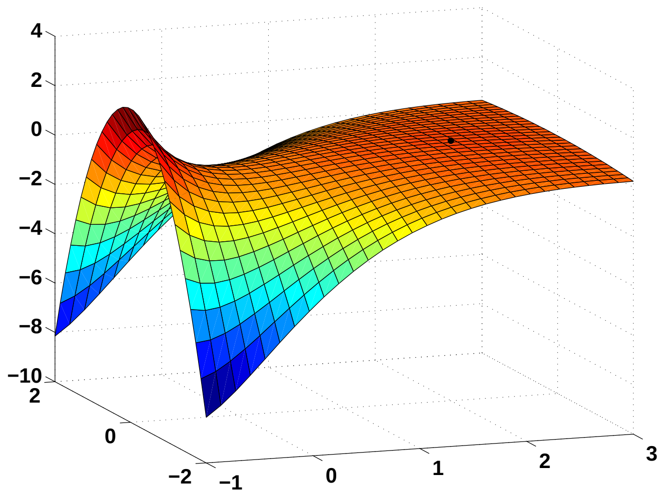
6. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 - 12x + y^3 + 3y^2 - 9y$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 12 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = 3y^2 + 6y - 9.$$

Vagyis az a feltétel, hogy a parciális deriváltak nullák, azt adja (az első egyenlőség alapján), hogy $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$, valamint a második egyenletből mindkét esetben $y_1 = 1$ és $y_2 = -3$ adódik. Tehát a kritikus pontok: $(2,1), (2,-3), (-2,1)$ és $(-2,-3)$. Ezeken a helyeken lehet szélsőértéke f-nek.
A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x,y) = 6x, \quad \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x,y) = 6y + 6.$$



14.5. ábra. Az $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja a $(2, 0)$ helyen felvett maximummal

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x, y) pontban a következő alakú:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y + 6 \end{pmatrix},$$

tehát a kritikus pontokban (a fenti sorrendben) $\nabla^2 f$ értéke a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Vagyis a megfelelő sajátértékek a főátlóban levő számok, ezért a $(2, 1)$ pontban f-nek lokális minimuma van és $f(2, 1) = -21$, továbbá a $(-2, -3)$ pontban f-nek lokális maximuma van és $f(2, 1) = 43$. A másik két kritikus pontban a $\nabla^2 f$ mátrix indefinit, emiatt ott nem lehet szélsőértéke az f függvénynek.

7. Határozzuk meg az $f(x, y) = e^{x+y} - x - y$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_1 f(x, y) = e^{x+y} - 1 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x, y) = e^{x+y} - 1.$$

Vagyis az a feltétel, hogy a parciális deriváltak nullák, azt adja, hogy $x + y = 0$. Így az egyenletnek végtelen sok kritikus pontja van, hiszen minden $(x, -x)$ alakú pont az lesz.

A $\nabla^2 f$ mátrix meghatározásához kiszámítjuk még a következőket:

$$\partial_{11} f(x,y) = e^{x+y} \quad \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = e^{x+y} \text{ és } \partial_{22} f(x,y) = e^{x+y}.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\nabla^2 f$ mátrix az (x, y) pontban a következő alakú:

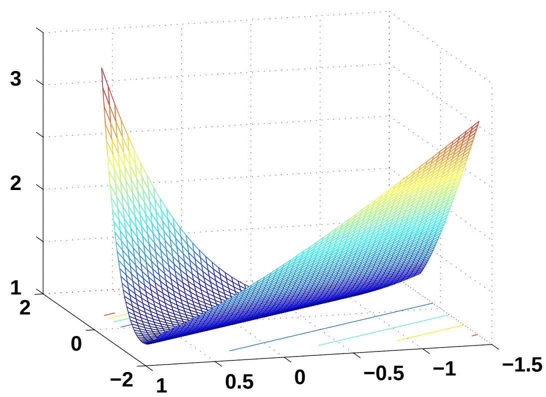
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Mivel ennek a mátrixnak mindig van nulla sajátértéke, nem tudjuk a fenti módszerrel eldönteni, hogy milyen esetben lesz szélsőértéke.

Megjegyzés. Más módszerrel ez a kérdés eldönthető. Vezessük be a $z = x + y$ mennyiséget, és vegyük észre, hogy f értéke csak ettől függ, azaz elegendő a szélsőérték-vizsgálathoz a $z \mapsto g(z) = e^z - z$ függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit meghatározni.

Egyszerű számolással kapjuk, hogy $g'(z) = e^z - 1$, azaz $z = 0$-ban lehet szélsőérték, és itt $g'(0) = e^0 = 1$, tehát g-nek minimuma van.

Tehát $x+y = 0$ esetén mindenhol lokális minimum lesz, ami nem szigorú lokális minimum.



14.6. ábra. Az $f(x,y) = e^{x+y} - x - y$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonja néhány szintvonallal

14.3. Megoldandó feladatok

Az **1–12.** feladatok mindegyikében határozzuk meg az ottani hozzárendeléssel adott f függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

1. $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 + 6x - y - 8$.

2. $f(x,y) = y^2 + 4x^2 + 2xy$.

3. $f(x,y) = xe^x + y^2$.

4. $f(x,y) = e^{x-y} + x + y$.

5. $f(x,y) = -x^3 - 3x^2 - 2y^2$.

6. $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2$.

7. $f(x,y) = y^4 - x^4 - 4xy$.

8. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.

9. $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4$.

10. $f(x,y) = 2xy\sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$.

11. $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y$.

12. $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

A további feladatokban illeszkedést vizsgálunk; mégpedig azt mondjuk, hogy az $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ ponthalmaz g valós függvény grafikonjától vett négyzetes eltérése az

$$(y_1 - g(x_1))^2 + (y_2 - g(x_2))^2 + \cdots + (y_N - g(x_N))^2$$

összeg.

13. Adjuk meg annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletét, amelytől a $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ ponthalmaz négyzetes eltérése minimális! Feltesszük, hogy a ponthalmazban van olyan pont, amelyre $x_i \neq 0$.

14. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelytől a $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ ponthalmaz négyzetes eltérése minimális! Feltesszük, hogy a ponthalmazban van olyan pont, amelyre $x_i \neq 0$.

14.4. Megoldások

1. $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{10})$-ban lokális minimuma van, $f(-\frac{3}{4}, \frac{1}{10}) = -\frac{103}{10}$.

2. A $(0,0)$ pontban lokális minimuma van, $f(0,0) = 0$.

3. A $(-1,0)$ pontban lokális minimuma van, $f(-1,0) = -\frac{1}{e}$.

4. Nincs szélsőérték (kritikus pont sem).

5. A $(0,0)$ pontban lokális maximuma van, $f(0,0) = 0$; $(-2,0)$ kritikus pont, ott nincs szélsőérték.

6. Az $(1,0)$ pontban lokális maximuma van, $f(1,0) = 2$; $(-1,0)$ kritikus pont, ott nincs szélsőérték.

7. $(0,0)$ az egyetlen kritikus pont, ott nincs szélsőérték.

8. A $(0,0)$ pontban lokális minimuma van, $f(0,0) = 0$.

9. Az $(1,1)$ és a $(-1,-1)$ pontokban lokális minimuma van, $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$.

10. A $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és az $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pontokban maximuma van,

$$f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

A $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és az $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pontokban minimuma van,

$$f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Megjegyezzük, hogy a kritikus pontokat az $\left\{(x,y) : 4x^2 + y^2 < 1\right\}$ halmazon kell keresni.

11. Az $(1,2)$ pontban lokális minimuma, a $(-1,-2)$ pontban pedig lokális maximuma van, $f(1,2) = -20$ és $f(-1,-2) = 20$.

12. A $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ pontokban lokális minimuma van,

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e},$$

a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ pontokban lokális maximuma van,

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}.$$

13. A kapott egyenes egyenlete $y = ax$, ahol $a = \frac{x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N}{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$.

14. A kapott egyenes egyenlete $y = ax + b$, ahol a paraméterek megadásához az $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}$ és a $\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_N}{N}$ jelöléseket használjuk. Ezekkel

$$b = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2},$$

továbbá $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

15. fejezet

Görbék és nevezetes mennyiségeik

15.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben vektor értékű függvényekkel és az ezekkel kapcsolatos nevezetes mennyiségekkel foglalkozunk.

15.1. Definíció. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy valós intervallum. Ekkor a folytonos $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvényt *görbé*nek nevezzük.

Megjegyzések. Gyakran azonosítják a görbét ezen γ függvény értékkészletével, amely akkor jogos, ha kikötjük, hogy γ injektív az (a, b) intervallumon.

Az $[a, b]$ intervallumról vett változót t-vel, a szerinte vett deriváltat pedig ponttal fogjuk jelölni. Ez arra is utal, hogy a gyakorlatban egy megfigyelt mozgó pont pályája éppen egy görbe értékkészlete.

Használjuk a $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ jelölést is, amely a t időpontban a $\gamma(t)$ egyes koordinátáit adja meg.

15.2. Definíció. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe, amelynek deriváltja létezik és folytonos az (a, b) intervallumon!

- Tegyük fel még, hogy valamilyen $t \in (a, b)$ esetén $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ teljesül! Ekkor a $\dot{\gamma}(t)$ vektort a γ görbe t-ben vett érintőjének nevezzük, azaz a γ görbét a $\gamma(t)$ pontban (vagy a t helyen) *érintő egységvektor* a

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

  formulával adható meg.
- A γ görbe $\gamma(t_1)$ és $\gamma(t_2)$ pontok közé eső szakaszának *hosszá*t az

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t$$

  integrállal definiáljuk.
- – Ha $n = 2$, azaz síkbeli görbéről van szó, akkor a γ görbe t helyen (vagy $\gamma(t)$ pontban) vett *görbületé*t azokban a $t \in (a, b)$ pontokban,

ahol $\dot\gamma(t) \neq 0$, a

$$\frac{|\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t) - \dot\gamma_2(t)\ddot\gamma_1(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}$$

hányadossal definiáljuk.

– Ha $n = 3$, azaz a 3 dimenziós térben haladó görbéről van szó, akkor a γ görbe t-ben vett *görbületét* azokban a $t \in (a, b)$ pontokban, ahol $\ddot\gamma(t)$ létezik, továbbá $\dot\gamma(t) \neq 0$, a

$$\frac{|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}$$

hányadossal definiáljuk.

- Ha $n = 3$, azaz a 3 dimenziós térben haladó görbéről van szó, akkor a γ görbe t-ben vett *torzió*ját azokban a $t \in (a, b)$ pontokban, ahol $\dddot\gamma(t)$ létezik, továbbá $\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) \neq \mathbf{0}$, a

$$\frac{(\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)) \cdot \dddot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)|^2}$$

hányadossal definiáljuk.

Megjegyzések. A görbe $\gamma(t_1)$ és $\gamma(t_2)$ közti hosszának szemléletes jelentése a görbével leírt egyenlet szerint mozgó pont által t_1 és t_2 időpontok közt megtett út hossza.

A görbület szemléletes jelentése az irányváltozás sebessége a görbe mentén.

A torzió pedig azon vektor forgásának sebességét adja meg, amely az érintővektorra és az egység hosszúságú érintővektor deriváltjából kapott vektorra is merőleges.

15.2. Kidolgozott feladatok

1. Rajzoljuk fel a $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ hozzárendeléssel megadott görbe grafikonját!

(a) Számítsuk ki a fenti görbe érintő egységvektorát a $\gamma(\frac{\pi}{4})$ és a $\gamma(\pi)$ pontokban!

(b) Számítsuk ki a fenti görbe hosszát a $\gamma(0)$ és a $\gamma(\pi)$ pontok között!

(c) Számítsuk ki a fenti görbe görbületét minden t esetén!

(d) Számítsuk ki a fenti görbe torzióját minden t esetén!

Megoldás.

(a) Tudjuk, hogy

$$\dot\gamma(t) = \partial_t(\cos(t), \sin(t)) = (-\sin(t), \cos(t)),$$

továbbá ebből

$$|\dot{\gamma}(t)| = |(-\sin(t), \cos(t))| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1,$$

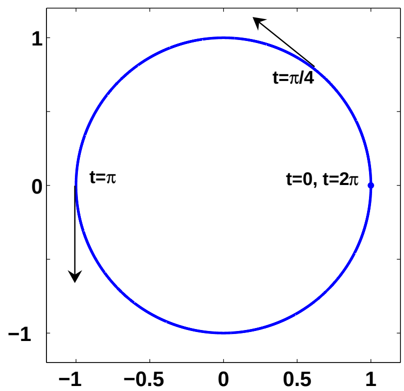
tehát tetszőleges $t \in [0, \pi]$ helyen vett érintő egységvektor $(-\sin(t), \cos(t))$. Speciálisan $\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\dot{\gamma}(\pi) = (0, -1)$.

(b) A definícióban levő képletbe helyettesítve kapjuk, hogy a vizsgált görbe $\gamma(0)$ és $\gamma(\pi)$ közti hossza a következő:

$$\int_0^\pi |\dot{\gamma}(t)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi 1\, \mathrm{d}t = \pi.$$

(c) A görbület definíciójában levő képletbe helyettesítve és a $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ egyenlőséget felhasználva

$$\frac{|\dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t) - \dot{\gamma}_2(t)\ddot{\gamma}_1(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3} = |-\sin(t)\cdot(-\sin(t)) - \cos(t)\cdot(-\cos(t))| = 1.$$



15.1. ábra. Az 1. feladatban adott γ görbe grafikonja és egy-egy érintővektora a $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$ és a $\gamma(\pi)$ pontokban

2. Rajzoljuk fel a $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ hozzárendeléssel megadott görbe grafikonját!

(a) Számítsuk ki a fenti görbe érintő egységvektorát a $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{7\pi}{2}$ pontokban!

(b) Számítsuk ki a fenti görbe hosszát!
(c) Számítsuk ki a fenti görbe görbületét minden t esetén!

Megoldás.

