

DISZKRÉT MATEMATIKAI FELADATOK



**Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi
oktatásához sorozat**

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

CSIKVÁRI PÉTER
NAGY ZOLTÁN LÓRÁNT
PÁLVÖLGYI DÖMÖTÖR

DISZKRÉT MATEMATIKAI FELADATOK



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

© 2014–2019, Csikvári Péter, Nagy Zoltán Lóránt, Pálvölgyi Dömötör,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Lektorálta: Simonyi Gábor

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 262 0

Készült a Typotex Kiadó (<http://www.typotex.hu>) gondozásában

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt
keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszachenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai
Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: Gráfelmélet, leszámlálás, algoritmusok, valószínűségi és (lineáris) algebrai módszerek kombinatorikában és gráfelméletben.

ÖSSZEFOGLALÁS: Ennek a jegyzetnek a célja, hogy segítséget nyújtson az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tanuló matematika BSc és MSc hallgatóknak a Számítógéptudományi tanszék által oktatott kurzusokhoz, elsősorban a Véges matematika, Diszkrét matematika és Algoritmuselmélet tárgyakhoz. A feladatok nagyrészen az elmúlt évek feladatsoraiból kerülnek ki és megoldások is tartoznak hozzájuk, ezzel a gyakorlatokra és ZH-kra való felkészülést könnyítik meg mind a hallgatóknak, mind a tanároknak. Az érintett témák a gráfelmélet, leszámlálás, algoritmusok, valószínűségi és (lineáris) algebrai módszerek kombinatorikában és gráfelméletben. A feladatokat eszerint csoportosítottuk, a megoldások pedig a könyv második felében szerepelnek.

Tartalomjegyzék

1. Gráfelmélet	5
1.1. Összefüggőség, feszítőfák	5
1.2. Fák	6
1.3. Körkeresés	6
1.4. Vegyes feladatok	7
1.5. Többszörös összefüggőség, Menger-tétel	7
1.6. Fülfelbontás	9
1.7. Párosítási feladatok páros gráfokban	9
1.8. Független élhalmazok	11
1.9. Lefogások, független halmazok	12
1.10. Síkgráfok	13
1.11. Tournamentek	15
1.12. Körök, utak irányított gráfokban	16
1.13. A Turán-tétel és alkalmazásai	16
1.14. Cseresznyék	17
1.15. Színezési feladatok	19
1.16. Élszínezések	20
1.17. Síkgráfok színezése	20
1.18. Listaszínezések	21
1.19. Perfekt gráfok	21
1.20. Sorrend szerinti színezések	22
2. Leszámlálási feladatok	23
2.1. Bevezető feladatok	23
2.2. Szita	24
2.3. Binomiális együttthatók és generátorfüggvények	29
2.4. Lineáris rekurziók	33
2.5. Fibonacci-sorozat	33
2.6. Catalan-számok	35
2.7. Stirling számok	36

2.8. Partíciók	40
3. Algebrai módszerek a kombinatorikában	43
3.1. Lineáris algebrai módszerek	43
3.2. Polinom módszer	44
3.3. A kombinatorikus Nullstellensatz alkalmazásai	45
4. Spektrálgráfelméleti feladatok	49
4.1. Bevezető feladatok	49
4.2. Gráfszorzatok, gráftranszformációk	52
4.3. Spektrálsugár-becslések	53
4.4. Gráfparaméterek becslései	54
4.5. Erősen reguláris gráfok	55
4.6. Laplace-sajátértékek	56
5. Valószínűségszámítási módszerek a kombinatorikában	59
5.1. Várható érték és változtatott véletlen	59
5.2. Második momentum módszer	63
5.3. A Lovász-féle lokál-lemma alkalmazásai	65
6. Algoritmuselmélet	67
6.1. Rekurziók	69
6.2. Rendezés	70
6.3. Számolás	71
6.4. Diszkrét Fourier-transzformáció	72
6.5. Stabil párosítások	73
6.6. Elemi Gráfalgoritmusok	74
6.7. Dinamikus programozás	76
6.8. Folyamok	77
6.9. Approximáció	79
6.10. Kódolás	79
7. Gráfelmélet – megoldások	81
7.1. Összefüggőség, feszítőfák	81
7.2. Fák	82
7.3. Körkeresés	83
7.4. Vegyes feladatok	84
7.5. Többszörös összefüggőség, Menger-tétel	85
7.6. Fűlfelbontás	87
7.7. Párosítási feladatok páros gráfokban	88
7.8. Független élhalmazok	91
7.9. Lefogások, független halmazok	93
7.10. Síkgráfok	94

7.11. Tournamentek	98
7.12. Körök, utak irányított gráfokban	98
7.13. A Turán-tétel és alkalmazásai	99
7.14. Cseresznyék	101
7.15. Színezési feladatok	104
7.16. Élszínezések	106
7.17. Síkgráfok színezése	107
7.18. Listaszínezések	108
7.19. Perfekt gráfok	109
7.20. Sorrend szerinti színezések	111
8. Leszámlálási feladatok – megoldások	113
8.1. Bevezető feladatok	113
8.2. Szita	116
8.3. Binomiális együtthatók és generátorfüggvények	123
8.4. Lineáris rekurziók	135
8.5. Fibonacci-sorozat	136
8.6. Catalan-számok	140
8.7. Stirling számok	142
8.8. Partíciók	148
9. Algebrai módszerek a kombinatorikában – megoldások	151
9.1. Lineáris algebrai módszerek	151
9.2. Polinom módszer	154
9.3. A kombinatorikus Nullstellensatz alkalmazásai	157
10. Spektrálgráfelméleti feladatok – megoldások	163
10.1. Bevezető feladatok	163
10.2. Gráfszorzatok, gráftranszformációk	168
10.3. Spektrálsugár-bebecslések	169
10.4. Gráfparaméterek bebecslései	171
10.5. Erősen reguláris gráfok	173
10.6. Laplace-sajátértékek	176
11. Valószínűségyszámítási módszerek a kombinatorikában – megoldások	183
11.1. Várható érték és változtatott véletlen	183
11.2. Második momentum módszer	194
11.3. A Lovász-féle lokál-lemma alkalmazásai	200
12. Algoritmuselmélet – megoldások	205
12.1. Rekurziók	205
12.2. Rendezés	208

12.3. Számolás	210
12.4. Diszkrét Fourier-transzformáció	211
12.5. Stabil párosítások	212
12.6. Elemi gráfalgoritmusok	213
12.7. Dinamikus programozás	216
12.8. Folyamok	218
12.9. Approximáció	220
12.10Kódolás	221

Elekes György emlékére

Előszó

Ennek a jegyzetnek a célja, hogy segítséget nyújtson az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tanuló matematika BSc és MSc hallgatóknak a Számítógéptudományi Tanszék által oktatott kurzusokhoz, elsősorban a véges matematika, diszkrét matematika és algoritmuselmélet tárgyakhoz. A feladatok nagyrészt az elmúlt évek feladatsoraiból kerülnek ki és megoldások is tartoznak hozzájuk, ezzel a gyakorlatokra és ZH-kra való felkészülést könnyítik meg mind a hallgatóknak, mind a tanároknak. Az érintett témák a gráfelmélet, algoritmusok, valószínűségi és (lineáris) algebrai módszerek a kombinatorikában és gráfelméletben. A feladatokat eszerint csoportosítottuk, a megoldások pedig a könyv második felében szerepelnek.

A jegyzet kiindulópontjául az Elekes György által összegyűjtött feladatok szolgáltak, de ezen kívül számtalan forrásból merítettünk, a legtöbb példánál képtelenség lenne kideríteni, hogy kitől származik. Számos feladat cikkekben jelent meg lemmaként, önállóan nem híres eredmények, de mindenképp tanulságosak. A gráfelméleti és a leszámlálási feladatok egy részét Elekes Györgytől és Lippner Gábortól tanultuk, akik hosszú ideig tartották az első éves véges matematika gyakorlatot. Számos feladatot kifejezetten azért dolgoztak ki, hogy a diákok minél önállóbban tudjanak egy-egy témát elsajátítani. Néhány polinommodszeres feladatot a szerzők Tóth Ágnestől tanultak. Az algoritmuselméleti példák közül rengeteg származik Király Zoltántól és Hubai Tamástól. Ezen kívül hasznos megjegyzésekért és észrevételekért szintén köszönettel tartozunk Kisfaludy-Bak Sándornak és a sok-sok hallgatónak, akik az évek során észrevételeikkel hozzájárultak a feladatok és megoldásaik színvonalához. A fent említett matematikusokon kívül a szerzők nagyon sokat tanultak Gács Andrástól, Lovász Lászlótól, Sziklai Pétertől, Szőnyi Tamástól és még sok más embertől, akiknek ezért nagyon hálásak.

1. fejezet

Gráfelmélet

1.1. Összefüggőség, feszítőfák

1.1. Adott az összefüggő G gráf két feszítőfája. Mutasd meg, hogy néhány lépésben el lehet jutni az egyikből a másikba úgy, hogy minden lépésben feszítőfát kapunk és mindig az aktuális feszítőfa egy élét cseréljük le a gráf egy másik élére!

megoldás

1.2. A G összefüggő gráf egy feszítőfáját alternálónak nevezzük, ha $\pm$ jeleket lehet írni a fa élére úgy, hogy minden nem fabeli él által meghatározott fabeli úton felváltva vannak a $+$ és $-$ jelek. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfnak van alternáló feszítőfája!

megoldás

1.3. Egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre osztottunk. Bizonyítsd be, hogy van olyan háromszög, amelynek két oldala is a sokszög eredeti oldalai közül kerül ki!

megoldás

1.4. n számból $\binom{n}{2}$ páronkénti összeget képezünk, ahol $n \geq 5$. Közülük legalább $\frac{n^2-3n+4}{2}$ szám racionális. Bizonyítsd be, hogy az összes szám racionális!

megoldás

1.5. Azt mondjuk, hogy egy G gráf egyértelműen k -színezhető, ha egyrészt létezik a csúcsainak jó színezése (ahol élszomszédos csúcsok színe különböző)

k színnel, másrészt bármely két csúcsára a gráfnak, azok vagy megegyező színűek minden jó k -színezésben, vagy mindben eltérő színűek. Igazoljuk, hogy ha az $n \geq 3$ csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, akkor G -nek legalább $2n - 3$ éle van!

megoldás

1.2. Fák

1.6. Legyen $\mathcal{T}$ a T fa k darab nem feltétlenül különböző részfája úgy, hogy legalább $\frac{kf}{2}$ (rendezetlen) $\mathcal{T}$ -beli pár metszi egymást. Mutasd meg, hogy van a T fának olyan csúcsa, amelyet legalább $\frac{f}{2} + 1$ $\mathcal{T}$ -beli elem tartalmaz!

megoldás

1.7. Legyenek r, m pozitív egészek és legyen R tetszőleges multihalmaza a T fa csúcsainak úgy, hogy $|R| = rm$. Mutasd meg, hogy ekkor létezik $S \subseteq V(T)$, melyre $|S| \leq m - 1$, és $T \setminus S$ minden összefüggő komponense legfeljebb r elemét tartalmazza R -nek!

megoldás

1.3. Körkeresés

Kétféle megközelítés megvizsgálása hasznos lehet ezekben a feladatokban.

Az egyik, ha a gráf egy rögzített struktúrájából indulunk ki, amiben az élek elhelyezkedéséről van információnk. Erre példa lehet, ha vesszük a gráf egy mélységi vagy szélességi keresés feszítőfáját. A nem faélek csak meghatározott módon haladhatnak ebben az esetben.

A másik megközelítés alapja, hogy egyfajta szélső helyzetből indulunk, ez szintén erős struktúrát adhat az élek elhelyezkedésére nézve. Erre példa lehet, ha a gráf leghosszabb útját tekintjük; ennek két végpontjából csak az út belső pontjaiba, vagy a másik végpontba vezethet él. Eredményre vezethet szintén, ha a leghosszabb/legrövidebb körből indulunk ki.

1.8. Egy n csúcsú összefüggő gráfban nincs páros kör. Mutasd meg, hogy legfeljebb $\frac{3}{2}(n - 1)$ éle van!

megoldás

1.9. Legyen $n \geq 4$. Tegyük fel, hogy az n csúcsú összefüggő G gráfnak legalább $2n - 3$ éle van. Igazoljuk, hogy G tartalmaz egy kört, benne egy átlóval. Mutassuk meg, hogy az állítás éles!

megoldás

1.10. A K_n teljes gráf éleit n színnel színeztük úgy, hogy minden szín szerepel is. Mutasd meg, hogy van benne olyan háromszög, melynek oldalai különböző színűek!

megoldás

1.11. Egy n -csúcsú páros G gráfban nincsenek $C_4, C_6, \dots, C_{2k}$ hosszú körök. Mutasd meg, hogy G éleinek száma legfeljebb $n^{1+1/k} + n!$

megoldás

1.4. Vegyes feladatok

1.12. Mutasd meg, hogy ha egy összefüggő G gráfban a leghosszabb kör és a leghosszabb út csúcsszáma azonos, akkor a gráfban van Hamilton-kör!

megoldás

1.13. (a) Mutasd meg, hogy nem lehet a Petersen-gráf éleit három színnel színezní úgy, hogy minden csúcsnál három különböző színű él legyen!

(b) Mutasd meg, hogy nincs a Petersen-gráfban Hamilton-kör!

megoldás

1.14. Mutasd meg, hogy ha egy összefüggő $2r$ -reguláris gráfnak páros sok éle van, akkor az élhalmaza előáll két r -reguláris gráf uniójaként!

megoldás

1.15. Milyen n -re létezik n csúcsú gráf, amely izomorf a komplementerével?

megoldás

1.16. Legyen $G = (V, E)$ gráf kp csúcs, $\delta(G) \geq kq$ minimális fokkal. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan H feszített részgráfja, melyre $|V(H)| = p$ és $\delta(H) \geq q!$

megoldás

1.5. Többszörös összefüggőség, Menger-tétel

1.17. (a) Mutasd meg, hogy egy 3-reguláris egyszerű gráfra az élösszefüggőségi szám és az összefüggőségi szám megegyezik!

(b) Mutass példát arra, hogy 4-reguláris gráfra ez nem igaz!

megoldás

1.18. Egy k -szorosan összefüggő gráfhoz hozzáveszünk egy csúcsot és összekötjük k másik csúccsal. Mutasd meg, hogy továbbra is k -szorosan összefüggő gráfot kaptunk!

megoldás

1.19. Igazold az alábbi következtetéseket!

- (a) Max-flow-min-cut $\Rightarrow$ Irányított él-Menger tétel
- (b) Irányított él-Menger tétel $\Rightarrow$ Irányított pont-Menger tétel
- (c) Irányított pont-Menger tétel $\Rightarrow$ König–Hall-tétel
- (d) Irányított pont-Menger tétel $\Rightarrow$ Irányítatlan pont-Menger tétel
- (e) Irányított él-Menger tétel $\Rightarrow$ Irányítatlan él-Menger tétel

megoldás

1.20. Tegyük fel, hogy G irányított gráf minden $x \neq a, b$ pontjának kifoka egyenlő a befokával, míg a kifoka k -val nagyobb mint a befoka. Bizonyítsd be, hogy létezik G -ben k éldiszjunkt (a, b) út!

megoldás

1.21. Egy irányított G gráf minden csúcsába ugyanannyi él megy be, mint amennyi ki. Tudjuk, hogy a gráf b csúcsából k darab élfüggetlen út megy a -ba. Mutasd meg, hogy ekkor van k darab élfüggetlen út a -ból b -be, melyek élei függetlenek az eredeti k darab úttól!

megoldás

1.22. Egy G gráf x és y pontja között legfeljebb k éldiszjunkt út megy. Bizonyítsd be, hogy x és y között legfeljebb $2k$ (nem feltétlenül különböző) út van úgy, hogy minden él legfeljebb két útban van benne!

megoldás

1.23. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_k$ és $y_1, \dots, y_k$ egy k -szorosan összefüggő gráf csúcsai. Mutasd meg, hogy van k darab olyan csúcsdiszjunkt út, melyek párosítják az x -eket az y -okkal!

megoldás

1.24. Legyenek $x, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ és z egy k -szorosan összefüggő gráf csúcsai. Bizonyítsd be, hogy van olyan $x - z$ út amely átmegy az y_i -ken!

megoldás

1.25. [Dirac tétele] Bizonyítsd be, hogy ha $k > 1$, akkor egy k -szorosán összefüggő G gráf bármely k pontja egy körön van.

megoldás

1.6. Fülfelbontás

1.26. Legyen a G irányított gráf erősen összefüggő. Mutassuk meg, hogy van G -nek következő alakú fülfelbontása: egy pontból indulva mindig irányított utat vagy kört adunk az addig felépített gráfhoz úgy, hogy út esetén csak a két végpontot, kör esetén csak egy pontot tartalmazzon az addig felépített gráf az új útból, illetve körből.

megoldás

1.27. Legyen $a, b \in V(G)$ ahol G 2-szeresen összefüggő gráf. Mutasd meg, hogy G élei irányíthatóak úgy, hogy minden él rajta legyen egy irányított (a, b) úton!

megoldás

1.28. Legyen G irányított gráf erősen összefüggő és irányítását elhagyva 2-szeresen összefüggő. Mutassuk meg, hogy van G -nek következő alakú fülfelbontása: egy irányított körből indulva mindig irányított utat adunk az addig felépített gráfhoz úgy, hogy az addig felépített gráf az új útból csak annak két végpontját tartalmazza.

megoldás

1.29. A G gráf kétszeresen élösszefüggő, de bármely élét elhagyva már nem kétszeresen élösszefüggő. Mutasd meg, hogy a kromatikus száma legfeljebb 3!

megoldás

1.7. Párosítási feladatok páros gráfokban

1.30. Leteszünk a sakktáblára 32 bástyát úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan 4 bástya legyen. Mutasd meg, hogy kiválasztható közülük 16 bástya úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan két kiválasztott bástya legyen!

megoldás

1.31. Két 10 fős csapat pingpongversenyen mérkőzik meg egymással. Mindenki mindenkivel játszik az ellenfél csapatából, mégpedig úgy, hogy egy fordulóban mind a 20 ember asztalhoz áll. Mutassuk meg, hogy akárhogyan is bonyolították le az első 4 fordulót, a maradék 60 mérkőzés is elrendezhető 6 teljes fordulóban!

megoldás

1.32. Legyen $2k < n$ és $A_1, A_2, \dots, A_{\binom{n}{k}}$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazai. Mutasd meg, hogy minden i -re létezik B_i halmaz a következő tulajdonságokkal: $A_i \subset B_i$, $|B_i| = k + 1$ és $i \neq j$ esetén $B_i \neq B_j$.

megoldás

1.33. Egy társaság süteményt eszik. A tálon csupa különböző sütemény található. A társaság bármely tagjához található a tálon legalább kétszer annyi süti úgy, hogy minden süti szimpatikus valakinek. Mutasd meg, hogy szét lehet úgy osztani a süteket, hogy mindenkinek jusson legalább két olyan süti, ami neki szimpatikus!

megoldás

1.34. Legyen G egy n -csúcsú páros gráf. Mutasd meg, hogy $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})!$

megoldás

1.35. Legyen $A_1, A_2, \dots, A_n$ és $B_1, B_2, \dots, B_n$ az $\{1, 2, \dots, mn\}$ halmaz egy-egy olyan particiója, hogy minden partícióosztály m elemű. Mutasd meg, hogy újra lehet rendezni a B_i halmazokat úgy, hogy $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

megoldás

1.36. Legyen G véges csoport és H részcsoportja G -nek, legyen $|G : H| = n$. Mutasd meg, hogy létezik $g_1, \dots, g_n \in G$, melyek egyszerre jobb és bal oldali mellékosztály-reprezentánsok.

megoldás

1.37. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcshalmaza felbomlik az A, B, C diszjunkt csúcshalmazokra úgy, hogy $|A| = |B| = |C| = N$, egyik osztályon belül sincs él, valamint nincs él az A és C osztályok között. Mutasd meg, hogy ha a gráfnak több, mint N^2 éle van, akkor léteznek $X \subseteq A$ és $Y \subseteq C$ halmazok, amikre $|X| + |Y| > N$ és minden $x \in X$, $y \in Y$ csúcspárnak van közös szomszédja B -ben!

megoldás

1.38. Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, és tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(A)| \geq |A|$. Legyen $v \in A$ és $e_1 = (u_1, v)$, $e_2 = (u_2, v) \in E$. Mutasd meg, hogy $G' = (A, B, E \setminus e_1)$ vagy $G'' = (A, B, E \setminus e_2)$ gráfra szintén teljesül a Hall-feltétel!

megoldás

1.39. Vezesd le a Hall-tételt a Tutte-tételből!

megoldás

1.40. (Deficits Hall) Adott a $G(V_1, V_2)$ páros gráf. Mutasd meg, hogy pontosan akkor létezik benne $|V_1| - d$ független él, ha minden $X \subseteq V_1$ esetén $|N(X)| \geq |X| - d$!

megoldás

1.41. Adott a $G(A, B, E)$ páros gráf, melyre $|A| = |B| = n$, $|E| = 10n + 1$. Bizonyítsd be, hogy kiválasztható legalább 11 független éle!

megoldás

1.42. Egy egyszerű páros gráfban, amelynek mindkét osztálya $2r$ csúcsot tartalmaz, minden fok legalább r . Mutasd meg, hogy van benne teljes párosítás!

megoldás

1.43. Egy n csúcsú páros gráfban minden fokszám 3 vagy 4. Mutasd meg, hogy van olyan párosítás amely legalább $\frac{3}{7}n$ élet tartalmaz!

megoldás

1.44. Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfra teljesül, hogy $|A| = |B| = n$ és $(a, b) \notin E$, $a \in A$, $b \in B$ esetén $d(a) + d(b) \geq n$. Mutasd meg, hogy G -ben van teljes párosítás!

megoldás

1.8. Független élhalmazok

Jelölések: $\nu(G)$ a G gráf legnagyobb független élhalmazának mérete; $\varrho(G)$ azon élek minimális száma, amelyek lefoglalják az összes csúcsot; $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független csúcshalmazának mérete; $\tau(G)$ pedig a G gráf olyan pontjainak minimális száma, melyek az összes élt lefoglalják.

1.45. (Petersen tétele) (a) Mutasd meg, hogy kétszeresen élösszefüggő 3-reguláris gráfban van teljes párosítás!

(b) Mutass példát olyan 3-reguláris gráfra amiben nincs teljes párosítás!

megoldás

1.46. Legyen F_0 a G egy párosítása. Ekkor G -ben van olyan maximális élszámú párosítás amely lefedi az összes F_0 által lefedett pontot.

megoldás

1.47. Mutasd meg, hogy ha a csúcsok száma páros, akkor összefüggő karommentes gráfban van teljes párosítás! (Egy gráf karommentes, ha nincs benne feszített $K_{1,3}$.)

megoldás

1.48. Mutasd meg, hogy egy n csúcsú gráf vagy a komplementere tartalmaz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ független élt!

megoldás

1.49. Legyen $M, N \subseteq E(G)$ két diszjunkt párosítás a G gráfban, melyekre $|M| > |N|$. Mutasd meg, hogy léteznek M', N' diszjunkt párosításai G -nek, melyre $|M'| = |M| - 1$ és $|N'| = |N| + 1$ és $M' \cup N' = M \cup N$!

megoldás

1.50. Mutasd meg, hogy az $e(G)$ élű G gráf élhalmaza pontosan akkor bontható fel t élű párosítások uniójára, ha $t|e(G)$ és $\chi_e(G) \leq e(G)/t$!

megoldás

1.51. (Gallai tétele) (a) Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban $\nu(G \setminus v) = \nu(G)$ minden v csúcsra. Mutasd meg, hogy tetszőleges x, y csúcsokra $\nu(G \setminus \{x, y\}) < \nu(G)$! (Segítség: (x, y) távolságára menő indukcióval bizonyítsd az állítást!)

(b) Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban $\nu(G \setminus v) = \nu(G)$ minden v csúcsra. Mutasd meg, hogy tetszőleges v csúcsra $G \setminus v$ -nek van teljes párosítása! (Megjegyzés: az ilyen gráfot *faktorkritikusnak* hívjuk.)

megoldás

1.9. Lefogások, független halmazok

1.52. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $\{1, 2, \dots, 100\}$ halmaz elemei. Továbbá kössük össze az i és j csúcsot, ha $i \cdot j \geq 100$. Határozd meg a $\rho(G), \nu(G), \tau(G), \alpha(G)$ paraméterek értékét!

megoldás

- 1.53.** (a) Mutasd meg, hogy $\tau(G) \leq 2\nu!$
 (b) Mutasd meg, hogy $\tau(G) + 2\rho(G) \leq 2|V(G)|!$
 (c) Igazold, hogy minden $x \in [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ számra létezik G összefüggő gráf, melyre $\frac{\tau(G)}{\nu(G)} = x!$

megoldás

- 1.54.** Mutasd meg, hogy egy r -reguláris gráfban a független csúcsok maximális száma legfeljebb akkora, mint a független élek maximális száma!

megoldás

- 1.55.** Legyen G izolált pontot nem tartalmazó gráf. Jelölje d a legnagyobb fokszámot G -ben. Bizonyítsd be, hogy $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|!}{d+1}!$

megoldás

1.10. Síkgráfok

Egy gráfot akkor nevezünk síkbarajzolhatónak, ha lerajzolható úgy a síkban, hogy az élei nem metszik egymást. Sztereografikus projekcióval igazolható, hogy egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható. A konvex poliéderek élhálói síkbarajzolható gráfot adnak. Euler tétele szerint az összefüggő síkbarajzolható gráfok (vagy más formában kimondva: a poliéderek) e élszáma, n csúcsszáma, és l tartományszáma között fennáll az $e + 2 = n + l$ összefüggés.

- 1.56.** Mutasd meg, hogy minden konvex síkbarajzolható gráfra teljesül az $e \leq 3n - 6$ egyenlőtlenség! Mutasd meg, hogy ha a gráf páros is akkor $e \leq 2n - 4!$

megoldás

- 1.57.** Egy faluban van három ház és három kút. Úgy szeretnénk minden házat minden kúttal összekötni, hogy semelyik két út ne metssze egymást. Meg lehet ezt tenni?

megoldás

- 1.58.** Mutasd meg, hogy a K_5 nem síkbarajzolható.

megoldás

Kuratowski tétele szerint egy véges gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal. Wagner tétele szerint egy véges gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha az előbb felsorolt két gráf egyike sem minora.

A Fáry–Wagner-tétel szerint egy síkba rajzolható egyszerű gráf egyenes vonalakkal is síkba rajzolható.