(a) Tudjuk, hogy

$$\dot\gamma(t)=\partial_t\big(e^t\cos(t),e^t\sin(t)\big)=\big(e^t(\cos(t)-\sin(t)),e^t(\sin(t)+\cos(t))\big),$$

továbbá ebből

$$|\dot\gamma(t)|=\sqrt{e^{2t}(2\sin^2(t)+2\cos^2(t))}=e^t\sqrt{2},$$

tehát a t helyen vett érintő egységvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos(t)-\sin(t),\sin(t)+\cos(t))$. Azaz

- a $t=\frac{\pi}{4}$ helyen az érintő egységvektor $(0,1)$,
- a $t=\frac{7\pi}{2}$ helyen az érintő egységvektor $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) A definícióban levő képletbe helyettesítve kapjuk, hogy a vizsgált görbe hossza a következő:

$$\int_0^{4\pi}|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}e^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}(e^{4\pi}-1).$$

(c) A görbület definíciójában levő képletbe helyettesítve, valamint a

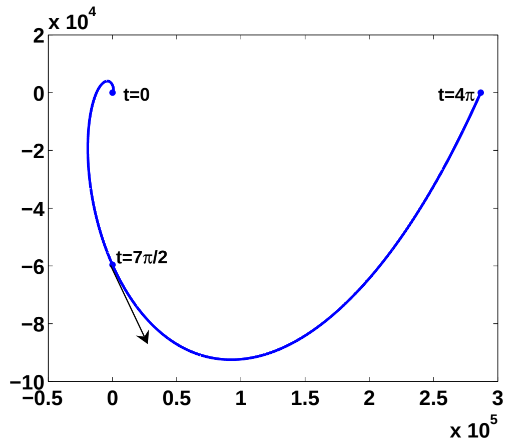
$$\ddot\gamma(t)=(-e^t(\sin(t)+\cos(t)),e^t(\cos(t)-\sin(t)))$$

és a $|\dot\gamma(t)|=\sqrt{2}e^t$ egyenlőségeket felhasználva

$$\frac{|\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t)-\dot\gamma_2(t)\ddot\gamma_1(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}=$$
$$=\frac{|e^t(\cos(t)-\sin(t))\cdot e^t(\cos(t)-\sin(t))-e^t(\sin(t)+\cos(t))\cdot e^t(-\cos(t)-\sin(t))|}{\sqrt{8}e^{3t}}=$$
$$=\frac{2e^{2t}}{\sqrt{8}e^{3t}}=\frac{1}{\sqrt{2}e^t}.$$

3. Jelölje γ a $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2,\gamma(t)=(t,2\operatorname{ch}\frac{t}{2})$ hozzárendeléssel megadott görbét!

(a) Számítsuk ki a fenti görbe érintő egységvektorát az 1 helyen!
(b) Számítsuk ki a fenti görbe hosszát!
(c) Számítsuk ki a fenti görbe görbületét minden t esetén!



15.2. ábra. A 2. feladatban adott γ görbe grafikonja és egy érintővektora a $\gamma\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ pontban

Megoldás.

(a) Tudjuk, hogy

$$\dot{\gamma}(t) = \partial_t\left(t, 2\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \left(1, \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$

továbbá ebből

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right),$$

tehát a t helyen vett érintő egységvektor $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)}, \operatorname{th}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

(b) A definícióban levő képletbe helyettesítve kapjuk, hogy a vizsgált görbe hossza a következő:

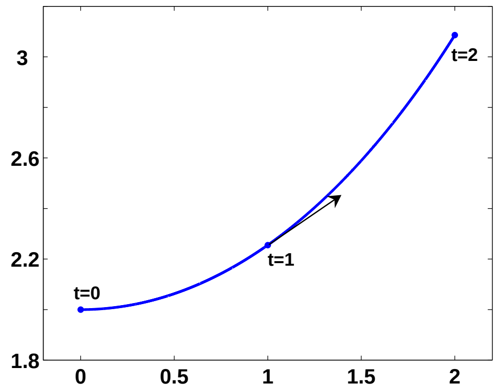
$$\int_0^2 |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[2\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^2 = 2\operatorname{sh}(1) = e - \frac{1}{e}.$$

(c) A görbület definíciójában levő képletbe helyettesítve, és a $|\dot{\gamma}(t)| = \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)$, valamint a

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(0, \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$

egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{|\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t)-\dot\gamma_2(t)\ddot\gamma_1(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}=\frac{\left|\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right|}{\operatorname{ch}^3\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{1+\operatorname{ch}(t)}.$$



15.3. ábra. A 3. feladatban adott γ görbe grafikonja és egy érintővektora a $\gamma(1)$ pontban

4. Legyen $f:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely (t_1,t_2)-ben kétszer deriválható! Adjuk meg a grafikonját egy görbeként, és írjunk fel képletet a grafikon hosszának, valamint görbületének kiszámítására!

Megoldás. Tudjuk, hogy a grafikon a $(t,f(t))$ alakú pontok halmaza, vagyis az megadható mint a $\gamma:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^2, \gamma(t)=(t,f(t))$ görbe értékkészlete.

Ekkor $|\dot\gamma(t)|=|(1,f'(t))|=\sqrt{1+[f'(t)]^2}$, tehát a grafikon hossza

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mivel $\ddot\gamma(t)=(0,f''(t))$, a grafikon görbülete a $(t,f(t))$ pontban

$$\frac{|f''(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}=\frac{|f''(t)|}{\sqrt{1+[f'(t)]^2}^3}.$$

5. Határozzuk meg az $f(t)=\operatorname{ch}(t)$ hozzárendeléssel megadott függvény grafikonjának hosszát az $\left(-\ln(6),3+\frac{1}{12}\right)$ és az $\left(\ln(6),3+\frac{1}{12}\right)$ pontok között! Adjuk meg a görbületet is a $(0,1)$ pontban!

Megoldás. Itt a (t_1, t_2) intervallumnak $(-\ln(6), \ln(6))$ felel meg. A grafikon hosszára vonatkozó képlet szerint

$$\int_{-\ln(6)}^{\ln(6)} \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(6)}^{\ln(6)} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(6)}^{\ln(6)} \mathrm{ch} t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \mathrm{sh}(\ln(6)) - \mathrm{sh}(-\ln(6)) = 6 - \frac{1}{6}.$$

A fenti képlet szerint a grafikon görbülete a $(0,1)$ pontban

$$\frac{|f''(0)|}{\sqrt{1+[f'(0)]^2}^3} = \frac{\mathrm{ch}(0)}{\mathrm{ch}(0)^3} = 1.$$

6. Határozzuk meg az összes olyan kétszer deriválható $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely grafikonjának görbülete nulla!

Megoldás. Mivel a görbület a $(t, f(t))$ helyen a fenti képlet szerint $\frac{|f''(t)|}{\sqrt{1+[f'(t)]^2}^3}$, ez pontosan akkor nulla minden $t \in (t_1, t_2)$ esetén, ha $f''(t) = 0$. Vagyis ekkor f' konstans, tehát $f(t) = at + b$ alakú valamilyen a és b konstansokkal.

7. Legyen $f : [t_1, t_2] \to [s_1, s_2]$ deriválható szigorúan monoton növő függvény! Igazoljuk, hogy f grafikonjának hossza ugyanannyi, mint az $f^{-1} : [s_1, s_2] \to [t_1, t_2]$ inverz függvény grafikonjának hossza!

Megoldás. Tudjuk, hogy a grafikon hossza

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

továbbá felhasználjuk az $(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$ azonosságot. Mivel f szigorúan monoton növő, az $s = f(t)$ új változó bevezetésével az inverz függvény grafikonjának hosszára azt kapjuk, hogy

$$\int_{f(t_1)}^{f(t_2)} \sqrt{1+[(f^{-1})'(s)]^2}\,\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+[(f^{-1})'(f(t))]^2} f'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left[\frac{1}{f'(t)}\right]^2} f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f'(t)]^2+1}\,\mathrm{d}t,$$

ahogy azt igazolni akartuk.

8. Fejezzük ki az előző feladatban szereplő f^{-1} függvény görbületét f görbületének segítségével!

Megoldás. Tudjuk, hogy f görbülete t-ben $\frac{|f''(t)|}{\sqrt{1+[f'(t)]^2}^3}$.

A fenti $(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$ azonosság mindkét oldalát deriválva akkor

$$(f^{-1})''(f(t)) \cdot f'(t) = -\frac{1}{[f'(t)]^2} \cdot f''(t).$$

Tehát f^{-1} görbülete $f(t)$-ben

$$\frac{|[f^{-1}]''(f(t))|}{\sqrt{1+[f^{-1}]'(f(t))^2}^3} = \frac{\left|\frac{1}{[f'(t)]^3} \cdot f''(t)\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{f'(t)}^2}^3} = \frac{|f''(t)|}{\sqrt{1+[f'(t)]^2}^3},$$

ami azonos az f függvény t-beli görbületével.

9. Rajzoljuk fel a $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ hozzárendeléssel megadott görbe grafikonját!

(a) Számítsuk ki a fenti görbe érintő egységvektorát a $\gamma(\pi)$ és a $\gamma(4\pi)$ pontokban!
(b) Számítsuk ki a fenti görbe hosszát!
(c) Számítsuk ki a fenti görbe görbületét minden t esetén!
(d) Számítsuk ki a fenti görbe torzióját minden t esetén!

Megoldás.

(a) Tudjuk, hogy

$$\dot\gamma(t) = \partial_t(\cos(t), \sin(t), t) = (-\sin(t), \cos(t), 1),$$

továbbá ebből

$$|\dot\gamma(t)| = |(-\sin(t), \cos(t), 1)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2},$$

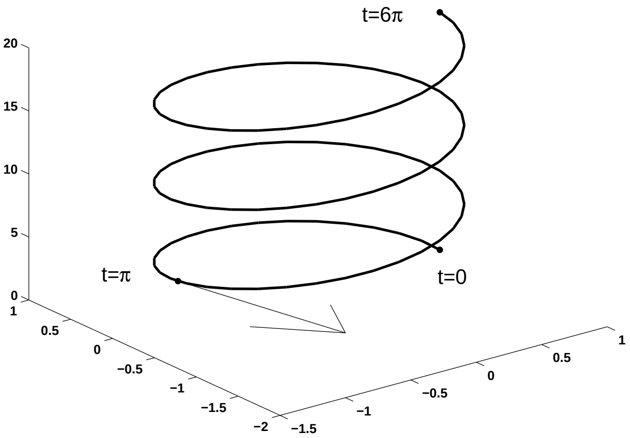
tehát a t helyen vett érintő egységvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1)$.

(b) A definícióban levő képletbe helyettesítve kapjuk, hogy a vizsgált görbe hossza a következő:

$$\int_0^{6\pi} |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{6\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 6\sqrt{2}\pi.$$

(c) Tudjuk, hogy
$$\ddot{\gamma}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0),$$
valamint
$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = (0 + \sin(t), -\cos(t) + 0, \sin^2(t) + \cos^2(t)).$$
A görbület definíciójában levő képletbe helyettesítve, és ezt, valamint a $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2}$ egyenlőséget felhasználva a keresett mennyiség
$$\frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3} = \frac{|(\sin(t), -\cos(t), 1)|}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{2}.$$

(d) A torzió kiszámítására felírt képletből, valamint a (c) részben felírt mennyiségek segítségével azt kapjuk, hogy a γ görbe t-beli torziója
$$\frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \dddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2} = \frac{(\sin(t), -\cos(t), 1) \cdot (\sin(t), -\cos(t), 0)}{|\sqrt{2}|^2} = \frac{1}{2}.$$



15.4. ábra. A 9. feladatban adott γ görbe grafikonja és egy érintővektora a $\gamma(\pi)$ pontban

10. Rajzoljuk fel a $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), \sqrt{2}t)$ hozzárendeléssel megadott görbe grafikonját!

(a) Számítsuk ki a fenti görbe érintő egységvektorát a $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ és a $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ pontokban!

(b) Számítsuk ki a fenti görbe hosszát!
(c) Számítsuk ki a fenti görbe görbületét minden t esetén!
(d) Számítsuk ki a fenti görbe torzióját minden t esetén!

Megoldás.

(a) Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) &= \partial_t(e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), \sqrt{2}t)\\ &= (e^{-t}(-\sin(t)-\cos(t)), e^{-t}(-\sin(t)+\cos(t)), \sqrt{2}),\end{aligned}$$

továbbá ebből

$$\begin{aligned}|\dot\gamma(t)| &= \sqrt{e^{-2t}((-\sin(t)-\cos(t))^2+(-\sin(t)+\cos(t))^2)+2} =\\ &= \sqrt{2e^{-2t}+2},\end{aligned}$$

tehát a t helyen vett érintő egységvektor

$$\frac{1}{\sqrt{2e^{-2t}+2}}\big(e^{-t}(-\sin(t)-\cos(t)), e^{-t}(-\sin(t)+\cos(t)), \sqrt{2}\big).$$

Kiszámítjuk még a többi deriváltat is:

$$\begin{aligned}\ddot\gamma(t) = \Big(&e^{-t}\big(\sin(t)+\cos(t)-\cos(t)+\sin(t)\big),\\ &e^{-t}\big(\sin(t)-\cos(t)-\cos(t)-\sin(t)\big), 0\Big) =\\ = (&2e^{-t}\sin(t), -2e^{-t}\cos(t), 0),\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}\dddot\gamma(t) &= \big(2e^{-t}\sin(t), -2e^{-t}\cos(t), 0\big)' =\\ &= \big(2e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)), 2e^{-t}(\sin(t)+\cos(t)), 0\big).\end{aligned}$$

(b) A definícióban levő képletbe helyettesítve kapjuk, hogy a vizsgált görbe hossza a következő:

$$\int_0^{4\pi}|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{-2t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

Ennek kiszámítását több lépésben végezzük.

– Először az $e^{-t} = \mathrm{sh}(x)$ helyettesítést alkalmazzuk, ahol $\mathrm{ch}x = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \sqrt{1+e^{-2t}}$, továbbá $-e^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$, azaz

$$\mathrm{d}t = -e^t\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x,$$

– majd felhasználjuk, hogy $\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{1-\mathrm{ch}(x)}$.