1.59. Bizonyítsd be, hogy a Petersen-gráf nem síkbarajzolható!

megoldás

1.60. Mely n -re rajzolható síkba az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes $n - n$ csúcsú páros gráfból elhagyunk egy teljes párosítást?

megoldás

1.61. Keress olyan síkgráfot, aminek a duálisa nem egyértelmű!

megoldás

1.62. Mutasd meg, hogy nem lehet egy gráf és duálisa is egyszerű, páros síkgráf!

megoldás

1.63. Egy síkgráf legrövidebb körének hossza 5. Adj felső becslést az élek számára a csúcsok számának függvényében! Mutass végtelen sok síkgráfot amelyre a becslésed pontos!

megoldás

1.64. Egy 60 csúcsú 3-reguláris síkgráf minden lapja 5-szög vagy 6-szög. Melyikből mennyi van?

megoldás

1.65. Egy konvex poliéder minden csúcsába páros sok él fut. Bizonyítsd be, hogy legalább 8 darab háromszöglapja van!

megoldás

1.66. Van egy konvex poliéderünk. Kiválasztottuk egy lapját. Ezután észrevettük, hogy minden olyan csúcsban, ami nincs ezen a lapon, legalább 6 él találkozik. Bizonyítsd be, hogy ekkor a kiválasztott lapon van olyan csúcs, ahol maximum 3 él találkozik!

megoldás

1.67. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű síkbarajzolt gráf éleit két színnel színezve mindenképp találunk olyan csúcsot, amelyre illeszkedő élek elhelyezkedés szerinti ciklikus sorrendjében legfeljebb két színváltás fordul elő!

megoldás

1.68. Legyen G 4-reguláris síkbarajzolt gráf. Mutassuk meg, hogy élei irányíthatók úgy, hogy minden csúcsnál a két belépő és két kilépő él elválasztja egymást!

megoldás

1.69. Egy poliéder éleit irányítjuk úgy, hogy minden csúcsba fut be és ki is él. Bizonyítsd be, hogy van legalább két lap, amelynek az élei kört alkotnak!

megoldás

1.70. Egy n csúcsú egyszerű gráfnak $4n$ éle van. Mutassuk meg, hogy bármely lerajzolásakor legalább n metsző élpár van.

megoldás

1.11. Tournamentek

1.71. Egy T tournament csúcsainak egy $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendjét mediánsorrendnek hívjuk, ha $|\{e = (v_i, v_j) \mid i < j\}|$ maximális. Mutasd meg, hogy

(a) tetszőleges $i < j$ esetén $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ mediánsorrendje az általuk feszített tournamentnek,

(b) v_i legyőzte a $v_{i+1}, \dots, v_j$ csúcsoknak legalább felét, míg v_j kikapott a $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$ csúcsok legalább felétől!

megoldás

1.72. Mediánsorrend segítségével (lásd 1.71 feladat) adj (új) bizonyítást arra, hogy egy tournamentben mindig van pseudo-győztes és irányított Hamilton-út. (Egy tournamentben v pseudogyőztes, ha v -ből minden csúcs elérhető legfeljebb 2 hosszú irányított úton.)

megoldás

1.73. Fenyőnek (v. branching-nek) nevezünk egy irányított fát, ha a gyökérén kívül minden pont befoka 1 (és a gyökér befoka 0). Mutasd meg, hogy egy $2k$ csúcsú tournamentbe minden legfeljebb $k+1$ csúcsú fenyő beágyazható! (Segítség: mutasd meg, hogy egy $k+1$ csúcsú F fenyő úgy is beágyazható, hogy a mediánsorrendben minden i -re a $\{v_1, \dots, v_i\}$ intervallum legalább fele F -ben van.)

megoldás

1.12. Körök, utak irányított gráfokban

1.74. Mutasd meg, hogy ha egy irányított gráfban nincs irányított kör, akkor van a csúcsoknak egy olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendje, hogy minden $e = (v_i, v_j)$ él esetén $i < j$! (Az ilyen sorrendet *topologikus sorrendnek* hívjuk.)

megoldás

1.75. Mutasd meg, hogy ha egy irányított $D = (V, E)$ gráfban nincsen irányított kör, akkor van olyan $X \subseteq V(D)$ független halmaz, hogy tetszőleges $v \notin X$ esetén létezik $w \in X$, melyre $(w, v) \in E(D)$!

megoldás

1.76. Mutasd meg, hogy egy tetszőleges irányított $D = (V, E)$ gráfban van olyan $X \subseteq V(D)$ független halmaz, amelyre igaz, hogy minden $y \notin X$ csúcsba vezet legfeljebb 2 hosszú irányított út ebbe a független halmazból!

megoldás

1.13. A Turán-tétel és alkalmazásai

1.77. Az n csúcsú G egyszerű gráf éleinek halmaza előáll mint két páros gráf élhalmazának uniója. Mutassuk meg, hogy $e(G) \leq \frac{3}{8}n^2$, ahol $e(G)$ a G éleinek számát jelöli!

megoldás

1.78. A bergengóc lottón 100 számból húznak 5-öt, egy szelvényen azonban csak 2 számot jelölnek meg. Minimum hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen két találatosunk?

megoldás

1.79. Egy 15 pontú gráf éleit pirossal és kézzel színeztük meg úgy, hogy nincs egyszínű háromszög a gráfban. Maximum hány éle van a gráfnak?

megoldás

1.80. A 10 csúcsú teljes gráf éleit k színnel színezzük úgy, hogy bármely k pontot választva a köztük futó élek között mind a k szín előfordul. Határozzuk meg a legkisebb k -t, melyre létezik ilyen színezés!

megoldás

1.81. Legyen $P = \{(p_1, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}$. Legyen G gráf az $\{1, 2, \dots, n\}$ csúcsokon.

Mennyi $\max_P \sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j$, ha $E(G) := \{i(i+1) \pmod n : i \in [1, n]\}$, azaz G egy n -hosszú kör?

megoldás

1.82. Legyen $P = \{\underline{p} = (p_1, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, 0 \leq p_i \in \mathbb{Q}\}$. Legyen G egyszerű gráf az $\{1, 2, \dots, n\}$ csúcsokon. Mutasd meg, hogy

$$\max_{\underline{p} \in P} \sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega(G)} \right).$$

megoldás

1.83. Legyen G gráf n csúcson, mely nem tartalmaz k -csúcsú teljes részgráfot. Legyen u, v a G gráf két összekötetlen csúcsa $N(u), N(v)$ szomszédhalmazokkal. Legyen $G' = Z(G, u, v)$ az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G -ből kitöröljük a v és $N(v)$ közötti éleket és behúzzuk a v és $N(u)$ közötti éleket.
(a) Mutassuk meg, hogy G' sem tartalmaz k -csúcsú teljes gráfot!
(b) Vezessük le ebből a Turán-tételt!

megoldás

1.14. Cseresznyék

1.84. Egy gráf csúcsainak fokszámai $d_1, d_2, \dots, d_n$. Hány 2-hosszú út (népszerűbb nevén cseresznye) van a gráfban?

megoldás

1.85. Mutasd meg, hogy ha egy gráfban nincsen 4 csúcsú kör, akkor $e \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}!$

megoldás

1.86. (a) Tegyük fel, hogy egy n csúcsú gráfban nincs háromszög. Mutasd meg, hogy legfeljebb $e(n-2)/2$ cseresznye lehet benne!

(b) Egy n csúcsú gráfban nincs háromszög. Mutasd meg, hogy legfeljebb $n^2/4$ éle van!

(c) Bizonyítsd be, hogy egy e élű, n csúcsú gráfban legalább $\frac{4e^2 - en^2}{3n}$ háromszög van!

megoldás

1.87. (a) K_n éleit pirosra és kékre színeztük úgy, hogy minden csúcsra pontosan k kék él illeszkedik. Bizonyítsd be, hogy az egyszínű háromszögek száma

$$\binom{n}{3} - \frac{n \cdot k \cdot (n - k - 1)}{2}.$$

(b) Mutassuk meg, hogy ha K_n éleit tetszőlegesen színezzük két színnel, akkor az egyszínű háromszögek száma legalább

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

megoldás

1.88. 10 ember teniszversenyt rendez, mindenki mindenkivel játszik. Az i -edik ember x_i ellenfél ellen győzött és y_i ellenfél ellen veszített. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2.$$

megoldás

1.89. Egy 10 csúcsú gráfban nincs háromszög és négy hosszú kör. Mutasd meg, hogy legfeljebb 15 éle van!

megoldás

1.90. Egy n csúcsú gráfban nincs $K_{3,3}$. Mutasd meg, hogy legfeljebb $2(n^{5/3})$ éle van!

megoldás

1.91. Adott n pont a síkon, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Mutasd meg, hogy legfeljebb n^2 egyenlőszárú háromszög választható ki, melyeknek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki!

megoldás

1.92. Adott n pont a síkon. Mutasd meg, hogy minden távolság maximum $c \cdot n^{3/2}$ -szer fordulhat elő!

megoldás

1.15. Színezési feladatok

1.93. (a) Legyen $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma, $\omega(G)$, illetve $\alpha(G)$ a legnagyobb klikk, illetve legnagyobb független halmaz mérete. Mutasd meg, hogy $\chi(G) \geq \max(\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)})$, ahol n a csúcsok száma!

(b) G_1, G_2 két gráf ugyanazon csúcshalmazon. Bizonyítsd be, hogy $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$! A $(G_1 \cup G_2)$ gráfban a G_1 és G_2 gráfok élhalmazát uniózzuk.

megoldás

1.94. Mutasd meg, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha nincsen benne páratlan hosszú kör!

megoldás

1.95. Mennyi a Petersen-gráf kromatikus száma?

megoldás

1.96. A G gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, az i és j csúcsokat összekötjük, ha egyik osztja a másikat. Mennyi ennek a gráfnak a kromatikus száma?

megoldás

1.97. A G gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, az i és j csúcsot összekötjük ha relatív prímek. (Az 1-t önmagával összekötő éleket elhagyjuk.) Mennyi G kromatikus száma?

megoldás

1.98. A sík pontjait három színnel színeztük. Mutasd meg, hogy van olyan egység hosszú szakasz, amelynek végpontjai azonos színnel vannak megszínezve!

megoldás

1.99. A G gráf három páros gráf élhalmazának uniója. Mutasd meg, hogy a kromatikus száma legfeljebb 8!

megoldás

1.100. Bizonyítsd, hogy $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$!

megoldás

1.101. Mutasd meg, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$!

megoldás

1.102. Igaz-e, hogy minden G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyben az egyik osztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

megoldás

1.103. Az (n, k) -Kneser-gráf csúcsai az $\{1, 2, \dots, n\}$ k -elemű részhalmazai, és két csúcs össze van kötve, ha a k -elemű halmazok diszjunktak. Mutasd meg, hogy az (n, k) -Kneser-gráf kromatikus száma legfeljebb $n - 2k + 2$!

megoldás

1.16. Élszínezések

1.104. (König élszínezési tétele) Egy páros gráfban minden pont foka r . Mutasd meg, hogy ki lehet színezni az éleit r színnel úgy, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon!

megoldás

1.105. Egy páros gráfban a legnagyobb fokszám Δ . Mutasd meg, hogy ki lehet színezni az éleit Δ színnel úgy, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon!

megoldás

1.106. Legyen G olyan $(2k + 1)$ -reguláris gráf, melyben van elvágó él. Határozd meg G élkromatikus számát!

megoldás

1.107. Adott egy 101 pontú teljes gráf. Bármely 3 pont között menő élek vagy egyszínűek vagy mind különbözőek. Bizonyítsd be, hogy a színek száma 1 vagy legalább 12!

megoldás

1.17. Síkgráfok színezése

1.108. A síkot egyenesekkel országokra osztottuk. Mutasd meg, hogy már két színnel is ki lehet színezni ezen országokat úgy, hogy szomszédosak ne legyenek azonos színűek!

megoldás

1.109. Van néhány egyenes a síkon, semelyik 3 nem megy át egy ponton. Ez a rajz definiál egy síkgráfot, melynek a csúcsai a metszéspontok, és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha egy egyenesre esnek és ott szomszédosak is. Bizonyítsd be, hogy ennek a gráfnak a csúcsai kiszínezhetők 3 színnel úgy, hogy szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek!

megoldás

1.110. Legyen G 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő síkgráf (vagyis bármely élét elhagyva még összefüggő marad a gráf). Mutasd meg, hogy ha igaz a négyszíntétel a síkgráfokra, akkor G élei színezhetők három színnel úgy, hogy tetszőleges csúcsból három különböző színű él induljon ki!

megoldás

1.111. Mutass olyan 3-reguláris síkgráfot, amelynek az élei nem színezhetők ki három színnel úgy, hogy minden csúcsnál három különböző színű él legyen!

megoldás

1.18. Listaszínezések

1.112. Legyen k adott pozitív egész. Mutass olyan páros gráfot, melynek listaszínezési száma legalább k !

megoldás

1.113. (Thomassen) Mutasd meg, hogy egy síkgráf listaszínezési száma legfeljebb 5!

megoldás

1.19. Perfekt gráfok

Az alábbi feladatokban definiált gráfokban közös, hogy perfekt gráfok.

1.114. Adott egy fa néhány részfája. Tegyük fel, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Bizonyítsd be, hogy ekkor az összesnek is van! (Az 1.119 feladat ehhez kapcsolódik.)

megoldás

1.115. A számegyenes néhány zárt intervallumának lefogása alatt olyan L pontthalmazt értünk, amire igaz, hogy minden intervallum tartalmaz legalább egy L -beli pontot.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha a zárt intervallumok között nincs 101 páronként diszjunkt, akkor lefoghatók 100 ponttal!

(b) Adjunk (gyors) módszert adott intervallumrendszer lefogó legkisebb pontthalmaz keresésére!

megoldás

1.116. Legyen G egy páros gráf. Mutasd meg, hogy $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$!

megoldás

1.117. Adott a valós számok néhány intervalluma. Ehhez hozzárendeljük a következő G gráfot: a csúcsok az intervallumok, és kettőt összekötünk, ha az intervallumoknak van közös pontja.

(a) Bizonyítsd be, hogy $\chi(G) = \omega(G)$!

(b) Bizonyítsd be, hogy $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$!

(c) Mutasd meg, hogy G minden legalább 4 hosszú körében van húr! (Az ilyen típusú gráfokat merev körű gráfnak hívjuk.)

megoldás

1.118. Mutass olyan G gráfot, melyre $\chi(G) = \omega(G)$, de $\chi(\overline{G}) \neq \omega(\overline{G})$!

megoldás

1.119. Adott egy T fa és annak $T_1, \dots, T_n$ részfája. Definiálunk egy G gráfot n csúcson a következőképpen: az i és j csúcsok akkor legyenek összekötve, ha T_i és T_j részfáknak nincs közös pontjuk T -ben. Mutasd meg, hogy $\chi(G) = \omega(G)$!

megoldás

1.20. Sorrend szerinti színezések

1.120. Mutasd meg, hogy tetszőleges G gráf csúcsainak van olyan sorrendje, hogy a sorrend szerint mohón színezve (mindig a legkisebb sorszámú szabad színt használva) éppen $\chi(G)$ színt használunk!

megoldás

1.121. Adj meg minden n -re egy G páros gráfot $2n$ csúcson és a csúcsoknak egy sorrendjét úgy, hogy mohón színezve (mindig a legkisebb sorszámú szabad színt használva) a sorrend szerint legalább n színre legyen szükség!

megoldás

2. fejezet

Leszámlálási feladatok

2.1. Bevezető feladatok

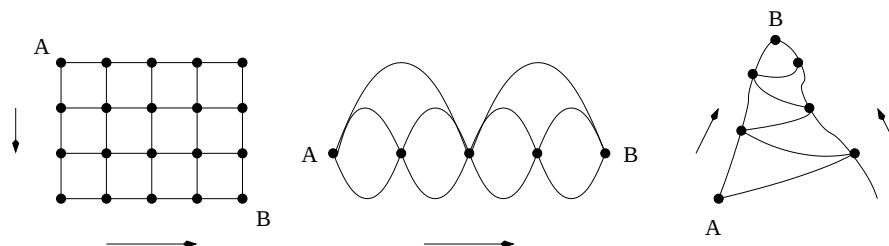
2.1. Hány anagramma készíthető a MATEMATIKA szó betűiből?

megoldás

2.2. Hány olyan 7 jegyű telefonszám van, amiben van 2 szomszédos jegy, amik megegyeznek? (Telefonszám kezdődhet 0-val is.)

megoldás

2.3. Hány módon juthatunk A -ból B -be a nyilak irányában haladva?



megoldás

2.4. Hány olyan 7 jegyű szám van, amiben

(a) van 2 azonos számjegy?

(b) pontosan két azonos számjegy van?

megoldás

2.5. Hányféleképpen állhat sorba n lány és 5 fiú úgy, hogy legyen két fiú akik egymás mellett állnak?

megoldás

2.6. Hány módon írható fel a 12 mint 5 darab pozitív egész összege? És ha a nullát is megengedjük, mint összeadandót? (A számok sorrendje mindkét esetben számít!)

megoldás

2.7. Hány olyan 5-jegyű szám van amiben a jegyek (nem feltétlenül szigorúan) balról jobbra nőnek?

megoldás

2.8. A játékboltban 6-féle plüssállat kapható. Mi 16 darabot akarunk venni. Hány módon tehetjük ezt meg? És ha ráadásul mindegyikből legalább egyet szeretnénk hazavinni?

megoldás

2.9. Az $(x + y + z + w)^{1000}$ kifejtésében hány tagban van legalább első fokon az x ? (Pl. $1000x^{999}y$ egy tagnak számít, a változók kommutálnak.)

megoldás

2.10. Hány $f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ monoton növekvő függvény van?

megoldás

2.11. Legyen d_k egy városban azon házak száma, melyekben legalább k ember él, c_i pedig az i -edik házban lakók száma. Bizonyítsd be, hogy $\sum_i c_i^2 = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots$!

megoldás

2.12. Egy konvex n -szög átlóinak hány metszéspontja lehet?

megoldás

2.13. Maximum hány részre osztja a síkot n egyenes?

megoldás

2.2. Szita

2.14. (a) Hány olyan egész szám van 1 és 300 között, amelyik nem osztható se 2-vel, se 3-mal?

(b) Hány olyan szám van, ami osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel?

megoldás

2.15. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amiben csak az 1, 2, 3 jegyek szerepelnek, de ezek mindegyike tényleg elő is fordul?

megoldás

2.16. Egy osztály 30 tanulója közül szereti a matematikát 12, a fizikát 14, a kémiát 13, a matematikát és a fizikát 5, a matematikát és a kémiát 4, a fizikát és a kémiát 7, mindhármat 3. Hány tanuló nem kedveli egyiket sem?

megoldás

2.17. Legyen $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq V$ és minden j -re v_j legyen az A_j karakterisztikus vektora, azaz $x \in V$ esetén $v_j(x) = 1$, ha $x \in A_j$ és $v_j(x) = 0$ ha $x \notin A_j$. Mutasd meg, hogy

$$(a) \sum_x (1 - v_1(x))(1 - v_2(x)) \dots (1 - v_n(x)) = |V \setminus \cup_{i=1}^n A_i|!$$

$$(b) \sum_x v_{i_1}(x)v_{i_2}(x) \dots v_{i_t}(x) = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}|!$$

(c) Bizonyítsd be a logikai szitát:

$$|V \setminus \cup_{i=1}^n A_i| = |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

megoldás

2.18. Határozzuk meg egy n elemű halmaz fixpont nélküli permutációinak a számát!

megoldás

2.19. (Legendre-formula) Legyen x egy pozitív egész szám. Legyen $\pi(x)$ az x -nél nem nagyobb prímek száma, $\mu(n)$ pedig a Möbius-függvény, amit a következőképpen definiálunk: $\mu(n) = 0$, ha létezik $k > 1$ egész, melyre $k^2 \mid n$ és $\mu(n) = (-1)^t$, ha $n = p_1 p_2 \dots p_t$ prímtenyezős felbontásban $p_1 < p_2 < \dots < p_t$.

Bizonyítsd be, hogy

$$1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = \sum_{d \mid \prod_{p \leq \sqrt{x}} p} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor!$$

megoldás

2.20. Mutasd meg, hogy

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n.$$

megoldás

2.21. Mutasd meg, hogy

$$\binom{m}{k} = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \binom{n+m-\ell}{k-\ell}.$$

megoldás

2.22. Bizonyítsd be, hogy $1 \leq sd < m$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m-s} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{s}^d = 0.$$

megoldás

2.23. Adott $G = (V(G), E(G))$ gráf és legyen λ pozitív egész. Legyen $P(G, \lambda)$ az a függvény, amely megadja, hogy a G gráf csúcsait hányféleképpen lehet úgy kiszínezni λ színnel, hogy összekötött csúcsok ne legyenek azonos színűek. Mutasd meg, hogy

$$P(G, \lambda) = \sum_{T \subset E(G)} (-1)^{|T|} \lambda^{c(T)},$$

ahol $c(T)$ a $G_T = (V(G), T)$ gráf összefüggő komponenseinek száma!

megoldás

2.24. Legyen V egy tetszőleges véges halmaz és $A_1, \dots, A_n$ halmazok legyenek V tetszőleges részhalmazai. Legyen

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Legyen t egész szám 1 és $n/2$ között. Mutasd meg, hogy

$$|V| + \sum_{j=1}^{2t-1} (-1)^j \sigma_j \leq |V \setminus \cup_{i=1}^n A_i| \leq |V| + \sum_{j=1}^{2t} (-1)^j \sigma_j.$$

megoldás

2.25. Legyen V egy tetszőleges véges halmaz és $A_1, \dots, A_n$ halmazok legyenek V tetszőleges részhalmazai. Legyen

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Legyen $T_k \subset V$ azon elemeknek a halmaza V -ben, amelyek pontosan k darab A_i -ben vannak benne. Bizonyítsd be, hogy

$$|T_k| = \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{k} \sigma_j.$$

megoldás

2.26. Legyen V egy tetszőleges véges halmaz és $A_1, \dots, A_n$ halmazok legyenek V tetszőleges részhalmazai. Legyen

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Legyen $T'_k \subset V$ azon elemeknek a halmaza V -ben, amelyek legfeljebb k darab A_i -ben vannak benne. Bizonyítsd be, hogy

$$|T'_k| = \sigma_0 + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k} \sigma_j.$$

megoldás

2.27. Legyen V egy tetszőleges véges halmaz és $A_1, \dots, A_n$ halmazok legyenek V tetszőleges részhalmazai. Legyen

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Legyen $T_k \subset V$ azon elemeknek a halmaza V -ben, amelyek legalább k darab A_i -ben vannak benne. Bizonyítsd be, hogy

$$|T''_k| = \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k-1} \sigma_j.$$

megoldás

2.28. Hányféleképpen táncolhat n házaspár úgy, hogy

- (a) pontosan k férfi táncoljon a feleségével,
- (b) legalább k férfi táncoljon a feleségével,
- (c) legfeljebb k férfi táncoljon a feleségével?

megoldás

2.29. Adott az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozat. Ennek differenciasorozata $a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$. Ennek is képezhetjük a differenciasorozatát és a kapottnak is ... Fejezd ki az n -edik differenciasorozat k -adik elemét $a_0, a_1, a_2, \dots$ segítségével!

megoldás

2.30. (a) Tekintsük a következő k -adfokú polinomot: $P_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$. Képezzük a $P(0), P(1), P(2), \dots$ sorozatot. Mi lesz az m -edik differenciasorozat?

(b) Legyen $P(x)$ tetszőleges k -adfokú polinom. Mi lesz a k -adik differenciasorozat?

megoldás

2.31. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat.

$$n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots = n!$$

$$n^{n-1} - \binom{n}{1}(n-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(n-2)^{n-1} - \dots = 0$$

$$n^{n+1} - \binom{n}{1}(n-1)^{n+1} + \binom{n}{2}(n-2)^{n+1} - \dots = \binom{n+1}{2}n!$$

megoldás

2.32. Legyen $k \geq 1$. Mutasd meg, hogy

$$\sum_j (-1)^j \binom{k}{j} \binom{r-jt}{k} (r-jt)^{-1} = 0.$$

megoldás

2.3. Binomiális együtthatók és generátorfüggvények

2.33. Kettős leszámolásal oldd meg!

(a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = ?$

(b) $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$

(c) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = ?$

(d) $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = ?$

(e) $\sum_k \binom{k}{s} \binom{n-k}{t} = ?$

megoldás

2.34. Mennyi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2?$$

megoldás

2.35. Mutasd meg, hogy $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$!

megoldás

2.36. Mutasd meg, hogy $\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$!

megoldás

2.37. Mennyi $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \binom{m}{k}$?

megoldás

2.38. Mutasd meg, hogy

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

megoldás

2.39. (a) Legyen $n > m$. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 0.$$

(b) Legyen A az az $n \times n$ -es mátrix, melynek i . sor j . oszlopában levő elem $\binom{i-1}{j-1}$. Határozzuk meg az A^{-1} mátrixot!

megoldás

2.40. (a) Milyen azonosság következik a binomiális együtthatókra abból, hogy $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$?

(b) És abból, hogy $(1+x)^n$ deriváltja $n(1+x)^{n-1}$?

megoldás

2.41. (a) Legyen $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mi lesz $\frac{F(x)}{1-x}$?

(b) Mi a hatványsora $\frac{1}{(1-x)^n}$ -nek?

(c) Milyen binomiális együtthatókra vonatkozó azonosság következik abból, hogy $\frac{1}{(1-x)^{n+m}} = \frac{1}{(1-x)^n} \frac{1}{(1-x)^m}$?

megoldás

2.42. (a) Minek a generátorfüggvénye $(1-4x)^{-1/2}$?

(b) Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n.$$

megoldás

2.43. Legyenek $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$, $F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ exponenciális generátorfüggvények. Fejezd ki c_n -t a_i, b_j sorozat segítségével!

megoldás

2.44. Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ és $b_0, b_1, b_2, \dots$ sorozatokra fennáll, hogy $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = b_n$. Fejezd ki az a_n sorozatot a b_k sorozat segítségével!

megoldás

2.45. Mennyi $\sum_{i=1}^{\infty} (x^{i^2} + x^{i^2+1} + x^{i^2+2} + \dots)$?

megoldás

2.46. Mi a kapcsolat az a_n és a b_n sorozat között ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}?$$

megoldás

2.47. (a) Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{k}{m}.$$

Határozd meg a $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ hatványsort!

(b) Mutasd meg, hogy

$$A_n = 2^{n-2m-1} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m}.$$

megoldás

2.48. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \frac{1}{3} (2 \cdot 4^n + 1).$$

megoldás

2.49. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

megoldás

2.50. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k} = 2^n.$$

megoldás

2.51. Mennyi

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{2m-2k}{m-k} (-2)^k?$$

megoldás

2.52. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

megoldás

2.53. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

megoldás

2.54. Mennyi

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^{n-k}?$$

megoldás

2.55. Mennyi

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{5}{12}\right)^{n-2k}?$$

megoldás

2.56. Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatra teljesül, hogy minden n -re

$$\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \dots + \binom{n}{n} a_n = n!.$$

(a) Határozd meg a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ exponenciális generátorfüggvényt!

(b) Adj a_i -re képletet!