A helyettesítést használva tehát

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2e^{-2t}+2}\,\mathrm{d}t &= \int \sqrt{2\mathrm{sh}^2(x)+2}\cdot\left(-\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\int\frac{1+\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\sqrt{2}\int\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{1-\mathrm{ch}(x)}+\mathrm{ch}(x)\right) = \\ &= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{-2t}}}{1-\sqrt{1+e^{-2t}}}+\sqrt{1+e^{-2t}}\right),\end{aligned}$$

vagyis

$$\int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{-2t}+2}\,\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{-2t}}}{1-\sqrt{1+e^{-2t}}}+\sqrt{1+e^{-2t}}\right)\right]_0^{4\pi} =$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{-8\pi}}}{1-\sqrt{1+e^{-8\pi}}}+\sqrt{1+e^{-8\pi}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right).$$

(c) A görbület kiszámításához először az alábbi mennyiségat adjuk meg:

$$\begin{aligned}&\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t) = \\ &= \big(e^{-t}(-\sin(t)-\cos(t)), e^{-t}(-\sin(t)+\cos(t)), \sqrt{2}\big)\times \\ &\quad\times\big(2e^{-t}\sin(t), -2e^{-t}\cos(t), 0\big) = \\ &= \Big(2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t), 2\sqrt{2}e^{-t}\sin(t), \\ &\qquad 2e^{-2t}\big(\cos^2(t)+\sin(t)\cos(t)+\sin^2(t)-\sin(t)\cos(t)\big)\Big) = \\ &= \big(2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t), 2\sqrt{2}e^{-t}\sin(t), 2e^{-2t}\big) = \\ &= 2e^{-t}\big(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), e^{-t}\big),\end{aligned}$$

vagyis

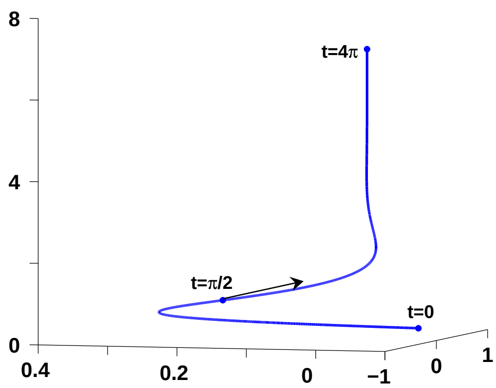
$$|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)| = 2e^{-t}\sqrt{2\cos^2(t)+2\sin^2(t)+e^{-2t}} = 2e^{-t}\sqrt{2+e^{-2t}}.$$

A görbület definíciójában levő képletbe helyettesítve, és ezt, valamint a $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{2e^{-2t}+2}$ egyenlőséget felhasználva a keresett mennyiség

$$\frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3} = \frac{2e^{-t}\sqrt{2+e^{-2t}}}{\sqrt{2e^{-2t}+2}}.$$

(d) A torzió kiszámítására felírt képletből, valamint a (c) részben felírt mennyiségek segítségével azt kapjuk, hogy a γ görbe t-beli torziója

$$\frac{(\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t))\cdot\dddot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2} =$$
$$= \frac{2e^{-t}(\sqrt{2}\cos(t),\sqrt{2}\sin(t),e^{-t})\cdot(2e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)),2e^{-t}(\sin(t)+\cos(t)),0)}{4e^{-2t}(2+e^{-2t})} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cos(t)(\cos(t)-\sin(t))+\sqrt{2}\sin(t)(\sin(t)+\cos(t))}{2+e^{-2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2+e^{-2t}}.$$



15.5. ábra. A 10. feladatban adott γ görbe grafikonja és egy érintővektora a $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pontban

11. Adott $\gamma : [t_1,t_2] \to \mathbb{R}^n$ és $s \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\gamma_s : [t_1,t_2] \to \mathbb{R}^n$-nel jelölt $\gamma_s(t) = s+\gamma(t)$ hozzárendeléssel definiált görbét γ eltoltjának nevezzük. Igazoljuk, hogy ennek hossza ugyanaz, mint γ hossza!

Megoldás. Mivel $\dot\gamma_s = \dot\gamma$ és $\ddot\gamma_s = \ddot\gamma$, ezért

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma_s(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t,$$

tehát a két görbe hossza valóban ugyanannyi.

15.3. Megoldandó feladatok

Az **1–10.** feladatokban határozzuk meg az adott görbék érintő egységvektorát minden lehetséges pontban, a görbék ívhosszát, görbületüket és 3 dimenziós esetben a torziót is!

1. $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1-t, 1+t)$.

2. $\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$.

3. $\gamma : [0,8\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(-e^t \sin(2t), e^t \cos(2t)\big)$.

4. $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos^2(t), \sin^2(t)\big)$.

5. $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\big)$.

6. $\gamma : [1,3] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, 2-t, 1+2t)$.

7. $\gamma : [0,3\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 2t)$.

8. $\gamma : [0,\ln(4)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t), t)$.

9. A $\gamma : [0,\ln(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t), t\big)$ görbe esetén csak az ívhosszát és a torzióját számoljuk ki!

10. Adott $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén a $\gamma_c : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$-nel jelölt és $\gamma_c(t) = c\gamma(t)$ hozzárendeléssel definiált görbe esetén számítsuk ki γ_c hosszát és görbületét γ hasonló mennyiségeinek függvényében!

A **11–13.** feladatokban $\mathbb{R}^2$-beli függvénygrafikonok tulajdonságait vizsgáljuk.

11. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 1$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjának hosszát a $(0,0)$ és $(1,2)$ pontok között!

12. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(\cos(x))$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjának hosszát a $(0,0)$ és $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\ln(2)}{2})$ pontok között!

13. Határozzuk meg az $f(t) = \mathrm{arch}(t)$ hozzárendeléssel megadott függvény grafikonjának hosszát az $(1,0)$ és a $(3, \mathrm{arch}(3))$ pontok között! Adjuk meg a görbületet is minden pontban!

15.4. Megoldások

1. Ívhossz: $4\sqrt{2}$, görbület: 0.

2. Ívhossz: 8π, görbület: 1.

3. Ívhossz: $\sqrt{5}(e^{8\pi} - 1)$, görbület: $\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-t}$.

4. Ívhossz: $4\sqrt{2}$, görbület: 0.

5. Ívhossz: $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$, görbület: $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}^3}$.

6. Ívhossz: $2\sqrt{6}$, görbület: 0, torzió: 0.

7. Ívhossz: $6\sqrt{2}\pi$, görbület: $\frac{1}{2}$, torzió: $\frac{1}{2}$.

8. Ívhossz: $\frac{15}{8}\sqrt{2}$, görbület: $\frac{1}{2\mathrm{ch}^2 t}$, torzió: $\frac{1}{2\mathrm{ch}^2 t}$.

9. Ívhossz: $\operatorname{arth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3} - \operatorname{arth}\left(\frac{1}{3}\right) + 3$, torzió: 0.

10. Az ívhossz $|c|$-szeresére nő, a görbület $|c|$-ed részére csökken.

11. $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}-2) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{arsh}(2)$.

12. $\ln(1+\sqrt{2})$.

13. 2.

16. fejezet

Potenciálfüggvény, vonalintegrál

16.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben mindenhol feltesszük, hogy $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$ egy *csillagszerű* nyílt halmaz, azaz olyan, amelynek van olyan $\mathbf{x}$ pontja, hogy minden $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(f)$ esetén az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontokat összekötő szakasz is $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(f)$-ben van.

16.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F vektorfüggvény az f vektormező *potenciál*ja, ha $\nabla F = f$ teljesül minden $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(f)$ pontban.

16.1. Állítás. *Ha az f vektormező koordinátafüggvényei folytonosan deriválhatók, továbbá*

- *$n = 2$ és $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$, akkor f-nek van potenciálja,*
- *$n = 3$ és $\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 = \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0$, akkor f-nek van potenciálja.*

16.2. Definíció. Legyen adott egy $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható görbe és egy f vektormező. Ekkor az f függvény r *görbe menti integrál*ját a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$\int_r f := \int_a^b f(r(s)) \cdot \dot{r}(s) \, \mathrm{d}s.$$

16.2. Állítás. *Ha létezik f-nek potenciálja, amelyet F jelöl, emellett $R(r) \subset D(F)$, akkor $\int_r f = F(r(b)) - F(r(a))$; speciálisan, ha az r görbe zárt, azaz $r(a) = r(b)$, akkor $\int_r f = 0$.*

Megjegyzések. Ha f egy erőteret jelöl, akkor a fenti vonalintegrál az erőtér által végzett munkát adja meg az r görbe mentén.

A fenti állításban mindegy, melyik potenciált választjuk, az eredmény minden esetben ugyanaz.

16.2. Kidolgozott feladatok

1. Van-e potenciálja az $f(x,y) = (-y,x)$ hozzárendeléssel adott függvénynek? Ha van, keressük meg!

Megoldás. Tudjuk, hogy $\partial_2 f_1(x,y) = \partial_y(-y) = -1$, továbbá $\partial_1 f_2(x,y) = \partial_x x = 1$, vagyis, mivel ezek nem egyenlők, a fenti f függvénynek nincsen potenciálja.

2. Van-e potenciálja az $f(x,y) = (y+1,x)$ hozzárendeléssel adott függvénynek? Ha van, keressük meg!

Megoldás. Tudjuk, hogy $\partial_2 f_1(x,y) = \partial_y[y+1] = 1$, továbbá $\partial_1 f_2(x,y) = \partial_x x = 1$, vagyis, mivel ezek egyenlők, a fenti f függvénynek van potenciálja.

Ha F a keresett potenciál, akkor nyilván

$$\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = y+1,$$

vagyis

$$F(x,y) = \int y+1\,\mathrm{d}x = xy + x + C(y), \tag{16.1}$$

ahol C tetszőleges deriválható valós függvény.

Másrészt ha F a potenciálfüggvény, akkor

$$f_2(x,y) = \partial_2 F(x,y) = \partial_y[xy + x + C(y)] = x + C'(y),$$

tehát $C'(y) = 0$, vagyis $C(y) = c$, ahol c tetszőleges konstans. A megoldás tehát az F függvény (16.2)-beli alakjából

$$F(x,y) = xy + x + c,$$

ahol c tetszőleges konstans.

3. Van-e potenciálja az $f(x,y) = (y^2\cos(xy), xy\cos(xy) + \sin(xy))$ hozzárendeléssel adott függvénynek? Ha van, keressük meg!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_2 f_1(x,y) = \partial_y[y^2\cos(xy)] = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy),$$

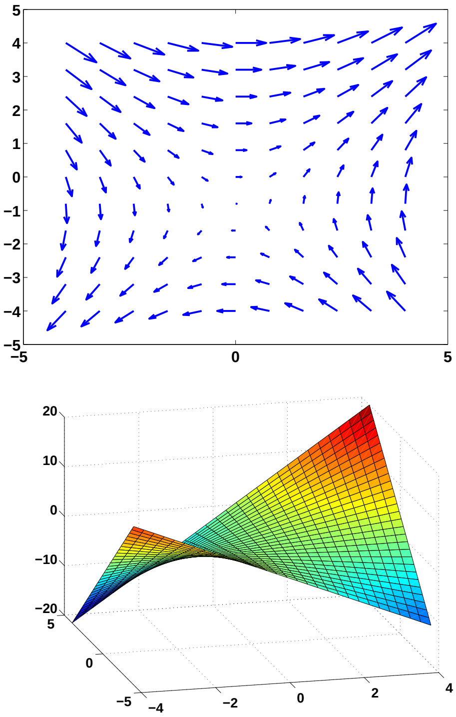
továbbá

$$\partial_1 f_2(x,y) = \partial_x[xy\cos(xy) + \sin(xy)] = y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) + y\cos(xy),$$

amelyek megegyeznek, tehát van potenciál.

Ha F a keresett potenciál, akkor nyilván

$$\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = y^2\cos(xy),$$



16.1. ábra. A 2. feladatban szereplő f függvény néhány pontban (fent) és potenciálfüggvényének grafikonja (lent)

vagyis

$$F(x,y) = \int y^2 \cos(xy)\,\mathrm{d}x = y\sin(xy) + C(y), \tag{16.2}$$

ahol $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.
Másrészt ha F a potenciálfüggvény, akkor

$$f_2(x,y) = \partial_2 F(x,y) = \partial_y[y\sin(xy) + C(y)] = \sin(xy) + xy\cos(xy) + C'(y),$$

tehát $C'(y) = 0$, vagyis $C(y) = c$, ahol c tetszőleges konstans. A megoldás tehát az F függvény (16.2)-beli alakjából

$$F(x,y) = y\sin(xy) + c,$$

ahol c tetszőleges konstans.

4. Van-e potenciálja az $f(x,y,z) = (yz + y, xz + x, 1 + xy)$ hozzárendeléssel adott vektormezőnek? Ha van, keressük meg!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\partial_y f_3(x,y,z) - \partial_z f_2(x,y,z) = x - x = 0,$$

továbbá

$$\partial_z f_1(x,y,z) - \partial_x f_3(x,y,z) = y - y = 0,$$

valamint

$$\partial_x f_2(x,y,z) - \partial_y f_1(x,y,z) = z - z = 0,$$

vagyis a fenti állítás értelmében f-nek van potenciálja. Ennek kiszámításához feltesszük, hogy F a keresett potenciál. Ekkor nyilván

$$\partial_x F(x,y,z) = f_1(x,y,z) = yz + y,$$

vagyis

$$F(x,y,z) = \int yz + y \,\mathrm{d}x = xyz + xy + C(y,z), \tag{16.3}$$

ahol C tetszőleges deriválható vektor-skalár függvény.
Másrészt ha F a potenciálfüggvény, akkor

$$f_2(x,y,z) = \partial_y F(x,y,z) = \partial_y[xyz + xy + C(y,z)] = xz + x + \partial_y C(y,z),$$

tehát $\partial_y C(y,z) = 0$. Mivel $D(f)$ csillagszerű, ennek második változóra eső vetülete intervallum, ezért $C(y,z) = \tilde{C}(z)$ alakú, ahol C egy deriválható valós függvény. Ezzel az (16.3) alakból $F(x,y,z) = xyz + xy + \tilde{C}(z)$, tehát

$$f_3(x,y,z) = \partial_z F(x,y,z) = \partial_z[xyz + xy + \tilde{C}(z)] = xy + \tilde{C}'(z),$$

azaz $\tilde{C}'(z) = 1$. Innen nyerjük, hogy $\tilde{C}(z) = z + c$, ahol c tetszőleges konstans. Így tehát azt kaptuk, hogy

$$F(x,y,z) = xyz + xy + z + c,$$

ahol c tetszőleges konstans.

5. Legyen $f(x,y) = (x - y - 1, x + y + 1)$, továbbá az $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ görbe az $r(s) = (\cos(s), \sin(s))$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki az $\int_r f$ integrált!

Megoldás. A fenti képletben szereplő mennyiségeket felírva

$$f(r(s)) = \cos(s) - \sin(s) - 1, \cos(s) + \sin(s) + 1,$$

továbbá

$$\dot{r}(s) = (-\sin(s), \cos(s)),$$

tehát a definícióban szereplő képlet szerint

$$\int_r f = \int_0^{2\pi} \big(\cos(s) - \sin(s) - 1, \cos(s) + \sin(s) + 1\big) \cdot \big(-\sin(s), \cos(s)\big) \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos(s)\sin(s) + \sin^2(s) + \sin(s) + \cos^2(s) +$$

$$+ \sin(s)\cos(s) + \cos(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \sin(s) + \cos(s)\,\mathrm{d}s = [s - \cos(s) + \sin(s)]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

6. Legyen $f(x, y, z) = (y - 1, x + 1, 2)$, továbbá az $r : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$ görbe az $r(s) = (\cos(s), \sin(s), s)$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki az $\int_r f$ integrált!

Megoldás. A fenti képlet szerint

$$\int_r f = \int_0^{3\pi} (\sin(s) - 1, \cos(s) + 1, 2) \cdot (-\sin(s), \cos(s), 1)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{3\pi} -\sin^2(s) + \sin(s) + \cos^2(s) + \cos(s) + 2\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{3\pi} 2 + \sin(s) + \cos(s) + \cos 2s\,\mathrm{d}s =$$

$$= \left[2s - \cos(s) - \sin(s) - \frac{1}{2}\sin(2s)\right]_0^{3\pi} =$$

$$= 6\pi + 1 + 1 = 6\pi + 2.$$

7. Tegyük fel, hogy f-nek létezik potenciálja, valamint $\mathcal{R}(r) \subset \mathcal{D}(f)$ teljesül valamilyen $r : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ görbére. Igazoljuk, hogy az $\int_r f$ integrál ekkor csakis $r(t_1)$ és $r(t_2)$ értékétől függ, attól viszont nem, hogy a görbe más pontokban milyen értékeket vesz fel!

Megoldás. Mivel a bevezetőben szereplő állítás feltételei teljesülnek, ezért

$$\int_r f = F\big(r(t_2)\big) - F\big(r(t_1)\big),$$

ami adott f esetén valóban csakis az $r(t_1)$ és $r(t_2)$ értékektől függ.

8. Legyen $f(x,y) = (y^2, 2xy)$, továbbá az $r : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ görbe az $r(s) = (\sin(2s), \cos(2s))$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki a $\int_r f$ integrált!

Megoldás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_y f_1(x,y) = \partial_y y^2 = 2y \quad \text{és} \quad \partial_x f_2(x,y) = \partial_x 2xy = 2y,$$

vagyis a potenciálfüggvényekre vonatkozó állítás szerint f-nek létezik potenciálja. Tudjuk továbbá, hogy a fenti r görbe zárt, mert

$$r(0) = (\sin(0), \cos(0)) = (\sin(2\pi), \cos(2\pi)) = r(\pi)$$

Ekkor viszont a fenti állítás alapján az $\int_r f$ integrál nulla.

9. Legyen $f(x,y) = (2xy, x^2)$, továbbá az $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ görbe az $r(s) = \left(e^s \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right), e^{-s}\cos(\pi s)\right)$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki az $\int_r f$ integrált!

Megoldás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_2 f_1(x,y) = \partial_y 2xy = 2x \quad \text{és} \quad \partial_1 f_2(x,y) = \partial_x x^2 = 2x,$$

vagyis a potenciálfüggvényekre vonatkozó állítás szerint f-nek létezik potenciálja. Vagyis a bevezetőben szereplő állítás miatt a keresett integrál értéke $F(r(1)) - F(r(0))$, ahol F az f függvény egy potenciálja.
Ezek után már csak az F potenciált kell meghatároznunk. Ha $\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$, akkor

$$F(x,y) = \int 2xy \, \mathrm{d}x = x^2 y + C(y),$$

ahol $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$f_1(x,y) = \partial_2 F(x,y) = 2xy + C'(y),$$

tehát C konstans függvény, vagyis egy potenciálfüggvény az $F(x,y) = x^2 y$. Kapjuk tehát, hogy a keresett integrál

$$F\left(e, -\frac{1}{e}\right) - F(0,1) = -e.$$

10. Legyen $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, továbbá az $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ görbe az $r(s) = (\cos(s), \sin(s))$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki a görbe menti integrál definíciója alapján az $\int\limits_r f$ integrált! Nincs f-nek primitív függvénye? Nem kellene emiatt nullát kapnunk?

Megoldás. A definíció szerint

$$\int\limits_r f = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin(s), \cos(s)) \cdot (-\sin(s), \cos(s))\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

Fennáll, hogy

$$\partial_2 f_1(x,y) = \partial_1 f_2(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2},$$

azonban sem az eredeti f függvény, sem a primitív függvény nincs a $(0,0)$ helyen értelmezve. Sőt, nem is lehet itt úgy definiálni, hogy f folytonos legyen. A megadott zárt görbe emiatt nem lehet egy olyan tartománynak része, amely csillagszerű, hiszen annak az átellenes pontjait összekötő szakaszok egyike sincs a tartományban. Ezzel a fejezet elején tett alapfeltevés sérül meg, és az említett azonosságok ekkor nem érvényesek.

11. Számítsuk ki az $(1,0)$ és a $(-1,0)$ pontokat összekötő egységkör íve mentén az $f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját! Mindegy, hogy a két lehetséges körív közül melyiken számolunk?

Megoldás. Az előző példával ellentétben itt akár a pozitív, akár a negatív y koordinátákkal rendelkező köríveket tekintjük, a megfelelő nyílt félkörök olyanok, hogy ott f értelmezve van, és mint látni fogjuk, a megfelelő primitív függvények is. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\partial_2 \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, valamint $\partial_1 \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, vagyis a fenti f függvénynek van potenciálja. Ekkor a megoldás a bevezető részben szereplő állítás szerint $F(-1,0) - F(0,1)$, ahol F az f függvény egy potenciálja. Ezek után már csak az F potenciált kell meghatároznunk. Ha $\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, akkor

$$F(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+y^2) + C(y),$$

ahol $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$f_1(x,y) = \partial_2 F(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + C'(y),$$

tehát C konstans függvény, vagyis egy potenciálfüggvény az $F(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Kapjuk tehát, hogy a keresett integrál

$$F(-1,0) - F(0,1) = \ln(1) - \ln(1) = 0$$

akár az egyik, akár a másik lehetséges félköríven számoljuk ki.

12. Legyen $f(x, y, z) = (yz + 1, xz, xy - 1)$, továbbá az $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ görbe az $r(s) = (\sin(s), \cos(s), \sin(s)+\cos(s))$ hozzárendeléssel megadva! Számítsuk ki az $\int_r f$ integrált!

Megoldás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\nabla \times f(x, y, z) = (x - x, y - y, z - z) = 0,$$

vagyis a potenciálfüggvényekre vonatkozó állítás szerint f-nek létezik potenciálja. Tudjuk továbbá, hogy a fenti r görbe zárt, mert

$$\begin{aligned} r(0) &= (\sin(0), \cos(0), \sin(0) + \cos(0)) = \\ &= (\sin(2\pi), \cos(2\pi), \sin(2\pi) + \cos(2\pi)) = r(2\pi). \end{aligned}$$

Ekkor viszont a fenti állítás alapján az $\displaystyle\int_r f$ integrál nulla.

16.3. Megoldandó feladatok

Az **1–4.** feladatokban vizsgáljuk meg, hogy az egyes hozzárendelésekkel megadott f függvényeknek van-e potenciálja! Ha van, keressük meg!

1. $f(x, y) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$. **2.** $f(x, y) = \left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

3. $f(x, y, z) = (xyz, xz, xy - 2z)$. **4.** $f(x, y, z) = \left(\frac{z^2+y+1}{z^2+1}, \frac{x}{z^2+1}, \frac{2xyz}{(z^2+1)^2}\right)$.

Az **5–14.** feladatokban számítsuk ki az egyes hozzárendelésekkel definiált f függvények vonalintegrálját az adott r görbék mentén!

5. $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (\cos(2t), \sin(2t)),\ f(x, y) = (x-y-1, x+y+1)$.

6. $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (\cos(t), -\sin(t)),\ f(x, y) = (2xy, x^2)$.

7. $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t)),\ f(x, y) = (1, 1)$.

8. $r : [0, \ln 2] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t)),\ f(x, y) = (-y, x)$.

9. $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (\cos(t), \sin(2t)),\ f(x, y) = (y^2, 2xy + 3)$.

10. $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = \left(\cos^2(t), e^{-\sin t}\right),\ f(x, y) = \left((x + 1)e^{x+y}, xe^{x+y}\right)$.

11. $r : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (\cos(t), \sin(t), t),\ f(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

12. $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2),\ f(x, y) = (x, y, z)$.

13. $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (\cos(t), \sin(t), t(t - 2\pi)),$
$f(x, y, z) = (yz - ye^{xy}, xz - xe^{xy}, xy)$.

14. $r : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (t^2 - t, t - t^3, t - t^2)$,
$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}, 1\right)$.

16.4. Megoldások

Potenciálok kiszámításásra vonatkozó feladatok megoldásai:

1. $F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. Nincs potenciál.

3. Nincs potenciál.

4. $F(x,y,z) = \frac{xy}{z^2+1} + x$.

Vonalintegrálok kiszámításásra vonatkozó feladatok megoldásai:

5. 2π.

6. 0 (van potenciál, r zárt).

7. $-e^{\pi} - 1$.

8. 3.

9. 0 (van potenciál, r zárt).

10. 0 (van potenciál, r zárt).

11. 4π.

12. $\frac{\pi^4}{2}$.

13. 0 (van potenciál, r zárt).

14. 0 (van potenciál, r zárt).

Megjegyzés. A 10. feladatot a definícióban szereplő integrál kiszámításával nem tudjuk megkapni, mert az ehhez szükséges primitív függvényeket az ismert elemi függvények segítségével nem tudjuk megadni.

17. fejezet

Többszörös integrálok

17.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben vektor-skalár függvények valamilyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmazon vett integráljának kiszámításával foglalkozunk.

Konkrét két- és háromdimenziós esetekre szorítkozunk, amikor Ω korlátos és nyílt vagy zárt, emellett f folytonos és korlátos az Ω halmazon. Ekkor igazolható, hogy a vizsgált $\int\limits_{\Omega} f$ integrál értelmes.

Megjegyzés. Ha f egy anyag sűrűségét jelöli, akkor az $\int\limits_{\Omega} f$ integrál az Ω tartományban levő össz-anyagmennyiséget adja meg. Így ha $f = 1$, akkor a fenti integrállal az Ω tartomány térfogatát nyerjük.

Hasonlóan, ha f egy valószínűségi változóhoz tartozó sűrűségfüggvény, akkor a fenti integrál annak valószínűségét adja meg, hogy a változó értéke az Ω halmazba esik.

Szorzat alakú tartományok esete. Ekkor az Ω tartományon vett integrált egyszerűen intervallumon vett integrálok egymásutánjaként számíthatjuk ki.

- Ha $\Omega = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, akkor

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y) = \int\limits_{b_1}^{b_2} \left\{ \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left\{ \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x,$$

  ahol a jobb oldalon levő egymás után vett integrálok közül bármelyik használható a számoláshoz.

- Hasonlóan, ha $\Omega = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}^3$, akkor

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y) = \int\limits_{c_1}^{c_2} \left\{ \int\limits_{b_1}^{b_2} \left\{ \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z$$

Megjegyzés. A fentiekben használt zárójelek csak az egyes változók szerint vett integrálások sorrendjét jelölik, amit a fenti két egyenlőség miatt általában elhagyunk a későbbiekben.

Függvénygrafikonok által határolt tartományok (normáltarományok) esete.

- Ha $\Omega = \{(x,y) : x \in [a_1,a_2], h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$ alakú valamilyen adott $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú folytonos függvényekkel, akkor
$$\int_\Omega f(x,y) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$
- Ha $\Omega = \{(x,y,z) : x \in [a_1,a_2], y \in [b_1,b_2], h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$ alakú valamilyen adott $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú folytonos függvényekkel, akkor
$$\int_\Omega f(x,y,z) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$
- Ha $\Omega = \{(x,y,z) : x \in [a_1,a_2], g_1(x) \le y \le g_2(x), h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$ alakú valamilyen adott $g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú folytonos függvényekkel, akkor
$$\int_\Omega f(x,y,z) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left\{ \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Megjegyzés. Természetesen lehetséges, hogy egy kétdimenziós tartományt úgy tudunk függvénygrafikonok által határolt tartományként megadni, hogy y változik egy intevallumban, a lehetséges x értékekre pedig valamilyen h_1 és h_2 függvényekkel $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ teljesül. Ekkor
$$\int_\Omega f(x,y) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y.$$

Integráltranszformációk. A legtöbb tartomány a fenti alakban megadható, azonban a megfelelő képlettel való számolás gyakran bonyolult. Ezért a szorzat alakú tartományok esetére próbáljuk meg visszavezetni a számolást.