(c) Mutasd meg, hogy a_n a fixpontmentes permutációk száma n ponton!

megoldás

2.57. Legyen $f(n)$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ fixpontmentes permutációinak száma. Megállapodás szerint $f(0) = 1$. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(n-k) 2^k. \quad \text{megoldás}$$

2.4. Lineáris rekurziók

2.58. Tekintsük az $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ lineáris rekurzióval definiált sorozatot! Adjunk a_n -re explicit képletet, ha

- (a) $a_0 = 1$ és $a_1 = 2$,
- (b) $a_0 = 1$ és $a_1 = 3$,
- (c) $a_0 = 3$ és $a_1 = 8$.

megoldás

2.59. Adj meg explicit képletet a következő sorozatok tagjaira:

- (a) $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, ahol $a_1 = 4$, $a_2 = 6$,
- (b) $b_{n+1} = 2b_n - 2b_{n-1}$, ahol $b_1 = 1$, $b_2 = 1$,
- (c) $c_{n+1} = 4c_n - 2c_{n-1}$, ahol $c_1 = 0$, $c_2 = 1$,
- (d) $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$, ahol $d_1 = 1$, $d_2 = 2$,
- (e) $e_{n+1} = 4e_n - 4e_{n-1}$, ahol $e_1 = 2$, $e_2 = 8$.

megoldás

2.60. Az a_n sorozat kielégíti az $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ rekurziót és $a_0 = 6$, $a_1 = 11$, $a_2 = 25$. Határozd meg a_n -t!

megoldás

2.61. Az a_n sorozatot a következő rekurzióval definiáljuk: $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ $n \geq 1$ és $a_0 = 2$, $a_1 = 4$. Adj explicit képletet a_n -re!

megoldás

2.5. Fibonacci-sorozat

Ebben a részben a Fibonacci-sorozatot vizsgáljuk. Ezt a lineáris rekurzív sorozatot a következőképpen definiáljuk: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ és $(n \geq 2)$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

2.62. Hányféleképpen fedhetjük le a $2 \times n$ -es táblát 1×2 -es dominókkal?

megoldás

2.63. Mennyi

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}?$$

megoldás

2.64. Legyen (F_n) a Fibonacci-sorozat: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 2$), $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Bizonyítsd be, hogy

$$(n+1)F_0 + nF_1 + \dots + 1 \cdot F_n = F_{n+4} - (n+3).$$

megoldás

2.65. Legyen (F_n) a Fibonacci-sorozat. Mennyi

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2?$$

megoldás

2.66. Legyen (F_n) a Fibonacci-sorozat. Adj explicit képletet F_n -re!

megoldás

2.67. Legyen (F_n) a Fibonacci sorozat. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

megoldás

2.68. (a) Mennyi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$?

(b) Keresd képletet F_{n+m} -re $F_{n-1}, F_n, F_m, F_{m+1}$ használatával!

(c) Mutasd meg, hogy $F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_k \binom{n}{2k+1} 5^k$!

megoldás

2.69. (a) Legyen F_n a Fibonacci-sorozat n -edik tagja, vagyis $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha $n \geq 1$. Hozd zárt alakra az $F(x) = F_1 + F_2x + F_3x^2 + \dots$ hatványsort!

(b) Mi lesz a $\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!}$ exponenciális generátorfüggvény?

megoldás

2.70. (a) Legyen m pozitív egész. Mutasd meg, hogy $F_k \bmod m$ periodikus!

(b) Mutasd meg, hogy $(F_n, F_k) = F_{(n,k)}!$

megoldás

2.71. Mutasd meg, hogy ha $p \neq 5$ prím akkor F_{p-1} vagy F_{p+1} osztható p -vel!

megoldás

2.72. Bizonyítsd be, hogy

$$F_{kn} = \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} F_n^t F_t.$$

megoldás

2.6. Catalan-számok

Ebben a részben az ún. Catalan-számokat fogjuk vizsgálni. Ezt a sorozatot a 2.73 feladatban vezetjük be és az összes többi feladatban is C_n -nel fogjuk jelölni az n -edik Catalan-számot.

2.73. (a) Jelölje C_n azon $2n$ hosszú ± 1 -ből álló sorozatok számát, ahol a $2n$ szám összege 0 és minden kezdő részletösszeg nemnegatív. Bizonyítsd be, hogy $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}$, ahol $C_0 = 1$!

(b) Hányféleképpen juthat el egy bolha a $(0, 0)$ pontból az (n, n) pontba, ha minden lépésben jobbra vagy felfelé léphet egyet a négyzetrácson és nem mehet az $y = x$ egyenes fölé? Es egy általános (n, k) pontba?

(c) Mi köze egymáshoz az (a) és (b) résznek?

megoldás

2.74. n hangya egy csövön sétál keresztül. A cső nagyon szűk, így a hangyák nem tudják megelőzni egymást, ámde a cső felénél van egy leágazás egy zsákutcába, amibe néhány hangya be tud menni és onnan fordított sorrendben kijöhetnek, de a leágazásból visszafelé nem mehetnek, csak előre. Hányféle sorrendben jöhetnek ki a csőből?

megoldás

2.75. Hányféleképpen bonthatunk fel egy konvex n -szöget háromszögekre $n - 3$ átlóval?

megoldás

2.76. Egy dinasztia alapító uralkodója úgy rendelkezett, hogy minden fiúági leszármazottjának 2 (nem feltétlenül fiú) gyermeke legyen. Ő és mindegyik fiúági leszármazottja is így tett, ám a (fiúági) dinasztia csak n férfi tagot számlált, majd kihalt. Hányféleképpen nézhet ki ezen n tagú dinasztia családfája, feltüntetve, hogy ki volt az első és ki a második gyermek?

megoldás

2.77. Egy kör alakú asztal körül $2n$ ember ül. Hányféleképpen tud egyszerre mindenki kezét fogni egy egy társával, hogy az így létrejövő n kézfogas közül semelyik kettő se keresztezze egymást?

megoldás

2.78. Legyen C_n az n -edik Catalan-szám, $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ ($C_0 = 1$). Határozd meg a

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots$$

generátorfüggvényt a C_i -kre vonatkozó rekurzió segítségével!

megoldás

2.7. Stirling számok

2.79. Jelöljük $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ -val ahányféleképpen az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt k nem üres halmazra lehet szétbontani. (Pl.: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$, mert $\{1, 2\}\{3\}$, $\{1, 3\}\{2\}$, $\{2, 3\}\{1\}$.)

(a) Szitaformulával bizonyítsd be, hogy

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n.$$

(b) Adj a binomiális együtthatókhoz hasonló rekurziót $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ -ra!

megoldás

2.80. Legyen $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ az $1, 2, \dots, n$ azon permutációinak száma, amelyben pontosan k ciklus van. (Ezek az elsőfajú Stirling-számok.) Mutasd meg, hogy

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

megoldás

2.81. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1) \dots (x-k+1) = x^n.$$

megoldás

2.82. Legyen $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ az $1, 2, \dots, n$ azon permutációinak száma, amelyekben pontosan k ciklus van. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k = x(x+1) \dots (x+n-1).$$

megoldás

2.83. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \dots (1-kx)}.$$

megoldás

2.84. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}.$$

megoldás

2.85. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

megoldás

2.86. Legyen

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

(a) Mutasd meg, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)}.$$

(b) Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k(x) s_{n-k}(y) = s_n(x+y).$$

megoldás

2.87. Legyen

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k.$$

(a) Mutasd meg, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{(1-z)^x}.$$

(b) Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(x) S_{n-k}(y) = S_n(x+y).$$

megoldás

2.88. Legyen

$$S(n, r) = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_i \geq 0, k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n, k_1 + \dots + k_n = r\}.$$

Mutasd meg, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{\underline{k} \in S(n, r)} \frac{n!}{k_1! 1^{k_1} k_2! 2^{k_2} \dots k_n! n^{k_n}}.$$

megoldás

2.89. Legyen

$$S(n, r) = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_i \geq 0, k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n, k_1 + \dots + k_n = r\}.$$

Mutasd meg, hogy

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \sum_{\underline{k} \in S(n, r)} \frac{n!}{k_1! 1^{k_1} k_2! 2^{k_2} \dots k_n! n^{k_n}}.$$

megoldás

2.90. Bizonyítsd be, hogy ha $m, n \geq 0$ egészek, akkor az elsőfajú és másodfajú Stirling számokra fennáll, hogy

$$\sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n, \\ 0 & \text{ha } m \neq n. \end{cases}$$

megoldás

2.91. Bizonyítsd be, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}.$$

megoldás

2.92. Jelölje $t(n, k)$ ahányféleképpen fel lehet bontani az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt k nem üres halmazra úgy, hogy két szomszédos elem ne kerüljön egy halmazba. Mutasd meg, hogy $t(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$.

megoldás

2.93. Mutasd meg, hogy $n > 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k (k-1)! = 0.$$

megoldás

2.94. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációiban mennyi a ciklusok számának átlaga?

megoldás

2.8. Partíciók

2.95. Jelölje $p_{\leq k}(n)$ az n természetes egész szám felbontásainak számát pozitív egészek összegére, melyek mindegyike legfeljebb k . $p_{\leq k}(0) = 1$ definíció szerint. Legyen továbbá $p^{\leq k}(n)$ n azon partícióinak halmaza, ahol legfeljebb k tagú összeget képezünk. Mutasd meg, hogy $p_{\leq k}(n) = p^{\leq k}(n)!$

megoldás

2.96. Bizonyítsd be, hogy az n szám csupa különböző pozitív egészre való összegelőállításainak száma egyenlő n szám csupa páratlan pozitív egészre való összegelőállításainak számával!

megoldás

2.97. Jelölje $p_{\leq k}(n)$ az n természetes egész szám felbontásainak számát pozitív egészek összegére, melyek mindegyike legfeljebb k . $p_{\leq k}(0) = 1$ definíció szerint.

(a) Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{\leq k}(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

(b) Jelölje $p(n)$ az n partícióinak számát. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

(Értelmes ez a szorzat? Milyen konvergencia szerint?)

megoldás

2.98. Legyen $p(n)$ az n szám pozitív egészek összegeként (partíció) való felírásainak száma, ahol a sorrend nem számít. (Pl.: $p(4) = 5$, mert $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$.)

(a) Bizonyítsd be, hogy az n szám partícióiban az 1-esek száma $p(n-1) + p(n-2) + \dots + p(0)$, ahol $p(0) = 1$ definíció szerint!

(b) Keresd hasonló képletet a 2-esek, 3-asok,... számára!

(c) Bizonyítsd be, hogy

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(n-k)p(k),$$

ahol $\sigma(k)$ k osztóinak összege!

megoldás

2.99. Legyen $p(n)$ az n szám partícióinak a száma. Legyen továbbá $r(n)$ azon partíciók száma, ahol az összeadandók különböző páratlan számok. Mutasd meg, hogy $p(n) \equiv r(n) \pmod{2}$!

megoldás

3. fejezet

Algebrai módszerek a kombinatorikában

3.1. Lineáris algebrai módszerek

3.1. Az n csúcsú G gráf éleit megirányítjuk, majd minden $e = xy$ élhez hozzárendeljük azt a $v_e \in \mathbb{R}^n$ vektort, amely az x koordinátában 1, y koordinátában -1 , mindenütt máshol pedig 0.

- (a) Mekkora a v_e vektorok által generált V vektortér dimenziója?
- (b) Mely élekhez tartozó vektorrendszerek lesznek lineárisan függetlenek?
- (c) Mely élekhez tartozó vektorrendszerek lesznek generátorrendszerei V -nek?
- (d) Mely élekhez tartozó vektorrendszerek lesznek bázisai V -nek?

megoldás

3.2. (Graham–Pollak-tétel) Mutasd meg, hogy a K_n teljes gráf élhalmazát nem lehet felbontani $(n - 1)$ -nél kevesebb teljes páros gráf uniójára.

megoldás

3.3. Legyen $f_r(n)$ annak a minimuma ahány részre az n csúcsú teljes r -uniform hipergráfot fel lehet bontani páronként diszjunkt teljes r -osztályú r -uniform hipergráfok uniójára.

- (a) Mutasd meg, hogy $f_r(n) \geq f_{r-1}(n - 1)!$
- (b) Mutasd meg, hogy $f_3(n) = n - 2!$

(c) (Csak ehhez kell lineáris algebra.) Bizonyítsd be, hogy $n \geq 2k \geq 2$ esetén

$$f_{2k}(n) \geq 2 \frac{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-3} - \cdots - \binom{n}{k+1-2\lfloor k/2 \rfloor}}{\binom{2k}{k}}.$$

(Csak ehhez kell lineáris algebra.)

(d) Bizonyítsd be, hogy minden $r \geq 1$ esetén létezik $c_r > 0$, hogy $f_r(n) \geq c_r n^{\lfloor r/2 \rfloor}!$ (Megjegyzés: ez valóban a pontos nagyságrend.)

megoldás

3.2. Polinom módszer

Ebben a részben is alkalmas vektorterek dimenzióját kell becsülni egy-egy feladat állításának bizonyításához csakúgy, mint az előző részben. Az újdonságot az adja, hogy a vektortér elemei polinomok lesznek, így a lineáris függetlenség bizonyítására új lehetőségek nyílnak.

3.4. Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, ahol $|A| = n, |B| = m$. Tegyük fel, hogy G -hez tetszőleges élt hozzávéve keletkezik $K(S, T)$ teljes páros gráf, ahol $S \subset A, T \subset B, |S| = s, |T| = t$. Mutassuk meg, hogy legalább $nm - (n - s + 1)(m - t + 1)$ éle van G -nek!

megoldás

3.5. Tegyük fel, hogy az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz bármely két különböző pontja d_1 vagy d_2 távolságra van egymástól. Mutasd meg, hogy

$$|A| \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

megoldás

3.6. (a) Legyen G egy gráf $S \subset \mathbb{R}^d$ pontjain. Két csúcst akkor van összekötve, ha távolságuk 1. Legyen H egy tetszőleges gráf és legyen $H^{\times k}$ az a gráf, melynek csúcshalmaza $V(H)^k$ és az $(u_1, \dots, u_k), (v_1, \dots, v_k) \in V(H)^k$ akkor van összekötve, ha valamelyik koordinátában a csúcsok szomszédosak. A H gráf ω -Shannon-kapacitását a következőképpen definiáljuk:

$$\Theta_\omega(H) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(H^{\times k})^{1/k}.$$

Mutasd meg, hogy a G távolsággráf ω -Shannon-kapacitása legfeljebb $d + 2$!

(b) Mutass példát arra, hogy $\Theta_\omega(G) \leq d + 1$ nem feltétlenül igaz még a $d = 2$ esetben sem!

megoldás

3.7. Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf. Legyen $w(G^n)$ a legnagyobb $S \subseteq V^n$ halmaz mérete, melyre minden $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in S$ rendezett párra létezik i , hogy $(u_i, v_i) \in E(G)$. Legyen

$$C(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(G^n)^{1/n}$$

a G ún. Sperner-kapacitása. Legyen $d^+(G)$ a G -beli legnagyobb kifok. Mutasd meg, hogy

$$C(G) \leq d^+(G) + 1.$$

megoldás

3.3. A kombinatorikus Nullstellensatz alkalmazásai

3.8. Legyenek $n \geq 1, K \geq 0$ egészek. Legyen továbbá $h \in \mathbb{F}_p[t_1, \dots, t_n]$ polinom. Tegyük fel, hogy az $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{F}_p$ halmazokra teljesül, hogy $\sum_{i=1}^n |A_i| = K + n + \deg(h)$. Tegyük fel még, hogy a

$$(t_1 + \dots + t_n)^K h(t_1, \dots, t_n)$$

polinomban a $t_1^{|A_1|-1} \dots t_n^{|A_n|-1}$ együtthatója nem 0. Mutasd meg, hogy ekkor

$$|\{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n); \ h(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}| \geq K + 1.$$

megoldás

3.9. Legyen p prím. Legyen $f \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ n -változós polinom, melynek foka $n(p-1)$. Legyen

$$\int f = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{F}_p^n} f(\underline{a}).$$

Mutasd meg, hogy $\int f$ csak azon tagtól függ, amelyben minden kitevő pontosan $(p-1)!$

megoldás

3.10. Legyen $k = \frac{p-1}{2}$. Mutasd meg, hogy tetszőleges $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{F}_p$ esetén létezik $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ -nak egy $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ permutációja melyre $d_i = a_i - b_i!$

megoldás

3.11. Legyenek $A, B \subset \mathbb{F}_p$ halmazok és legyen

$$A \overset{*}{+} B = \{a + b \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}.$$

Mutasd meg, hogy

$$|A \overset{*}{+} B| \geq \min(|A| + |B| - 3, p).$$

Sőt, ha $|A| \neq |B|$, akkor az alábbi becslés is teljesül:

$$|A \overset{*}{+} B| \geq \min(|A| + |B| - 2, p).$$

megoldás

3.12. Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test és A egy $n \times n$ -es mátrix $\mathbb{F}$ felett. Tegyük fel, hogy A permanense nem 0. Mutasd meg, hogy ekkor tetszőleges $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ vektorra és $S_1, S_2, \dots, S_n \subset \mathbb{F}$ halmazokra, melyekre $|S_i| = 2$ minden i -re, létezik egy olyan $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ vektor, hogy $A\underline{x}$ minden koordinátájában különbözik a $\underline{b}$ vektortól.

megoldás

3.13. (Chevalley-tétel) Legyen p prím és legyenek

$$P_1 = P_1(x_1, \dots, x_n), P_2 = P_2(x_1, \dots, x_n), \dots, P_m = P_m(x_1, \dots, x_n)$$

$\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ -beli polinomok. Tegyük fel, hogy $n > \sum_{i=1}^m \deg(P_i)$. Bizonyítsd be, hogy ha a $P_1, \dots, P_m$ polinomoknak van egy közös $(c_1, \dots, c_n)$ gyökük, akkor van még egy közös gyökük!

megoldás

3.14. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ $\mathbb{F}_p$ -beli elemek. Mutasd meg, hogy található p darab közöttük, melyek összege 0!

megoldás

3.15. A $H_1, H_2, \dots, H_k$ hipersíkok lefedik a $[0, 1]^n$ hiperkocka összes csúcsát, kivéve a $\underline{0}$ csúcsot. Mutasd meg, hogy $k \geq n$!

megoldás

3.16. A $H_1, H_2, \dots, H_k$ síkok lefedik a $[0, 1, 2, \dots, n]^3$ kocka összes rácspontját, kivéve a $(0, 0, 0)$ csúcsot. Mutasd meg, hogy $k \geq 3n$!

megoldás

3.17. A $G = (V, E)$ gráfot egy él hozzávételével kapjuk egy 4-reguláris gráfból. A Chevalley-tétel (3.13 feladat) alkalmazásával mutasd meg, hogy G -nek van 3-reguláris részgráfja!

megoldás

3.18. Legyen p prím. Tegyük fel, hogy a G gráfban az átlagfokszám több mint $2p - 2$ és a legnagyobb fokszám legfeljebb $2p - 1$. Mutasd meg, hogy G -nek van p -reguláris részgráfja!

megoldás

4. fejezet

Spektrálgráfelméleti feladatok

4.1. Bevezető feladatok

4.1. (a) Legyen A a G gráf adjacenciamátrixa. Mi az $(A^2)_{ij}$ kombinatorikus jelentése ha $i = j$, illetve ha $i \neq j$?

(b) Legyen k pozitív egész. Mi az $(A^k)_{ij}$ kombinatorikus jelentése?

megoldás

4.2. Legyen A a G gráf adjacenciamátrixa, vagyis $A = (a_{ij})$, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i -edik és j -edik csúcs össze van kötve és 0, ha nincsenek összekötve. Legyenek az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ (valósak(!), miért is?). Mutasd meg, hogy

(a) $\sum \lambda_i = 0$,

(b) $\sum \lambda_i^2 = 2e(G)$!

(c) Mi lesz $\sum \lambda_i^3$, illetve általában $\sum \lambda_i^k$?

megoldás

4.3. (a) Mik a K_n teljes gráf sajátértékei?

(b) Mi a $K_{n,m}$ $n + m$ csúcsú teljes páros gráf spektruma?

megoldás

4.4. Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mik lesznek $G = G_1 \cup G_2$ diszjunkt uniónak a sajátértékei?

megoldás

4.5. Mutasd meg, hogy egy d -reguláris gráf legnagyobb sajátértéke d , és multiplicitása éppen a G gráf komponenseinek száma!

megoldás

4.6. Legyen G legnagyobb sajátértéke λ_1 , legkisebb sajátértéke λ_n . Mutasd meg, hogy $\lambda_1 \geq |\lambda_n|$!

megoldás

4.7. Legyen A a G gráf adjacenciamátrixa, legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektora $\underline{v}_1$. Mutasd meg, hogy

$$\max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_1,$$

illetve

$$\min_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_n,$$

továbbá

$$\max_{\|\underline{x}\|=1, \underline{x} \perp \underline{v}_1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_2.$$

Hogyan általánosítható ez az állítás a többi sajátértékre?

megoldás

4.8. (Courant–Weyl-tételek.) Legyen A valós, szimmetrikus mátrix. Legyenek A sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Mutasd meg, hogy

(a)

$$\lambda_k = \max_{U: \dim U = k} \min_{\substack{\underline{v} \in U \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v}.$$

(b)

$$\lambda_k = \min_{U: \dim U = n-k+1} \max_{\substack{\underline{v} \in U \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v}.$$

megoldás

4.9. Legyenek A szimmetrikus valós mátrix sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Legyen továbbá $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ ortonormált vektorrendszer. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k \underline{u}_i^T A \underline{u}_i$$

megoldás

4.10. Legyen az A mátrix ortonormált sajátbázisa $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ (oszlopvektorok) úgy, hogy $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$. Mutasd meg, hogy

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i \underline{v}_i^T.$$

Mutasd meg, hogy

$$A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \underline{v}_i \underline{v}_i^T.$$

megoldás

4.11. (a) Mutasd meg, hogy ha λ sajátértéke a G páros gráfnak, akkor $-\lambda$ is!

(b) Legyen a G összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke λ_1 , legkisebb sajátértéke λ_n . Tegyük fel, hogy $\lambda_n = -\lambda_1$. Bizonyítsd be, hogy G páros gráf!

(c) Mutasd meg, hogy a (b) feladatban nem hagyható el az összefüggőségi feltétel!

megoldás

4.12. A d -reguláris G gráf sajátértékei legyenek $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Mik $\overline{G}$ sajátértékei?

megoldás

4.13. Jelölje $m_k(G)$ azt a számot, ahányféleképpen ki lehet választani G -nek k független élét ($m_0(G) = 1$). Bizonyítsd be, hogy egy T fa karakterisztikus polinomja

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j m_j(T) x^{n-2j}.$$

megoldás

4.14. (a) Adj meg két azonos spektrumú gráfot, amelyek közül az egyik összefüggő, a másik nem!

(b) Adj meg két nem izomorf fát, melyeknek megegyezik a spektruma!

megoldás

4.15. Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf. Legyen L_G a G gráf élgráfja. Legyenek L_G sajátértékei $\lambda_1(L_G) \geq \dots \geq \lambda_m(L_G)$. Bizonyítsd be, hogy $\lambda_m(L_G) \geq -2$, és egyenlőség áll fenn, ha $m > n$.

megoldás

4.2. Gráfszorzatok, gráftranszformációk

4.16. (a) A G gráf adjacenciamátrixának sajátértékei $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Mik annak a $G[k]$ gráfnak a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítjük egy k méretű független halmazzal, és két ilyen független pontthalmaz között behúzzunk minden élet pontosan akkor, ha eredetileg volt él a két csúcs között, egyébként pedig nem húzzunk be egyetlen élet sem?

(b) Mik annak a $G[k]$ gráfnak a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítjük egy k méretű klikkel és két ilyen klikk között behúzzunk minden élet pontosan akkor, ha eredetileg volt él a két csúcs között, egyébként pedig nem húzzunk be egyetlen élet sem?

megoldás

4.17. (a) A G gráf Laplace-mátrixának a sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Mik annak a $G[k]$ gráfnak a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítjük egy k méretű független halmazzal és két ilyen független halmaz között behúzzunk minden élet pontosan akkor, ha eredetileg volt él a két csúcs között, egyébként pedig nem húzzunk be egyetlen élet sem?

(b) Mik annak a $G[k]$ gráf Laplace-mátrixának a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítjük egy k méretű klikkel és két klikk között behúzzunk minden élet pontosan akkor, ha eredetileg volt él a két csúcs között, egyébként pedig nem húzzunk be egyetlen élet sem?

megoldás

4.18. Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mik a $G_1 \times G_2$ gráf sajátértékei, ahol $G_1 \times G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: a csúcshalmaz $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, és az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ és $(v_1, v_2) \in E(G_2)$.

megoldás

4.19. Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mik $G_1 \star G_2$ gráf sajátértékei, ahol $G_1 \star G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: a csúcshalmaz $V(G_1 \star G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, és az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha minden koordinátában vagy megegyeznek, vagy össze vannak kötve.

megoldás

4.20. Adottak a G_1 és G_2 gráfok adjacenciamátrixának a sajátértékei. A $G_1 \square G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: $V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, továbbá (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve, ha $u_1 = u_2$ és $(v_1, v_2) \in E(G_2)$, vagy $v_1 = v_2$ és $(u_1, u_2) \in E(G_1)$. Mik a $G_1 \square G_2$ gráf sajátértékei?

megoldás

4.3. Spektrálsugár-bebecslések

4.21. Legyen G' részgráfja G -nek. Legyen $\lambda(G)$ G spektrálsugara, azaz G legnagyobb sajátértéke. Mutasd meg, hogy $\lambda(G') \leq \lambda(G)$, és ha G összefüggő és G' valódi részgráfja G -nek, akkor nem állhat fenn egyenlőség!

megoldás

4.22. Legyen d a G gráf legkisebb, D a legnagyobb fokszáma. Legyen továbbá λ az adjacenciamátrix legnagyobb sajátértéke. Bizonyítsd be, hogy

- (a) $\sqrt{D} \leq \lambda \leq D$,
 (b) $\frac{2e(G)}{n} \leq \lambda \leq \sqrt{2e(G)(1 - \frac{1}{n})}$.

megoldás

4.23. Legyen G spektrálsugara $\lambda(G)$, a G -beli csúcsok fokszámai $d_1, \dots, d_n$. Mutasd meg, hogy

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2} \leq \lambda(G).$$

megoldás

4.24. Legyen G_1 és G_2 két gráf azonos csúcshalmazon. Legyen G az a gráf, amelynek csúcshalmaza $V(G) = V(G_1) = V(G_2)$ és $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Legyen $\lambda(G_i)$ a G_i gráf spektrálsugara, azaz G_i legnagyobb sajátértéke. Bizonyítsd be, hogy

$$\lambda(G) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G_2).$$

megoldás

4.25. Legyen T fa n csúcson. Mutasd meg, hogy a legnagyobb sajátértéke legfeljebb $\sqrt{n-1}$. Állhat-e egyenlőség a becslésben?

megoldás

4.4. Gráfparaméterek becslései

4.26. Legyen G (n, d, λ) -gráf vagyis d -reguláris n csúcsú gráf, melynek minden d -től különböző sajátértéke legfeljebb λ abszolútértékű. Legyen $X, Y \subseteq V(G)$ és jelölje $e(X, Y)$ azon élek számát, melyek egyik végpontja X -ben, másik végpontja Y -ban van. Mutasd meg, hogy

$$\left| e(X, Y) - \frac{d|X||Y|}{n} \right| \leq \lambda |X|^{1/2} |Y|^{1/2}.$$

megoldás

4.27. (a) Legyen G gráf n csúcson, melynek legnagyobb Laplace-sajátértéke μ_1 . Legyen $(A, V \setminus A)$ a G gráf egy vágása, ahol $|A| = a, |V \setminus A| = b$. A vágásban szereplő élek számát jelölje $e(A, V \setminus A)$. Mutasd meg, hogy ekkor

$$e(A, V \setminus A) \leq \mu_1 \frac{ab}{n}.$$

(b) Legyenek a G d -reguláris gráf adjacenciamátrixának sajátértékei $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Mutasd meg, hogy ekkor a gráf tetszőleges vágása legfeljebb

$$(d - \lambda_n) \frac{n}{4} = \frac{e}{2} - \frac{\lambda_n n}{4}$$

élet tartalmaz!

megoldás

4.28. (Hoffman-becslés) Legyen G d -reguláris gráf λ_n legkisebb sajátértékkel, és legyen $\alpha(G)$ a legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy

$$\alpha(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{d - \lambda_n}.$$

megoldás

4.29. Legyen n_+, n_- a G gráf nemnegatív, illetve nempozitív sajátértékeinek a száma. Legyen $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy $\alpha(G) \leq \min\{n_+, n_-\}$!

megoldás

4.5. Erősen reguláris gráfok

A G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel, ha v csúcsa van, k -reguláris és ha két csúcs össze van kötve, akkor nekik pontosan λ közös szomszédjuk van, ha pedig nincsenek összekötve, akkor pedig pontosan μ közös szomszédjuk van.