Ehhez egy $\varphi : Q \to \Omega$ kölcsönösen egyértelmű függvénnyel teremtünk kapcsolatot a két tartomány között, amely függvényről feltesszük, hogy minden

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ koordinátafüggvénye folytonosan deriválható. Használjuk még ezzel kapcsolatban a

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(\mathbf{x}) & \partial_2\varphi_1(\mathbf{x}) & \ldots & \partial_n\varphi_1(\mathbf{x}) \\ \partial_1\varphi_2(\mathbf{x}) & \partial_2\varphi_2(\mathbf{x}) & \ldots & \partial_n\varphi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\varphi_n(\mathbf{x}) & \partial_2\varphi_n(\mathbf{x}) & \ldots & \partial_n\varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

jelölést is. Ekkor

$$\int_\Omega f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_Q f(\varphi(\mathbf{x}))\,|\det \varphi'(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

- Alkalmazás körlapon való integrálásra. Itt Ω az origó középpontú r sugarú körlap. Ekkor

  $$\varphi : (0,r) \times [0,2\pi) \to \Omega, \varphi(\rho,\alpha) := (\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha))$$

  továbbá

  $$\det \varphi'(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\rho\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \rho\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \rho,$$

  vagyis az adott f függvény integrálját az origó középpontú r sugarú körlapon a következő képlettel számíthatjuk ki:

  $$\int_\Omega f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha)) \cdot \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho.$$

- Alkalmazás gömbön való integrálásra. Itt Ω az origó középpontú r sugarú gömb. Ekkor

  $$\varphi : [0,r) \times [0,2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \Omega, \varphi : (\rho,\alpha,\theta) =$$
  $$= (\rho\cos(\alpha)\cos(\theta), \rho\sin(\alpha)\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$$

  továbbá némi számolással kapjuk, hogy

  $$\det \varphi'(\mathbf{x}) = \rho^2\cos(\theta).$$

  Vagyis az origó középpontú r sugarú gömbön adott f függvény integrálját a következő képlettel számíthatjuk ki:

  $$\int_\Omega f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} =$$
  $$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos(\alpha)\cos(\theta), \rho\sin(\alpha)\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \cdot \rho^2\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho.$$

17.2. Kidolgozott feladatok

1. Számítsuk ki az $f(x,y)=xy-x$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,1]\times[-1,5]$ téglalapon!

Megoldás. A szorzattartományon való integrálást megadó képletbe helyettesítve a keresett integrál

$$\int_{-1}^{5}\left\{\int_{0}^{1} xy-x\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{5}\left[\frac{x^2}{2}(y-1)\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{5}\frac{1}{2}(y-1)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\left[\frac{1}{4}(y-1)^2\right]_{y=-1}^{y=5}=3.$$

Megjegyzés. A továbbiakban az integrálok közti zárójeleket elhagyjuk.

2. Számítsuk ki az $f(x,y)=\frac{\ln(xy)}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját az $[1,e]\times[1,e^2]$ téglalapon!

Megoldás. A téglalapon a fenti hozzárendeléssel megadott függvény értelmes, továbbá az $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ azonosság alkalmazható. A szorzattartományon való integrálást megadó képletbe helyettesítve a keresett integrál

$$\int_{1}^{e^2}\int_{1}^{e}\frac{\ln(xy)}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{1}^{e^2}\int_{1}^{e}\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(y)}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{1}^{e^2}\left[\frac{\ln^2(x)}{2}-\frac{\ln(y)}{x^2}\right]_{x=0}^{x=e}\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{1}^{e^2}\frac{1}{2}-\frac{\ln(y)}{e^2}+\ln(y)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y+(y\ln(y)-y)\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\right]_{y=1}^{y=e^2}=$$

$$=\frac{e^2}{2}+e^2\left(1-\frac{1}{e^2}\right)-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{e^2}=\frac{3e^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^2}.$$

3. Számítsuk ki az $f(x,y)=3x^2y+z$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[-1,1]\times[0,2]\times[0,4]$ téglán!

Megoldás. A szorzattartományon való integrálást megadó képletbe helyettesítve a keresett integrál

$$\int_{0}^{4}\left\{\int_{0}^{2}\left\{\int_{-1}^{1}3x^2y+z\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z=\int_{0}^{4}\left\{\int_{0}^{2}\left[x^3y+xz\right]_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z=$$

$$= \int_0^4 \left\{ \int_0^2 y + z + y + z \, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^4 \left[y^2 + 2yz\right]_{y=0}^{y=2} \mathrm{d}z = \int_0^4 4 + 4z \, \mathrm{d}z = 16 + \left[2z^2\right]_{z=0}^{z=4} = 48.$$

4. Számítsuk ki az $f(x, y) = z \sin(x - y)$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [1, 4]$ téglán!

Megoldás. A szorzattartományon való integrálást megadó képletbe helyettesítve a keresett integrál

$$\int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} z \sin(x - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-z \cos(x - y)\right]_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z =$$

$$= \int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -z \cos(\pi - y) + z \cos(-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_1^4 \left[z \sin(\pi - y) + z \sin(y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z =$$

$$= \int_1^4 z + z - 0 \, \mathrm{d}z = \left[z^2\right]_{z=1}^{z=4} = 15.$$

5. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját azon a tartományon, amelyet felülről az $y = x$, alulról az $y = -x$, jobbról pedig az $x = 2$ egyenletű egyenes határol!

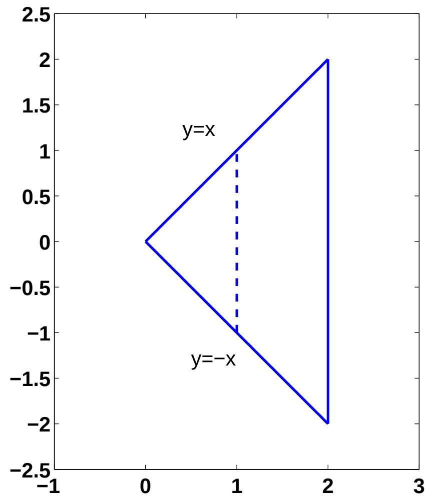
Megoldás. A feladat értelmében azon az Ω tartományon kell integrálnunk, amely a következő módon van megadva:

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 2], -x \leq y \leq x\}.$$

Itt tehát a fentiekkel összevetve (l. a függvénygrafikonok által határolt tartományok esetét) $h_1(x) = -x$ és $h_2(x) = x$.

$$\int_0^2 \int_{-x}^{x} xy^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^4}{3} + \frac{-x^4}{3} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^5}{15}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{64}{15}.$$

6. Számítsuk ki az $f(x, y) = x - y$ hozzárendeléssel definiált függvény integrálját az $y = x(2 - x)$ és az $y = 0$ egyenlettel adott görbék által közrefogott tartományon!



17.1. ábra. Az 5. feladatban szereplő integrálási tartomány. Minden rögzített x esetén a lehetséges y értékek $-x$ és x közt változnak

Megoldás. A feladat értelmében azon az Ω tartományon kell integrálnunk, amely a következő módon van megadva:

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq x(2 - x)\} .$$

Itt tehát a fentiekkel összevetve (l. a függvénygrafikonok által határolt tartományok esetét) $h_1(x) = 0, h_2(x) = x(2 - x)$. Vagyis az ott szereplő képlet szerint a keresett integrált a következő módon számíthatjuk ki:

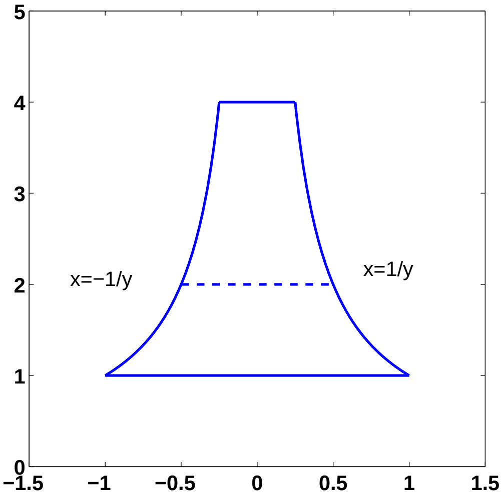
$$\int_0^2 \int_0^{x(2-x)} x - y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x(2-x)} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2(2 - x) - \frac{x^2(2 - x)^2}{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 x^3 - \frac{x^4}{2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}.$$

7. Számítsuk ki az $f(x, y) = x - y$ hozzárendeléssel definiált függvény integrálját azon atartományon, amelyet alulról és felülről az $y = 1$ és $y = 4$ egyenlettel, balról és jobbról pedig az $y = -\frac{1}{x}$ és $y = \frac{1}{x}$ egyenlettel adott görbék határolnak!

Megoldás. Itt tehát y értéke 1 és 4 közt változik, rögzített y-ra pedig x értéke $-\frac{1}{y}$ és $\frac{1}{y}$ között.



17.2. ábra. A 7. feladatban szereplő integrálási tartomány.
Minden rögzített y esetén a lehetséges x értékek $-\frac{1}{y}$ és $\frac{1}{y}$ közt változnak

Ennek alapján a keresett integrál

$$\int_1^4 \int_{-\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=-\frac{1}{y}}^{x=\frac{1}{y}} \mathrm{d}y =$$

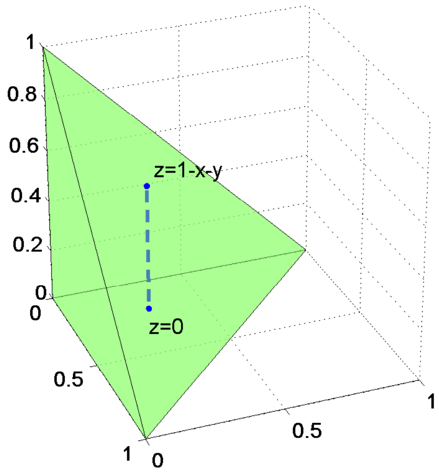
$$= \int_1^4 \frac{1}{2y^2} - 1 - \left(\frac{1}{2y^2} + 1\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_1^4 -2\,\mathrm{d}y = -6.$$

8. Kimetszünk egy darabot a $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ kockából az $x+y+z=1$ egyenlettel adott síkkal. Mekkora lesz a kimetszett rész térfogata?

Megoldás. Korábban megjegyeztük, hogy ha egy tartomány térfogatát akarjuk kiszámítani, akkor ott az azonosan 1 függvényt kell integrálni. A feladat értelmében azon az Ω tartományon kell integrálnunk, amely a következő módon van megadva:

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} .$$



17.3. ábra. A 9. feladatban szereplő integrálási tartomány. Minden rögzített x és y esetén a lehetséges z értékek 0 és $1 - x - y$ közt változnak

Itt tehát a fentiekkel összevetve (l. a függvénygrafikonok által határolt tartományok esetét, harmadik pont) $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 1-x$, $h_1(x, y) = 0$, $h_2(x) = 1-x-y$. Vagyis az abban a szakaszban szereplő képlet szerint a keresett integrált a következő módon számíthatjuk ki:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} [z]_{z=0}^{z=1-x-y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 1 - x - x + x^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= - \left[\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

9. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 4xz + y$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját azon a tetraéderen, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $x + y + z = 4$ egyenlettel adott síkok határolnak!

Megoldás. A feladat értelmében azon az Ω tartományon kell integrálnunk, ahol mindhárom változó alsó határa nulla, és ha először z szerint integrálunk, akkor $0 \le z \le 4 - x - y$ kell, hogy teljesüljön, továbbá $0 \le y \le 4 - x$-nak kell igaznak lennie. Vagyis Ω a következő módon van megadva:

$$\Omega = \{(x,y,z) : x \in [0,4], 0 \le y \le 4 - x, 0 \le z \le 4 - x - y\}.$$

Itt tehát a fentiekkel összevetve (l. a függvénygrafikonok által határolt tartományok esetét, harmadik pont) $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 4-x$, $h_1(x,y) = 0$, $h_2(x) = 4-x-y$. Vagyis az abban a szakaszban szereplő képlet szerint a keresett integrált a következő módon számíthatjuk ki:

$$\int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} 4xz + y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \int_0^{4-x} \left[2xz^2 + yz\right]_{z=0}^{z=4-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{4-x} 2x(4-x-y)^2 + y(4-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 \left[-\frac{2x(4-x-y)^3}{3} + \frac{y^2}{2}(4-x) - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=4-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 \frac{2x(4-x)^3}{3} + \frac{(4-x)^3}{6}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 \frac{2}{3}\cdot(64x - 48x^2 + 12x^3 - x^4) + \frac{(4-x)^3}{6}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\left(32x^2 - 16x^3 + 3x^4 - \frac{1}{5}x^5\right) - \frac{(4-x)^4}{24}\right]_0^4 = \frac{224}{5}.$$

10. Számítsuk ki az $f(x,y) = x - y$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját az origó középű 2 sugarú gömbön!

Megoldás. Az origó középpontú körlapon a polártranszformáció segítségével számítjuk ki az integrált. Ehhez megjegyezzük, hogy ha $f(x,y) = x - y$, akkor nyilván $f(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha)) = \rho\cos(\alpha) - \rho\sin(\alpha)$. A megfelelő szakaszban felírt képlet alapján a keresett integrál

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (\rho\cos(\alpha) - \rho\sin(\alpha)) \cdot \rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_0^2 \left[(\rho\sin(\alpha) + \rho\cos(\alpha)) \cdot \rho\right]_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \,\mathrm{d}\rho = \int_0^2 0 \,\mathrm{d}\rho = 0.$$

11. Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 + y^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját az origó közepű 4 sugarú körlapon!

Megoldás. Az origó középpontú körlapon a polártranszformáció segítségével számítjuk ki az integrált. Ehhez megjegyezzük, hogy ha $f(x, y) = x^2 + y^2$, akkor nyilván

$$f(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha)) = \rho^2\cos^2(\alpha) + \rho^2\sin^2(\alpha) = \rho^2.$$

A keresett integrál tehát

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2(\alpha) + \rho^2\sin^2(\alpha)) \cdot \rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3 \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_0^2 2\pi\rho^3 \,\mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{2^4}{4} = 8\pi.$$

12. Számítsuk ki az r sugarú gömb térfogatára vonatkozó formulát úgy, hogy azon az azonosan 1 függvényt integráljuk!

Megoldás. Az origó középpontú r suagrú gömbön a polártranszformációt az $f = 1$ függvényre alkalmazva kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \rho^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 \sin\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^2(\sin\frac{\pi}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} 2\rho^2 \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} 4\pi\rho^2 \,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \left[\frac{4\pi}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{r} = \frac{4\pi}{3}r^3.$$

17.3. Megoldandó feladatok

1. Számítsuk ki az $f(x,y) = xy + y - x - 1$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[-1,0] \times [-1,5]$ téglalapon!