4.30. Legyen G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel. Legyen A az adjacenciamátrixa G -nek. Mutasd meg, hogy

$$A^2 + (\mu - \lambda)A - (k - \mu)I = \mu J,$$

ahol I az egység, J pedig a csupa 1 mátrix. Mik az A mátrix sajátértékei? Mi az egyes sajátértékek multiplicitása?

megoldás

4.31. (a) Mik a Petersen-gráf sajátértékei?

(b) A Paley-gráfot a következőképpen definiálják. Legyen p egy $4k + 1$ alakú prím. A Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{Z}_p$, és $a, b \in \mathbb{Z}_p$ csúcsok össze vannak kötve, ha $a - b$ négyzetszám $\mathbb{Z}_p$ -ben. Mik a Paley-gráf sajátértékei?

megoldás

4.32. Legyen a G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel. Legyen $k > \vartheta_1 > \vartheta_2$ a G gráf három különböző sajátértéke. Mutasd meg, hogy

$$(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = v\mu.$$

megoldás

4.33. Legyen a G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel. Mutasd meg, hogy G gráf vagy konferenciagráf, azaz olyan erősen reguláris, melynek paraméterei $(4t + 1, 2t, t - 1, t)$ valamilyen t -re, vagy minden sajátértéke egész szám!

megoldás

4.34. Legyen a G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel. Tegyük fel, hogy G nem az üres vagy a teljes gráf és $v = p$ prím. Mutasd meg, hogy ekkor G konferenciagráf, azaz olyan erősen reguláris, melynek paraméterei $(p, \frac{p-1}{2}, \frac{p-5}{4}, \frac{p-1}{4})$.

megoldás

4.35. Tegyük fel, hogy egy k -reguláris G gráfra teljesül, hogy ha két különböző csúcs össze van kötve, akkor nincs közös szomszédjuk, ha pedig nincsenek összekötve, akkor pontosan egy közös szomszédjuk van.

- (a) Hány csúcsa van G -nek k függvényében? (Ez még csak cseresznyezés.)
- (b) Mutasd meg, hogy k az 1, 2, 3, 7, 57 számok valamelyike!
- (c) Mely k -re ismersz példát a fentiek közül?

megoldás

4.36. Tegyük fel, hogy egy k -reguláris G gráfra teljesül, hogy ha két különböző csúcs össze van kötve, akkor nincs közös szomszédjuk, ha pedig nincsenek összekötve, akkor pontosan két közös szomszédjuk van.

- (a) Hány csúcsa van G -nek k függvényében? (Ez még csak cseresznyezés.)
- (b) Mutasd meg, hogy létezik egy r egész szám, melyre $d = r^2 + 1$!

megoldás

4.37. Mutasd meg, hogy K_{10} nem bontható fel három Petersen-gráf éldisjunk uniójára!

megoldás

4.6. Laplace-sajátértékek

4.38. Legyenek a G n -csúcsú gráf Laplace-mátrixának sajátértékei $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$. Mutasd meg, hogy $\mu_n = 0$!

megoldás

4.39. Legyenek a G n -csúcsú gráf Laplace-mátrixának a sajátértékei $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$. Mik $\bar{G}$ gráf Laplace-mátrixának a sajátértékei?

megoldás

4.40. Mik a K_n teljes, illetve $K_{n,m}$ teljes páros gráf Laplace-mátrixának a sajátértékei?

megoldás

4.41. Legyen $\tau(G)$ a G gráf feszítőfáinak száma.

- (a) Bizonyítsd be, hogy $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$!
- (b) Legyen $L(G)$ a G gráf Laplace-mátrixa és $L(G)_i$ az a mátrix, amit a Laplace-mátrixból kapunk az i -edik sor és oszlop törlésével. Bizonyítsd be, hogy $\det L(G)_i = \tau(G)$!

megoldás

4.42. Legyenek a G n -csúcsú gráf Laplace-mátrixának sajátértékei $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$. Legyen továbbá $\tau(G)$ G gráf feszítőfáinak a száma. Bizonyítsd be, hogy

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i.$$

megoldás

4.43. (a) (Cayley-tétel) Mutasd meg, hogy n^{n-2} fa van n számozott csúcson, vagyis ennyi feszítőfája van a K_n teljes gráfnak.

(b) Hány feszítőfája van a $K_{n,m}$ teljes páros gráfnak?

megoldás

4.44. Hány feszítőfája van a teljes k -osztályú gráfnak, ha az osztályokban rendre $a_1, \dots, a_k$ csúcs van ($n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$)?

megoldás

4.45. Hány feszítőfája van annak a gráfnak amit úgy kapunk, hogy egy K_n teljes gráfból elhagyjuk egy K_k teljes gráf élhalmazát?

megoldás

4.46. Hány olyan számozott csúcsú fa van n ponton, amely tartalmaz adott k független élt?

megoldás

4.47. Hány olyan számozott csúcsú fa van n ponton, amely tartalmaz egy adott k ágú csillagot?

megoldás

4.48. Hány feszítőfája van a Petersen-gráfnak?

megoldás

4.49. A Paley-gráfot a következőképpen definiálják. Legyen p egy $4k + 1$ alakú prím. A Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{Z}_p$, és $a, b \in \mathbb{Z}_p$ csúcsok össze vannak kötve, ha $a - b$ négyzetszám $\mathbb{Z}_p$ -ben. Hány feszítőfája van a Paley-gráfnak?

megoldás

4.50. Legyen $L(G, x)$ az n -csúcsú G gráf Laplace-mátrixának karakterisztikus polinomja. Mutasd meg, hogy $\overline{G}$ feszítőfáinak száma $\frac{1}{n^2} L(G, n)!$

megoldás

4.51. Bizonyítsd be, hogy $\det(L(G) + xJ) = n^2 \tau(G) x!$

megoldás

5. fejezet

Valószínűségszámítási módszerek a kombinatorikában

5.1. Várható érték és változtatott véletlen

5.1. Van egy n csúcsú és e élű gráfunk. Mutasd meg, hogy van olyan részgráfja, ami páros és legalább $e/2$ élt tartalmaz!

megoldás

5.2. Adott G gráf n csúcson. Legyen $k = \lceil n/2 \rceil$. Mutasd meg, hogy a gráfnak van olyan vágása, ami legalább az élek $\frac{k}{2k-1}$ részét tartalmazza!

megoldás

5.3. Legyen G és H két gráf n csúcson. Mutasd meg, hogy van G -nek olyan K részgráfja, amely izomorf H egy részgráfjával és legalább $\frac{e(G)e(H)}{\binom{n}{2}}$ éle van!

megoldás

5.4. Legyen $R(k, k)$ Ramsey-szám az a legkisebb szám t szám, hogy akárhogyan színezzük ki a K_t teljes gráf éleit két színnel, lesz monokromatikus k csúcsú teljes részgráf.

(a) Tegyük fel, hogy n, k számokra fennáll, hogy $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Mutasd meg, hogy $R(k, k) > n$! Speciálisan bizonyítsd be, hogy $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ha $k \geq 3$!

(b) Mutasd meg, hogy tetszőleges n, k számra $R(k, k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}!$ Milyen alsó becslés jön ki $R(k, k)$ -ra?

(c) Mutasd meg, hogy létezik egy C szám, hogy bármely n -re létezik egy G gráf n csúcson, hogy $\chi(G) > \frac{n}{C \log n}$, $\omega(G) < C \log n$!

megoldás

5.5. Egy teniszerenyen n ember indult, mindenki mindenkivel játszott egyszer. A verseny végeredményét k -jónak hívjuk, ha tetszőleges k emberhez van olyan versenyző, aki mindegyiket legyőzte. Mutasd meg, hogy adott k esetén létezik olyan $n_0(k)$, hogy $n \geq n_0(k)$ esetén van k -jó verseny!

megoldás

5.6. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n -re van olyan tournament, amelynek legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-útja van!

megoldás

5.7. Legyenek a G gráf csúcsainak fokai $d_1, \dots, d_n$. Legyen $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}.$$

megoldás

5.8. Legyenek a G izolált csúcsot nem tartalmazó gráf csúcsainak fokai $d_1, \dots, d_n$. Legyen $\eta(G)$ a G gráf legnagyobb olyan csúcshalmazának mérete, amely körmentes részgráfot feszít. Mutasd meg, hogy

$$\eta(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{2}{d_i + 1}.$$

megoldás

5.9. Mutasd meg, hogy n pozitív egész szám közül mindig kiválasztható $\lfloor n/3 \rfloor$, melyek között az $a_1 + a_2 = a_3$ egyenletnek nincs megoldása!

megoldás

5.10. Egy $G = (V, E)$ gráfban a minimális fokszám $\delta > 1$. Mutasd meg, hogy van a gráfnak egy domináló halmaza, melynek mérete legfeljebb

$$n \frac{1 + \ln(\delta + 1)}{\delta + 1}.$$

(Egy U halmazt domináló halmaznak nevezzük, ha minden $v \in V \setminus U$ esetén van v -nek szomszédja U -ban.)

megoldás

5.11. Mutasd meg, hogy tetszőleges (k, l) számpárra létezik olyan gráf, melynek kromatikus száma legalább k , és a legrövidebb kör hossza legalább l !

megoldás

5.12. Legyen $f(m)$ a legnagyobb olyan szám, amelyre teljesül, hogy bárhogyan adunk meg $A_1, \dots, A_m$ halmazokat, van közöttük $f(m)$ darab, hogy a kiválasztott halmazok között nincs megoldása a $B_1 \cup B_2 = B_3$ (B_1, B_2, B_3 különböző) halmazegyenletnek. Mutasd meg, hogy $f(m) \geq \frac{1}{2}\sqrt{m}$!

megoldás

5.13. (a) Legyen G gráf n csúccsal és e éllel. Legyen $X(G)$ a G gráf keresztezési száma vagyis az a legnagyobb szám, amelyre teljesül, hogy bárhogyan rajzoljuk le G -t a síkba, legalább $X(G)$ darab egymást metsző élpár lesz. Bizonyítsd be, hogy $X(G) \geq e - 3n$!

(b) Bizonyítsd be, hogy ha $e \geq 4n$, akkor $X(G) \geq \frac{e^3}{64n^2}$!

megoldás

5.14. Legyen H k -uniform hipergráf n csúcson és m éllel. Legyen $\tau(H)$ a H lefogási száma: $\tau(H) = \min\{|S| \mid |S \cap e| \neq 0 \ \forall e \in E(H)\}$. Mutasd meg, hogy $k > 1$ esetén tetszőleges $\alpha > 0$ -ra

$$\tau(H) \leq n \frac{\alpha \log k}{k} + \frac{m}{k^\alpha}.$$

megoldás

5.15. Legyen

$$f(k, s) = \min\{|E(H)| \mid H \text{ } k\text{-uniform hipergráf, } \chi(H) \geq s\}.$$

Mutasd meg, hogy

$$f(k, s) > (k-1) \left\lceil \frac{s-1}{k} \right\rceil \left(\frac{k-1}{k} (s-1) \right)^{k-1}.$$

megoldás

5.16. Mutasd meg, hogy van olyan $G = (A, B, E)$ páros gráf, amelyre $|A| = |B| = n$, nincs benne $K_{s,t}$ és éleinek számára teljesül, hogy

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{2}{s!t!}\right) n^{2 - \frac{s+t-2}{st-1}}.$$

megoldás

5.17. Legyen G gráf n csúcson m éllel. Tegyük fel, hogy $n \geq 2m$. Mutasd meg, hogy legalább $\frac{m^2}{4n}$ kör van a gráfban!

megoldás

5.18. (a) Legyen $t(m, r)$ az m csúcsú r -osztályú Turán-gráf éleinek száma. Tegyük fel, hogy G m színnel színezhető gráf e éllel. Mutasd meg, hogy ekkor tartalmaz egy r színnel színezhető G gráfot, melynek legalább $e \frac{t(m, r)}{\binom{m}{2}}$ éle van!

(b) Mutasd meg, hogy ha $\chi(G) \leq 2s$, akkor van olyan vágása G -nek, ami legalább $\frac{e}{2} + \frac{e}{4s-2}$ élt tartalmaz!