2. Számítsuk ki az $f(x,y) = xy^2 + 1$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[-2,2] \times [0,1]$ téglalapon!

3. Számítsuk ki az $f(x,y) = e^{x-2y}$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ téglalapon!

4. Számítsuk ki az $f(x,y) = ye^{xy}$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,1] \times [-1,1]$ téglalapon!

5. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 1 - x - y$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ téglalapon!

6. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 1 - x - y$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,2] \times [-1,1] \times [0,1]$ téglán!

7. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = \frac{2x+y^2}{1+z^2}$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját a $[0,1] \times [0,2] \times [-1,1]$ téglán!

8. Számítsuk ki azon tartomány területét, amelyen $x \in (1,4)$, valamint a lehetséges y értékekre $\frac{1}{x} - 1 < y < \ln(x)$ teljesül!

9. Számítsuk ki az $f(x,y) = x^3 + y$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját azon a tartományon, amelyet az $x = 1$, az $x = 2$, az $y = \frac{1}{x}$ és az $y = x^2$ egyenlettel megadott görbék határolnak!

10. Számítsuk ki az $f(x,y) = x - \ln(y)$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját azon a tartományon, amelyet az $y = x^2$, és az $y = 4$ egyenlettel megadott görbék határolnak!

11. Mekkora annak a tetraédernek a térfogata, amelyet az $x = 0$, az $y = 0$, az $z = 0$ és az $x + 2y + 2z = 5$ egyenlettel megadott síkok határolnak?

12. Számítsuk a tetraéderen az $f(x,y,z) = xy - z^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

13. Számítsuk az origó középpontú 2 sugarú körön az $f(x,y) = x^2 + y^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

14. Számítsuk az origó középpontú 2 sugarú körön az $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

15. Számítsuk az origó középpontú 4 sugarú kör origó feletti felén az $f(x,y) = xy^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

16. Számítsuk az origó középpontú 4 sugarú kör origó feletti felén az $f(x,y) = x^2y^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

17. Számítsuk az origó középpontú 1 sugarú körön az $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

18. Számítsuk az origó középpontú 1 sugarú körön az

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

hozzárendeléssel adott függvény integrálját!

17.4. Megoldások

1. 3. **2.** 4. **3.** $\frac{1}{2}\left(e^2 - e - 1 + \frac{1}{e}\right)$. **4.** $e - 2 + \frac{1}{e}$.
5. 2. **6.** 0. **7.** $\frac{7\pi}{3}$. **8.** $6\ln(2)$.
9. $\frac{661}{60}$. **10.** $\frac{64}{9} - \frac{64}{3}\ln(2)$. **11.** $\frac{125}{12}$. **12.** $-\frac{625}{32}$.
13. 8π. **14.** 4π. **15.** 0. **16.** $\frac{256\pi}{3}$.
17. $\frac{4\pi}{5}$. **18.** π.

18. fejezet

Differenciálegyenletek

18.1. Elméleti összefoglaló

18.1. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli halmazt *nyílt halmaz*nak nevezzük, ha tetszőleges $(x, y) \in H$ esetén létezik olyan (x, y) középpontú pozitív sugarú körlap, mely része a H halmaznak.

A $H \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli halmazt *zárt halmaz*nak nevezzük, ha komplementere, az $\mathbb{R}^2 \setminus H$ halmaz nyílt halmaz.

A $H \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli halmaz *lezártja* a legszűkebb olyan síkbeli zárt halmaz, amelyik tartalmazza a H halmazt. A H halmaz lezártjának jele $\overline{H}$.

A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *összefüggő halmaz*nak nevezzük, ha nincs olyan $H = A \cup B$ nemüres diszjunkt halmazok uniójára való felbontása, melyre $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

Megjegyzések. A nyílt halmaz a határának egyetlen pontját sem tartalmazza, a zárt halmaz a határának minden pontját tartalmazza. Egy halmaz lezártja a halmaznak és a határának az egyesítése.

Az összefüggő halmaz szemléletesen olyan, amelyik nem esik szét egymással nem érintkező részhalmazokra.

18.2. Definíció. Ha f összefüggő nyílt halmazon értelmezett folytonos kétváltozós függvény, akkor az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ egyenletet *elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet*nek (röviden differenciálegyenlet) nevezzük. Az f függvényt a differenciálegyenlet *jobb oldal*ának hívjuk.

E differenciálegyenletnek megoldása a nyílt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható x függvény, ha minden $t \in D(x)$ esetén $(t, x(t)) \in D(f)$ és $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

18.3. Definíció. A differenciálegyenlet *maximális megoldás*a olyan megoldás, mely nem állítható elő semelyik megoldás valódi leszűkítéseként.

A differenciálegyenlet *általános megoldás*án a differenciálegyenlet maximális megoldásainak halmazát értjük.

18.4. Definíció. Az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ differenciálegyenlet *iránymező*jének nevezzük a $\{(t, \tilde{x}, f(t, \tilde{x})) \in \mathbb{R}^3 : (t, \tilde{x}) \in D(f)\}$ halmazt.

Minden $k \in R(f)$ esetén a differenciálegyenlet *irányvonal*ának (vagy *izoklíná*jának) hívjuk az $l_k := \{(t, \tilde{x}) \in D(f) : f(t, \tilde{x}) = k\}$ halmazt.

Megjegyzések. Az iránymezőt úgy szemléltethetjük, hogy a síkon $D(f)$ minden $(t, \tilde{x})$ pontjához „kis” $f(t, \tilde{x})$ meredekségű szakaszt húzunk.

Egy-egy irányvonal pontjaiban a megoldás azonos meredekségű.

18.5. Definíció. Ha f összefüggő nyílt halmazon értelmezett folytonos kétváltozós függvény és $(t_0, x_0) \in D(f)$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert *kezdetiérték-feladat*nak nevezzük.

Ennek megoldása az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ differenciálegyenlet olyan x megoldása, melyre $t_0 \in D(x)$ és $x(t_0) = x_0$.

Megjegyzések. Differenciálegyenlet megoldásakor az általános megoldást, kezdetiérték-feladat megoldásakor a maximális megoldásokat adjuk meg.

Az általános megoldást a primitív függvényeknél használt paraméteres alakban szokás felírni a halmaz helyett.

18.1. Tétel (Picard–Lindelöf-tétel)**.** *Ha f összefüggő nyílt halmazon értelmezett folytonos kétváltozós függvény, ennek létezik és folytonos a második változó szerinti parciális deriváltfüggvénye a $D(f)$ halmazon, akkor bármely $(t_0, x_0) \in D(f)$ esetén az*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatnak létezik olyan megoldása, hogy a kezdetiérték-feladat bármely megoldása annak leszűkítése.

Megjegyzés. A tétel úgy is fogalmazható, hogy a tett feltételek mellett pontosan egy maximális megoldása létezik a kezdetiérték-feladatnak.

18.6. Definíció. Ha f nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor az $\dot{x}(t) = f(t)$ differenciálegyenletet *közvetlenül integrálható differenciálegyenlet*nek hívjuk.

18.1. Állítás. *Az $\dot{x}(t) = f(t)$ közvetlenül integrálható differenciálegyenlet általános megoldása $x = \int f$.*

18.7. Definíció. Ha g és h egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor az $\dot{x}(t) = g(t)\, h(x(t))$ differenciálegyenletet *szétválasztható változójú differenciálegyenlet*nek nevezzük.

Megjegyzés. Ha a h függvény nem veszi fel a nulla értéket, akkor a fenti szétválasztható változójú differenciálegyenletben a jobb oldal második tényezőjével osztva, majd mindkét oldal primitív függvényeit képezve implicit egyenletet kapunk a differenciálegyenlet megoldásaira.

18.8. Definíció. Ha a és b a közös J nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor a $J \times \mathbb{R}$ halmazon definiált jobb oldallal az $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$ differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük. A b függvényt *inhomogén tag*nak hívjuk.

*Homogén*nek mondjuk a lineáris differenciálegyenletet, ha az inhomogén tagja nulla konstans függvény, máskor *inhomogén*nek hívjuk.

18.2. Állítás. *Az $\dot{x}_h(t) = a(t)x_h(t)$ homogén lineáris differenciálegyenlet egyben szétválasztható változójú is, az általános megoldása $x_h(t) = Ce^{A(t)}$, $D(x_h) = D(a)$, $C \in \mathbb{R}$, ahol az A függvény az a függvény egyik primitív függvénye.*

Az $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$ lineáris differenciálegyenlet általános megoldása pedig $x(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$, $D(x) = D(a)$.

18.3. Állítás. *Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet minden megoldását előállíthatjuk az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy adott (ún.* partikuláris*) megoldásának és a homogén lineáris differenciálegyenlet valamelyik megoldásának összegeként.*

Megjegyzés. Egy lineáris algebrai tétel szerint az inhomogén lineáris egyenlet minden megoldása az inhomogén lineáris egyenlet egy adott megoldásának és a homogén lineáris egyenlet valamely megoldásának összege. Ennek differenciálegyenletekre való alkalmazása a 18.3. Állítás.

18.4. Állítás (Lagrange-módszer, az állandó variálása)**.** *Legyen a és b a közös J nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Az $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet összes maximális megoldása*

$$x(t) = C(t)e^{A(t)}, \quad D(x) = J$$

alakú, ahol C a J nyílt intervallumon értelmezett differenciálható függvény és az A függvény az a függvény egyik primitív függvénye.

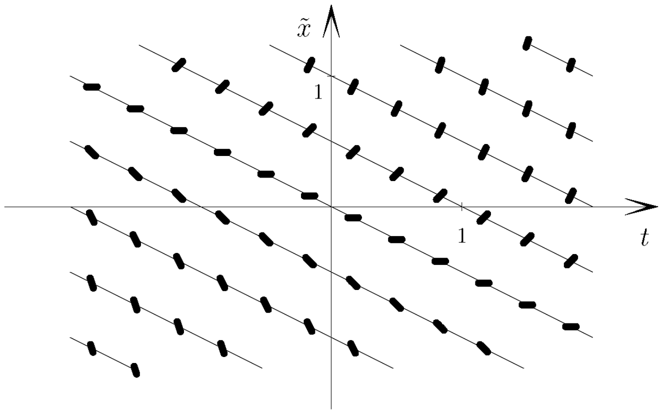
Megjegyzés. A megfelelő C függvényeket meghatározhatjuk úgy, hogy a keresett x megoldás fenti alakját behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, majd megoldjuk a C függvényre kapott közvetlenül integrálható differenciálegyenletet.

18.2. Kidolgozott feladatok

1. Rajzolja meg az $\dot{x}(t) = 2x(t) + t$ differenciálegyenlet iránymezőjét!

Megoldás. A jobb oldal értelmezési tartománya legyen $\mathbb{R}^2$. A differenciálegyenlet néhány irányvonala

$$\begin{aligned}
l_0 &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t\},\\
l_1 &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\},\\
l_2 &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t + 1\},\\
l_3 &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{3}{2}\},\\
l_{-1} &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t - \tfrac{1}{2}\},\\
l_{-2} &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t - 1\},\\
l_{-3} &= \{(t,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = -\tfrac{1}{2}\,t - \tfrac{3}{2}\}.
\end{aligned}$$



18.1. ábra. Az $\dot{x}(t) = 2x(t) + t$ differenciálegyenlet iránymezője

Megjegyzés. A feladatban lineáris differenciálegyenlet szerepel, melyet megoldunk a 11. feladatban. A megoldás $x(t) = \left(-\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\right) + Ce^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$, minden maximális megoldás értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.

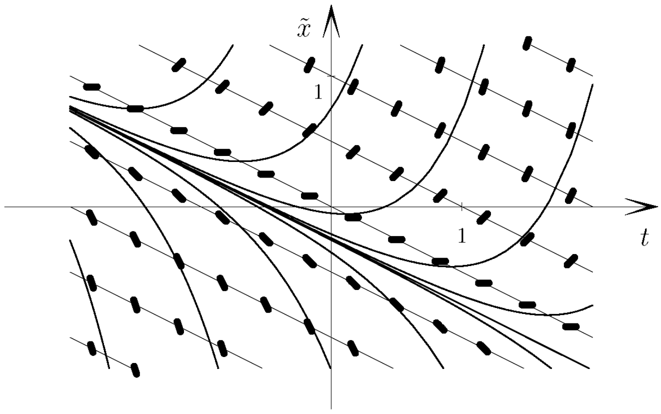
2. Oldja meg a következő közvetlenül integrálható differenciálegyenleteket!

(a) $\dot{x}(t) = 2t^3 - t^2 + 3t + 1$. (b) $\dot{x}(t) = \sqrt{t}$. (c) $\dot{x}(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t) + 2}$.

Megoldás.

(a) $D(x) = \mathbb{R}$ és $x(t) = \displaystyle\int (2t^3 - t^2 + 3t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,t^4 - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{3}{2}\,t^2 + t + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $D(x) = \mathbb{R}^+$ és $x(t) = \displaystyle\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + C$, $C \in \mathbb{R}$.



18.2. ábra. Az $\dot{x}(t) = 2x(t) + t$ differenciálegyenlet iránymezője és megoldásai

(c) $D(x) = \mathbb{R}$ és $x(t) = \displaystyle\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)+2}\,\mathrm{d}t = -\ln(\cos(t)+2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

A **3.–6.** feladatban oldja meg a szétválasztható változójú differenciálegyenletet!

3. $\dot{x}(t) = \dfrac{t}{e^{x(t)}}$. **4.** $\dot{x}(t) = -x(t)$. **5.** $\dot{x}(t) = \dfrac{2x(t)-1}{t}$.

6. $\dot{x}(t) = \dfrac{t^2\sqrt{x^2(t)+1}}{1+t^3}$.

Megoldás.

3. A differenciálegyenlet jobb oldala $f(t,\tilde{x}) := \dfrac{t}{e^{\tilde{x}}}$, $D(f) := \mathbb{R}^2$. A teljes $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett megoldásokat keresünk.

Klasszikus jelölések nélkül:	Klasszikus jelölésekkel:
$\dot{x}(t) = \dfrac{t}{e^{x(t)}}$,	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t}{e^x}$,
$e^{x(t)}\,\dot{x}(t) = t$,	$e^x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$,
$\int e^{x(t)}\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t$,	$\int e^x\,\mathrm{d}x = \int t\,\mathrm{d}t$,
$e^{x(t)} = \dfrac{t^2}{2} + C,\quad C \in \mathbb{R}.$	$e^x = \dfrac{t^2}{2} + C,\quad C \in \mathbb{R}.$

A kapott implicit egyenlet $\frac{t^2}{2} + C > 0$ esetén explicitté tehető, és az

$$x(t) = \ln\left(\frac{t^2}{2} + C\right)$$

megoldást kapjuk $C > 0$ esetén az $\mathbb{R}$ halmazon, $C \le 0$ esetén pedig a $\left(-\infty, -\sqrt{-2C}\right)$ vagy a $\left(\sqrt{-2C}, +\infty\right)$ intervallumon.

4. Először keressük meg azokat az egész $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett megoldásokat, melyek nem veszik fel a nulla értéket!

Klasszikus jelölések nélkül:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t), \\ \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= -1, \\ \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,\mathrm{d}t &= \int (-1)\,\mathrm{d}t, \\ \ln(|x(t)|) &= -t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |x(t)| &= e^{-t+C} = e^C e^{-t}. \end{aligned}$$

Klasszikus jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -x, \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= (-1)\,\mathrm{d}t, \\ \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int (-1)\,\mathrm{d}t, \\ \ln(|x|) &= -t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |x| &= e^{-t+C} = e^C e^{-t}. \end{aligned}$$

Most olyan megoldásokat keresünk, melyek értéke sehol sem nulla. A Bolzano-tétel szerint ezek mindegyike a teljes értelmezési tartományán pozitív vagy mindenütt negatív. Az első esetben $x(t) = e^C e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, a második esetben $x(t) = -e^C e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$. Mivel az e alapú exponenciális függvény értékkészlete $\mathbb{R}^+$, minden pozitív és minden negatív valós szám együttható lehet.

Másodszor keressük meg azokat a teljes valós számhalmazon értelmezett megoldásokat, melyek felveszik a nulla értéket! Ha az x megoldás értéke a $t_0 \in \mathbb{R}$ helyen nulla, akkor x megoldása az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) \\ x(t_0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatnak. Ennek megoldása a teljes $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett nulla konstansfüggvény, és a Picard–Lindelöf-tétel szerint más maximális megoldás nincs.

Ezért a differenciálegyenlet általános megoldása $x(t) = Ke^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.

5. Határozzuk meg először azokat az $\mathbb{R}^+$ vagy $\mathbb{R}^-$ halmazon értelmezett x megoldásokat, melyekre a $2x - 1$ függvény nem veszi fel a nulla értéket!

Klasszikus jelölések nélkül:	Klasszikus jelölésekkel:
$\dot{x}(t) = \dfrac{2x(t)-1}{t},$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2x-1}{t},$
$\dfrac{\dot{x}(t)}{2x(t)-1} = \dfrac{1}{t},$	$\dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$
$\displaystyle\int \frac{\dot{x}(t)}{2x(t)-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$	$\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$
$\dfrac{1}{2}\ln(\lvert 2x(t)-1\rvert) = \ln(\lvert t\rvert) + C,$	$\dfrac{1}{2}\ln(\lvert 2x-1\rvert) = \ln(\lvert t\rvert) + C,$
$\ln(\lvert 2x(t)-1\rvert) = 2\ln(\lvert t\rvert) + 2C,$	$\ln(\lvert 2x-1\rvert) = 2\ln(\lvert t\rvert) + 2C,$
$\lvert 2x(t)-1\rvert = e^{2\ln(\lvert t\rvert)+2C},$	$\lvert 2x-1\rvert = e^{2\ln(\lvert t\rvert)+2C},$
$\lvert 2x(t)-1\rvert = e^{2C}t^2.$	$\lvert 2x-1\rvert = e^{2C}t^2.$

Az x megoldás folytonossága miatt $2x-1$ állandó előjelű. Ha pozitív, akkor

$$x(t) = \frac{e^{2C}}{2}\,t^2 + \frac{1}{2}, \quad t \in D(x),$$

ha negatív, akkor

$$x(t) = -\frac{e^{2C}}{2}\,t^2 + \frac{1}{2}, \quad t \in D(x).$$

Mivel az e alapú exponenciális függvény értékkészlete $\mathbb{R}^+$, t^2 együtthatója tetszőleges pozitív vagy negatív valós szám lehet.

Ezután keressük meg azokat az $\mathbb{R}^+$ vagy az $\mathbb{R}^-$ halmazon értelmezett x megoldásokat, melyekre $2x-1$ felveszi a nulla értéket, vagyis x az $\frac{1}{2}$ értéket! Ha az x megoldás értéke a $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ helyen $\frac{1}{2}$, akkor x megoldása az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tfrac{2x(t)-1}{t} \\ x(t_0) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatnak. Ennek megoldása az $\mathbb{R}^+$, ill. az $\mathbb{R}^-$ halmazon értelmezett $\frac{1}{2}$ konstans függvény, és a Picard–Lindelöf-tétel szerint más maximális megoldás nincs.

Ezért a differenciálegyenlet általános megoldása $x(t) = Kt^2 + \frac{1}{2}$, $K \in \mathbb{R}$.

6. A differenciálegyenlet nincs értelmezve $t = -1$ esetén. Ha a jobb oldal

$$f(t,\tilde{x}) := \frac{t^2\sqrt{\tilde{x}^2+1}}{1+t^3}, \quad D(f) := (-\infty,-1)\times\mathbb{R},$$

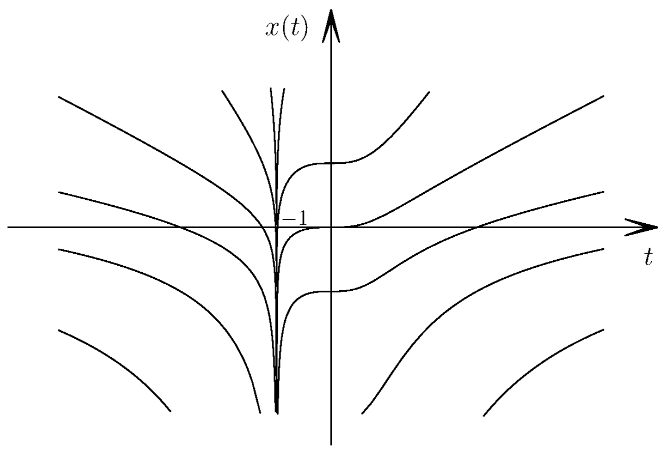
akkor a $(-\infty,-1)$ intervallumon értelmezett megoldásokat keresünk, ha pedig a jobb oldal értelmezési tartománya a $(-1,+\infty)\times\mathbb{R}$ halmaz, akkor olyanokat, melyek a $(-1,+\infty)$ intervallumon vannak értelmezve. Az egyenletet klasszikus jelöléseket használva oldjuk meg:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{t^2\sqrt{x^2+1}}{1+t^3}, \\
\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t, \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t, \\
\operatorname{arsh}(x) &= \frac{1}{3}\ln(|1+t^3|)+C, \\
x &= \operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\ln(|1+t^3|)+C\right).
\end{aligned}$$

Tehát

$$x(t) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\ln(|1+t^3|)+C\right), \quad C\in\mathbb{R},$$

ahol $D(x) = (-\infty,-1)$ vagy $D(x) = (-1,+\infty)$.



18.3. ábra. Az $\dot{x}(t) = \dfrac{t^2\sqrt{x^2(t)+1}}{1+t^3}$ differenciálegyenlet megoldásai

7. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(a) $\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x^2(t)\\ x(0) &= 2\end{aligned}\right\}.$ (b) $\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x^2(t)\\ x(\pi) &= 0\end{aligned}\right\}.$ (c) $\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x^2(t)\\ x\left(\frac{1}{4}\right) &= -1\end{aligned}\right\}.$

Megoldás. Mindhárom kezdetiérték-feladatnak egyetlen maximális megoldása van a Picard–Lindelöf-tétel miatt.

Először megoldjuk a szétválasztható változójú $\dot{x}(t) = x^2(t)$ differenciálegyenletet. Klasszikus jelöléseket használunk. Ha a keresett x megoldás értéke sehol sem nulla, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x^2, \\
\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= 1\,\mathrm{d}t, \\
\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}t, \\
-\frac{1}{x} &= t + C, \\
x(t) = x &= -\frac{1}{t+C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ezzel a hozzárendelési szabállyal maximális megoldást akkor kapunk, ha a megoldás értelmezési tartománya $(-\infty, -C)$ vagy $(-C, +\infty)$.

A Picard–Lindelöf-tétel szerint egyetlen maximális megoldásnak lehet nulla értéke, ez az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett nulla konstans függvény.

(a) Ha $x(0) = 2$, akkor $C = -\frac{1}{2}$, a maximális megoldás $x(t) = \dfrac{2}{1-2t}$, $D(x) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Ha $x(\pi) = 0$, akkor a maximális megoldás a valós halmazok halmazán értelmezett nulla konstans függvény.

(c) Ha $x\left(\frac{1}{4}\right) = -1$, akkor $C = \frac{3}{4}$, ezért a maximális megoldás $x(t) = -\dfrac{4}{4t+3}$, $D(x) = \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

A **8.**–**9.** feladatban helyettesítéssel oldja meg differenciálegyenletet!

8. $\dot{x}(t) = (x(t) + t)^2$.

9. $\dot{x}(t) = \dfrac{x^3(t) + t^3}{t\,x^2(t)}$.

Megoldás.

8. Legyen x a differenciálegyenlet megoldása és legyen $y(t) := x(t) + t$, $D(y) := D(x)$ új ismeretlen függvény. Ekkor $x(t) = y(t) - t$ és $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - 1$, $t \in D(x)$ alapján y megoldása az $\dot{y}(t) = y^2(t) + 1$ szétválasztható változójú differenciálegyenletnek.

A kapott differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= y^2(t) + 1, \\
\frac{1}{y^2(t)+1}\,\dot{y}(t) &= 1, \\
\int \frac{1}{y^2(t)+1}\,\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t &= \int 1\,\mathrm{d}t, \\
\operatorname{arctg}(y(t)) &= t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
y(t) &= \operatorname{tg}(t+C), \quad D(y) = \Big(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\Big).
\end{aligned}$$

Az eredeti differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = \operatorname{tg}(t+C) - t, \quad D(x) = \Big(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\Big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

9. Az egyenlet nem értelmes sem $t = 0$, sem $x(t) = 0$ esetén, ezért a jobb oldal értelmezési tartománya legyen valamelyik nyílt síknegyed. Keressünk olyan x megoldásokat, melyek értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$ vagy $\mathbb{R}^-$, és nem veszik fel a nulla értéket! A differenciálegyenlet

$$\dot{x}(t) = \frac{x^3(t) + t^3}{t\,x^2(t)} = \frac{x(t)}{t} + \frac{t^2}{x^2(t)}$$

alakú, így az $y(t) := \dfrac{x(t)}{t}$, $D(y) := D(x)$ új ismeretlen függvényre $x(t) = t\,y(t)$ és $\dot{x}(t) = y(t) + t\,\dot{y}(t)$, $t \in D(x)$. Ennek következtében y megoldása az $\dot{y}(t) = \frac{1}{t\,y^2(t)}$ szétválasztható változójú differenciálegyenletnek.

Az y függvényre vonatkozó differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \frac{1}{t\,y^2(t)}, \\
y^2(t)\,\dot{y}(t) &= \frac{1}{t}, \\
\int y^2(t)\,\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \\
\frac{1}{3}\,y^3(t) &= \ln(|t|) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
y^3(t) &= 3\ln(|t|) + 3C = 3\ln(|t|) + K, \quad K \in \mathbb{R}, \\
y(t) &= \sqrt[3]{3\ln(|t|) + K}.
\end{aligned}$$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$x(t) = t\,y(t) = t\sqrt[3]{3\ln(|t|) + K}, \quad K \in \mathbb{R},$$

a maximális megoldások értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$ vagy $\mathbb{R}^-$.

A **10.–11.** feladatban oldja meg a lineáris differenciálegyenletet!

10. $\dot{x}(t) = \operatorname{ctg}(t)\,x(t) + \dfrac{1}{\sin(t)}$. **11.** $\dot{x}(t) = 2x(t) + t$.

Megoldás.

10. Az egyenlet jobb oldala nincs értelmezve $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén, ezért a differenciálegyenlet jobb oldala legyen adott $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$f(t, \tilde{x}) := \operatorname{ctg}(t)\,\tilde{x} + \frac{1}{\sin(t)}, \quad D(f) := \big(k\pi, (k+1)\pi\big) \times \mathbb{R}.$$

A homogén lineáris egyenlet $\dot{x}_h(t) = \operatorname{ctg}(t)\,x_h(t)$, melyben az együtthatófüggvény $a(t) := \operatorname{ctg}(t)$, $D(a) := \big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, primitív függvényei

$$\int \operatorname{ctg}(t)\,\mathrm{d}t = \ln(|\sin(t)|) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Az inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása a 18.2. Állítás alapján

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\ln(|\sin(t)|)} \int \frac{1}{\sin(t)}\, e^{-\ln(|\sin(t)|)}\,\mathrm{d}t = |\sin(t)| \int \frac{1}{\sin(t)}\,\frac{1}{|\sin(t)|}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sin(t) \int \frac{1}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sin(t)\,\big(-\operatorname{ctg}(t) + K\big) = \\ &= -\cos(t) + K\sin(t), \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$ intervallumon.

Megjegyzések. A homogén lineáris egyenlet általános megoldása a 18.2. Állítás szerint

$$x_h(t) = Le^{\ln(|\sin(t)|)} = L|\sin(t)| = M\sin(t), \quad L, M \in \mathbb{R}$$

a $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$ intervallumon, mert ott a szinuszfüggvény állandó előjelű, annak előjelétől függően $M := L$, ill. $M := -L$.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldására alkalmazhatjuk Lagrange módszerét, és a megoldásokat megkapjuk

$$x(t) = M^*(t)\sin(t), \quad D(x) = D(M^*) = \big(k\pi, (k+1)\pi\big)$$

alakban is, ahol M^* folytonosan differenciálható függvény.

Mivel $t \in D(x)$ esetén $\dot{x}(t) = \dot{M}^*(t)\sin(t) + M^*(t)\cos(t)$, az M^* függvényre

$$\begin{aligned}
\dot{M}^*(t)\sin(t) + M^*(t)\cos(t) = \operatorname{ctg}(t)M^*(t)\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)},\\
\dot{M}^*(t) = \frac{1}{\sin^2(t)},\\
M^*(t) = \int \frac{1}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}(t) + N, \quad N \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Így szintén az

$$x(t) = \big(-\operatorname{ctg}(t) + N\big)\sin(t) = -\cos(t) + N\sin(t), \quad N \in \mathbb{R}$$

eredményt kapjuk a $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$ intervallumon.

11. A jobb oldal $f(t,\tilde{x}) := 2\tilde{x} + t$, $D(f) := \mathbb{R}^2$, ezért a maximális megoldások a teljes $\mathbb{R}$ halmazon vannak értelmezve. A homogén lineáris egyenlet $\dot{x}_h(t) = 2x_h(t)$. Ha ennek az x_h megoldása mindenütt értelmezve van és sehol sem veszi fel a nulla értéket, akkor klasszikus jelölésekkel

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t} &= 2x_h,\\
\frac{1}{x_h}\,\mathrm{d}x_h &= 2\,\mathrm{d}t,\\
\int \frac{1}{x_h}\,\mathrm{d}x_h &= \int 2\,\mathrm{d}t,\\
\ln(|x_h|) &= 2t + C,\\
|x_h| &= e^{2t+C} = e^C e^{2t}.
\end{aligned}$$

Ezek az x_h megoldások állandó előjelűek, továbbá a Picard–Lindelöf-tétel következtében az egyetlen nulla értéket is felvevő mindenütt értelmezett megoldás az $x_h(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ konstans függvény, így a homogén lineáris egyenlet általános megoldása $x_h(t) = Ke^{2t}$, $K \in \mathbb{R}$, ahol $D(x_h) = \mathbb{R}$.

Ezután keressük az inhomogén egyenlet megoldásait a homogén megoldásaihoz hasonló $x(t) = K^*(t)\,e^{2t}$ alakban, ahol K^* a valós számok halmazán értelmezett folytonosan differenciálható függvény. E szorzatot és ennek

$$\dot{x}(t) = \dot{K}^*(t)\,e^{2t} + K^*(t)\,e^{2t} \cdot 2$$

deriváltját az inhomogén egyenletbe helyettesítve minden $t \in \mathbb{R}$ esetén fennáll

$$\dot{K}^*(t)\,e^{2t} + 2K^*(t)\,e^{2t} = 2K^*(t)\,e^{2t} + t,$$

$$\dot{K}^*(t)\,e^{2t} = t,$$

$$\dot{K}^*(t) = t\,e^{-2t},$$

ezért parciális integrálással

$$K^*(t) = \int t\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = t\,\frac{e^{-2t}}{-2} - \int 1\cdot\frac{e^{-2t}}{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,t\,e^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \\ = \left(-\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\right)e^{-2t} + L, \quad L \in \mathbb{R}.$$

Végül az inhomogén egyenlet megoldása:

$$x(t) = K^*(t)\,e^{2t} = \left[\left(-\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\right)e^{-2t} + L\right]e^{2t} = \\ = \left(-\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\right) + Le^{2t}, \quad L \in \mathbb{R},$$

minden maximális megoldás értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.

Megjegyzés. Ezt a differenciálegyenletet az $y(t) := 2x(t)+t$, $D(y) := D(x)$ lineáris helyettesítéssel visszavezethetjük az $\dot{y}(t) = 2y(t) + 1$ szétválasztható változójú differenciálegyenletre, melynek általános megoldása $y(t) = Ce^{2t} - \frac{1}{2}$, $D(y) = \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$. Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását ezen az úton is megkapjuk:

$$x(t) = \frac{1}{2}\big(y(t) - t\big) = \frac{1}{2}\,Ce^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{t}{2}, \quad D(x) = \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

12. Egy 15 literes jól kevert tartály tele van sóoldattal. Ebbe percenként 4 liter tiszta víz áramlik állandó sebességgel, és ugyanannyi oldat folyik ki belőle. Határozza meg a tartálybeli só mennyiségét az idő függvényében! Mennyi idő alatt ürül ki a tartályból az eredeti sómennyiség fele?

Megoldás. Jelölje $x(t)$ a tartálybeli só mennyiségét a t időpontban, az időt percekben mérjük. Tegyük fel, hogy a keresett $x\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható. E függvény monoton csökken, hiszen sómentes víz folyik be a tartályba. A t_0 és t ($t_0, t \in [0,+\infty)$, $t_0 < t$) időpont közötti $\Delta t := t - t_0$ idő alatt befolyó víz és a kifolyó sóoldat térfogata is $4\Delta t$ liter. Bármely $t \in [0,+\infty)$ időpontban a sóoldat sűrűsége $\frac{x(t)}{15}$, ezért az említett Δt idő alatt a tartálybeli só tömegének $\Delta x := x(t) - x(t_0)$ változására

$$-\frac{x(t_0)}{15}\cdot 4\Delta t \le \Delta x \le -\frac{x(t)}{15}\cdot 4\Delta t,$$

majd
$$-\frac{4}{15}\,x(t_0) \le \frac{\Delta x}{\Delta t} \le -\frac{4}{15}\,x(t).$$
Rögzített $t_0 \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(t_0)$ és $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$, ebből következik
$$\dot{x}(t_0) = -\frac{4}{15}\,x(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}^+.$$
A szétválasztható változójú differenciálegyenletet megoldva a tartálybeli só mennyisége az idő függvényében
$$x(t) = x(0)\,e^{-\frac{4}{15}t}, \quad t \in [0, +\infty).$$
Ha T idő alatt feleződik meg a só mennyisége, akkor
$$\frac{1}{2}\,x(0) = x(T) = x(0)\,e^{-\frac{4}{15}T}.$$
Feltéve, hogy kezdetben volt só a tartályban, azt kapjuk, hogy $T = \frac{15}{4}\ln(2) \approx 2{,}6$ perc alatt ürül ki a tartályból az eredeti sómennyiség fele.

13. A kemencéből kivett kenyér hőmérséklete kezdetben 120 °C, 30 perc múlva 50 °C. A levegő hőmérséklete 20 °C. Tegyük fel, hogy a kenyér hűlésének sebessége minden időpontban egyenesen arányos a kenyér és a levegő hőmérsékletének különbségével! Adja meg a kenyér hőmérsékletét a hűlés kezdetétől eltelt idő függvényében!

Megoldás. Mérjük az időt órákban! Legyen $x(t)$ a kenyér hőmérséklete a t időpontban, és tegyük fel, hogy $x\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A kenyér hűlésének sebessége a t időpontban $\dot{x}(t)$. Ha a feladatban szereplő egyenes arányosság arányossági tényezője $a \in \mathbb{R}$, akkor a keresett x függvényre
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,(x(t) - 20) \\ x(0) &= 120 \\ x\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 50 \end{aligned}\right\}.$$
A kapott szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása
$$x(t) = Ke^{at} + 20, \quad K \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$
A két mellékfeltételt felhasználva kapható $K = 100$ és $a = 2\ln\left(\frac{3}{10}\right)$, tehát a kenyér hőmérséklete a hűlés kezdetétől eltelt t idő függvényében
$$x(t) = 100\left(\frac{3}{10}\right)^{2t} + 20, \quad t \in [0, +\infty).$$

18.3. Megoldandó feladatok

1. Rajzolja meg az $\dot{x}(t) = x(t) - 2t$ differenciálegyenlet iránymezőjét!

A **2.–10.** feladatban oldja meg a differenciálegyenletet!

2. $\dot{x}(t) = \ln(t) + 1$. **3.** $\dot{x}(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$. **4.** $\dot{x}(t) = 5x(t) - 2$.

5. $\dot{x}(t) = \dfrac{1-2x(t)}{\sqrt{t}}$. **6.** $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t}$. **7.** $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{x(t)\,(4+t^2)}$.

8. $\dot{x}(t) = x(t) + t$. **9.** $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t} + 2t - 1$. **10.** $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t+1} + 2(t+1)^2$.

A **11.–13.** feladatban oldja meg a kezdetiérték-feladatot!

11. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = \cos(t)\\ x(\pi) = 4\end{array}\right\}$. **12.** $\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = 2 - 3x(t)\\ x(0) = 1\end{array}\right\}$. **13.** $\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = \dfrac{x^2(t) + t^2}{t\,x(t)}\\ x(1) = -2\end{array}\right\}$.

14. Mutassa meg, hogy az $\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}\\ x(0) = 0\end{array}\right\}$ kezdetiérték-feladatnak nem létezik olyan megoldása, amelyiknek leszűkítése e kezdetiérték-feladat bármely megoldása!

15. A rádium bomlási sebessége minden időpontban egyenesen arányos annak pillanatnyi tömegével, felezési ideje 1590 év. A rádium kezdeti mennyiségének hány százaléka bomlik el 350 év alatt?

16. Egy élesztőgomba-tenyészetben a gomba mennyisége annak pillanatnyi mennyiségével egyenes arányban növekszik. Ha 40 perc alatt e mennyiség megduplázódott, a kezdéstől számítva mennyi idő múlva lesz a gomba mennyisége az eredeti ötszöröse?

18.4. Megoldások

1. A jobb oldal értelmezési tartománya legyen $\mathbb{R}^2$. A differenciálegyenlet irányvonalai $l_k = \{(t, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = 2t + k\}$, $k \in \mathbb{R}$.

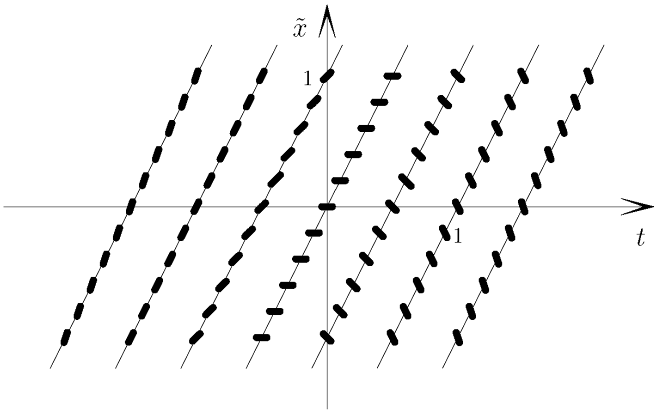
2. $x(t) = t\ln(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}^+$.

3. $x(t) = t - 2\ln(|t+1|) + C$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = (-\infty, -1)$ vagy $D(x) = (-1, +\infty)$.

4. $x(t) = \frac{2}{5} + Ce^{5t}$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}$.

5. $x(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-4\sqrt{t}}$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}^+$.

6. $x(t) = Ct$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}^+$ vagy $D(x) = \mathbb{R}^-$.



18.4. ábra. Az $\dot{x}(t) = x(t) - 2t$ differenciálegyenlet iránymezője

Megjegyzés. A $t\dot{x}(t) = x(t)$ implicit differenciálegyenlet megoldása $x(t) = Ct$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}$.

7. $x_{1,C}(t) = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C}$ és $x_{2,C}(t) = -\sqrt{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C}$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x_{1,C}) = D(x_{2,C}) = (-2\operatorname{tg}(C), +\infty)$.

8. $x(t) = Ce^t - t - 1$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}$.

9. $x(t) = 2t^2 - t\ln(|t|) + Ct$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}^+$ vagy $D(x) = \mathbb{R}^-$.

10. $x(t) = (t+1)^3 + C(t+1)$, $C \in \mathbb{R}$, ahol $D(x) = (-\infty, -1)$ vagy $D(x) = (-1, +\infty)$.

11. $x(t) = \sin(t) + 4$, ahol $D(x) = \mathbb{R}$.

12. $x(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}$, ahol $D(x) = \mathbb{R}$.

13. $x(t) = -t\sqrt{2\ln(t) + 4}$, ahol $D(x) = (e^{-2}, +\infty)$.

14. A kezdetiérték-feladatnak megoldása az $x_1(t) := 0$, $D(x_1) := \mathbb{R}$ konstans függvény és az

$$x_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & \text{ha } t \geq 0, \\ -\frac{1}{4}t^2, & \text{ha } t < 0, \end{cases} \qquad D(x_2) := \mathbb{R}$$

függvény is, ezért nem létezik olyan megoldás, amelyiknek leszűkítése a kezdetiérték-feladat bármely megoldása.

15. Mérjük az időt (t) években, a megfigyelés kezdete legyen a nulla időpont! A rádium mennyisége a t időpontban $x(t) = x(0)\,2^{-\frac{t}{1590}}$, $t \in [0, +\infty)$.

A megfigyelés kezdete után 350 évvel a rádium kezdeti mennyiségének $2^{-\frac{350}{1590}} \cdot 100 \approx 85{,}85$ százaléka maradt meg, 14,15 százaléka bomlott el.

16. Mérjük az időt (t) percekben, a megfigyelés kezdete a nulla időpont legyen! A gomba mennyisége a t időpontban $x(t) = x(0)\, 2^{\frac{t}{40}}$, $t \in [0, +\infty)$. A kezdéstől számítva $\frac{40 \ln(5)}{\ln(2)} \approx 92{,}88$ perc múlva lesz a gomba mennyisége a kezdeti ötszöröse, ha kezdéskor volt gomba a tenyészetben, azaz $x(0) \neq 0$.