(c) Mutasd meg, hogy ha $e = \binom{r}{2} n^2$, akkor G tartalmaz egy r osztályú gráfot legalább $\binom{r}{2} n^2$ éllel!

megoldás

5.19. Legyen $P(n)$ a maximuma annak, hogy hány Hamilton-útja lehet egy n csúcsú T tournamantnek. Hasonlóan, legyen $C(n)$ a maximuma annak, hogy hány Hamilton-köre lehet egy n csúcsú T tournamantnek. Mutasd meg, hogy

$$C(n) \geq \frac{P(n-1)}{4}.$$

megoldás

5.20. Legyen H r -uniform e élű hipergráf n csúcson. Tegyük fel, hogy $n \leq 2e$. Mutasd meg, hogy létezik olyan $S \subseteq V(H)$, mely nem feszít élet és

$$|S| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2e} \right)^{1/(r-1)} n.$$

megoldás

5.21. Legyen H egy egyszerű gráf n csúcson, e éllel. A H egy $G[H]$ felfűjt-ját a következőképpen definiáljuk. A H minden u csúcsát helyettesítjük a csúcsoknak egy V_u kupacával, és a V_u és $V_{u'}$ kupacok között akkor húzunk be néhány élet, ha $(u, u') \in E(H)$, egyébként nem húzunk be egyetlen élet sem. Tegyük fel, hogy $G[H]$ minden kupaca N csúcsot tartalmaz és $G[H]$ nem tartalmazza H egyetlen példányát sem úgy, hogy egy u csúcsnak megfelelő csúcs a V_u kupacból kerül ki. Mutassuk meg, hogy $G[H]$ éleinek száma legfeljebb $(e-1)N^2$!

megoldás

5.2. Második momentum módszer

5.22. (a) (Markov-egyenlőtlenség) Legyen X nemnegatív valószínűségi változó, legyen $\mathbb{E}X > 0$. Mutasd meg, hogy tetszőleges pozitív λ esetén

$$\mathbb{P}r(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\lambda}.$$

(b) (Csebisev-egyenlőtlenség) Legyen X valószínűségi változó, legyen $\mathbb{E}X = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Mutasd meg, hogy

$$\mathbb{P}r(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

megoldás

5.23. (a) Hívjuk az X valószínűségi változót kombinatorikus valószínűségi változónak, ha az X nemnegatív egész értékeket vesz fel. Mutasd meg, hogy kombinatorikus valószínűségi változó esetén

$$\mathbb{P}r(X = 0) \geq 1 - \mathbb{E}X.$$

Speciálisan, ha X_n kombinatorikus valószínűségi változók egy sorozatára $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1.$$

(b) Mutasd meg, hogy

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}.$$

Speciálisan, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{(\mathbb{E}X_n)^2} = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0.$$

megoldás

5.24. Legyen $X^{(k)} = X_1^{(k)} + X_2^{(k)} + \dots + X_n^{(k)}$, ahol $X_i^{(k)}$ az $A_i^{(k)}$ esemény indikátor valószínűségi változója, a k pedig egy paraméter, amellyel tartani fogunk végtelenbe. (Az n is függhet k -től.) Legyen $i \sim j$, ha az $A_i^{(k)}$ és $A_j^{(k)}$ események nem függetlenek. Legyen továbbá

$$\Delta^{(k)} = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i^{(k)} \cap A_j^{(k)}).$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X^{(k)} \rightarrow \infty$ és $\Delta^{(k)} = o(\mathbb{E}(X^{(k)})^2)$. Bizonyítsd be, hogy $X^{(k)} > 0$ 1-hez tartó valószínűséggel, sőt $X^{(k)} \sim \mathbb{E}X^{(k)}$ majdnem mindig teljesül, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_k - \mathbb{E}X_k| \geq \varepsilon \mathbb{E}X_k) = 0.$$

megoldás

5.25. Használjuk az előző feladat jelöléseit. Tegyük fel, hogy az $X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}$ indikátor valószínűségi változók szimmetrikus szerepet töltenek be, vagyis tetszőleges i és j -re van a valószínűségi térnek egy olyan automorfizmusa, ami az $A_i^{(k)}$ eseményt az $A_j^{(k)}$ eseménybe képezi. Legyen

$$\Delta(k)^* = \sum_{j \sim i} \mathbb{P}r(A_j^{(k)} \mid A_i^{(k)}).$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X^{(k)} \rightarrow \infty$ és $\Delta(k)^* = o(\mathbb{E}X^{(k)})$. Mutasd meg, hogy ekkor $X^{(k)} > 0$ 1-hez tartó valószínűséggel, sőt $X^{(k)} \sim \mathbb{E}X^{(k)}$ majdnem mindig!

megoldás

5.26. Legyen $G = G(n, p)$ véletlen gráf, ahol $p = p(n)$ függhet n -től. Legyen $\omega(G)$ a legnagyobb klikk mérete.

(a) Mutasd meg, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} pn^{2/3} = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}r(\omega(G) \geq 4) = 0.$$

(b) Mutasd meg, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} pn^{2/3} = \infty$ akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}r(\omega(G) \geq 4) = 1.$$

megoldás

Megjegyzés: Egy $f(n)$ függvény a P tulajdonság *küszöbfüggvénye*, ha

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{f(n)} = 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}r(G(n, p(n)) \in P) = 0$$

és

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{f(n)} = \infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}r(G(n, p(n)) \in P) = 1.$$

Tehát a 5.26 feladat szerint az $n^{-2/3}$ küszöbfüggvénye annak a tulajdonságnak, hogy egy véletlen gráf tartalmaz egy teljes 4 csúcsú gráfot.

5.27. Legyen K_4^- az egyetlen 4 csúcsú, 5 élű gráf. Mi lesz a küszöbfüggvénye K_4^- megjelenésének $G(n, p)$ -ben?

megoldás

5.28. Legyen $\omega(n) \rightarrow \infty$. Továbbá legyen $p_a(n) = (\log n - \omega(n))/n$ és $p_f(n) = (\log n + \omega(n))/n$.

(a) Mutasd meg, hogy $G(n, p_a(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan tartalmaz izolált pontot, míg $G(n, p_f(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan nem tartalmaz izolált pontot!

(b) Mutasd meg, hogy $G(n, p_a(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan nem összefüggő, míg $G(n, p_f(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan összefüggő!

megoldás

5.3. A Lovász-féle lokál-lemma alkalmazásai

5.29. (Lovász-féle lokál-lemma, általános alak) Legyenek $A_1, \dots, A_n$ események egy tetszőleges valószínűségi mezőben. Az irányított $D = (V, E)$ gráf a $V = \{1, 2, \dots, n\}$ csúcshalmazon az $A_1, \dots, A_n$ események függőségi digráfja, ha az A_i esemény teljesen független az $\{A_j \mid (i, j) \notin E\}$ eseményektől. Tegyük fel, hogy a $D = (V, E)$ az $A_1, \dots, A_n$ események függőségi gráfja és $x_1, \dots, x_n$ valós számok, melyekre $0 \leq x_i < 1$ és

$$\mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j)$$

minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Mutasd meg, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

megoldás

5.30. (Lovász-féle lokál-lemma, szimmetrikus alak) Legyenek $A_1, \dots, A_n$ események egy tetszőleges valószínűségi térben. Tegyük fel, hogy minden i -re A_i teljesen független legfeljebb d kivétellel az összes többi A_j -től. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A_i) = p$ és

$$p \leq \frac{1}{e(d+1)},$$

ahol $e = 2,71\dots$. Bizonyítsd be, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0.$$

megoldás

5.31. Tegyük fel, hogy a $H = (V, E)$ hipergráf minden élének legalább k csúcsa van és minden él legfeljebb d másikat metsz. Mutasd meg, hogy ha $e(d+1) \leq 2^{k-1}$, akkor H csúcsai megszínezhetőek két színnel úgy, hogy ne legyen monokromatikus él.

megoldás

5.32. Tekintsük az $R(k, k)$ Ramsey-számot.

(a) Mutasd meg, hogy ha

$$e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

akkor $R(k, k) > n$.

(b) Mutasd meg, hogy

$$R(k, k) > \frac{\sqrt{2}}{e} (1 + o(1)) k 2^{k/2}.$$

megoldás

5.33. Legyen $D = (V, E)$ egyszerű irányított gráf, melyben a minimális kifok δ , a maximális befok Δ . Mutasd meg, hogy ha $e(\Delta\delta + 1)(1 - \frac{1}{k})^\delta < 1$, akkor D tartalmaz egy irányított kört, melynek hossza k -val osztható!

megoldás

6. fejezet

Algoritmuselmélet

Nagyságrendek

Ennek a szakasznak az a célja, hogy megismertessen a különböző függvények nagyságrendjének összehasonlítására használt bevett jelölésekkel néhány egyszerű példán keresztül, bizonyítások nélkül. (Aki ezzel már tisztában van, az nyugodtan ugorja át ezt a részt.)

Definíció. Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ természetes számokon értelmezett valós függvények. Azt mondjuk, hogy

- (a) $f(n) = O(g(n))$ [ejtsd: „ordó $g(n)$ ”], ha van olyan c szám, hogy $f(n) \leq cg(n)$, legfeljebb véges sok n érték kivételével.
- (b) $f(n) = o(g(n))$ [ejtsd: „kisordó $g(n)$ ”], ha bármely pozitív c számra $f(n) \leq cg(n)$, legfeljebb véges sok n érték kivételével.
- (c) $f(n) = \Omega(g(n))$ [ejtsd: „omega $g(n)$ ”], ha $g(n) = O(f(n))$.
- (d) $f(n) = \omega(g(n))$ [ejtsd: „kisomega $g(n)$ ”], ha bármely pozitív c számra $f(n) \leq cg(n)$, legfeljebb véges sok n érték kivételével.
- (e) $f(n) = \Theta(g(n))$ [ejtsd: „teta $g(n)$ ” avagy $f(n)$ és $g(n)$ azonos nagyságrendű], ha $f(n) = O(g(n))$ és $f(n) = \Omega(g(n))$.
- (f) $f(n) \simeq g(n)$, [aszimptotikusan egyenlő], ha $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$.

Ha $f(n) = g(n) + h(n)$, és $h(n) = o(g(n))$, $h(n)$ -et *hibatagnak* nevezzük.

Ebben a fejezetben a $\log$ az e alapú logaritmust jelöli. (Mivel $\log_a n = \frac{\log n}{\log a} = \Theta(\log n)$ bármely $a > 1$ számra, ezért a logaritmus alapja sok feladatban nem lesz lényeges.)

6.1. Bizonyítsuk be, hogy minden k -adfokú polinom azonos nagyságrendű!

6.2. Bizonyítsuk be, hogy minden k -adfokú, 1 főegyütthatós polinom aszimptotikusan egyenlő!

6.3.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ n^2, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Igaz-e, hogy $f(n) = O(n^2)$, vagy $f(n) = \Omega(n^2)$?

6.4.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{ha } n < 1000, \\ n^2, & \text{ha } n \geq 1000. \end{cases}$$

Igaz-e, hogy $f(n) = O(n^2)$, vagy $f(n) = \Omega(n^2)$?

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket:

6.5. $(\log n)^k = o(n)$ rögzített k mellett

6.6. $n^k = o(2^n)$ rögzített k mellett

6.7. $\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n) = \Theta(n^2)$

6.8. $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} + O(n^{k-1}) = \Theta(n^k)$, rögzített k mellett

6.9. $\frac{n^3+n+1}{n^2-1} = n + O(1)$

6.10. $\sqrt{n^2 + 2pn + q} = n + p + O(1)$, rögzített p és q mellett

6.11. $\log(n^2 + 1) = 2 \log n + O(\frac{1}{n^2})$

6.12. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

6.13. $\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$

6.14. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$

6.15. $\sum_{k=1}^n k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + O(n^m)$, rögzített m mellett

6.16. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + O(1)$

6.17. $\sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} = \frac{\log^2 n}{2} + O(1)$

6.18. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = O(1)$

6.19. $n! = o(n^n)$

A következő két példa nehezebb mint az eddigiek, de bizonyítás nélkül is hasznos tudni az alábbi közelítéseket.

6.20. $\sum_{k=1}^n \log k = \log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + O(1) = \Theta(\log n^n)$

6.21. $\binom{2n}{n} \simeq \frac{4^n}{c\sqrt{n}}$ valamely c konstanssal

6.22. $f(n) + g(n) = O(\max[f(n), g(n)])$

6.23. Ha $f_1(n) = O(g_1(n))$ és $f_2(n) = O(g_2(n))$, akkor $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

Igaz-e, hogy ha $f(n) = O(g(n))$, $f(n) > 0$, $g(n) > 0$, akkor

6.24. $f^2(n) = O(g^2(n))$

megoldás

6.25. $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

megoldás

6.26. $\frac{1}{f(n)} = O(\frac{1}{g(n)})$

megoldás

6.27. $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$

megoldás

6.28. $h(f(n)) = O(h(g(n)))$, ha $h(x) < x^m$, valamely rögzített m természetes számmal

megoldás

6.1. Rekurziók

6.29. Rekurziók megoldásához hasznos tudni a Mester-tételt:

Ha $T(n) = a T(\frac{n}{b}) + f(n)$, ahol $a \geq 1$ és $b > 1$, valamint $T(x) > 0$ konstans, ha $0 < x \leq 1$ és $f(n)$ pozitív, akkor

- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, ha $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$, ha $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$
- $T(n) = \Theta(f(n))$, ha $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ valamilyen $c < 1$ konstansra, ha n nagy (Ez teljesül például ha $f(n) = C(n^{\log_b a + \epsilon})$)

(Valójában persze T csak egész számokon van többnyire értelmezve és a rekurziók definíciójában egész részek is szoktak szerepelni, de ezeket felül vagy alul becslve az f apró növelésével gyakorlatilag mindig ilyen formára hozhatjuk a képletünket.)

Bizonyítsuk be a fenti tételt!

megoldás

6.30. Adott egy $n - 1$ emeletes ház és d darab tojás, melyek bármelyikét ledobva az N -edikről vagy magasabbról összetörik, kisebb emeletekről viszont nem. Egy tojás egy ledobása legyen egy mérés (attól függetlenül, hogy a tojás összetört-e). Hogyan számoljuk ki, hogy minimum hány mérés kell N meghatározására? Adjunk képletet, hogy d tojással és m méréssel hány emeletes házat tudunk ellenőrizni. (Az is lehet, hogy a tojás még az $(n - 1)$ -edikről sem törik el, ezért n lehetséges kimenetel van.)

megoldás

6.31. Adott n pár zokni egy veremben, valamilyen sorrendben. Összesen három vermünk van (mint a Hanoi-tornyaiban), és egy lépés egy zoknit át-helyezni az egyik tetejéről egy másikéra, vagy ha két felső zokni pár, akkor levehetjük őket. Nagyságrendileg hány lépés kell, hogy levegyük az összes zoknit? (Feltehetjük, hogy a zoknik pozícióját ismerjük és fejben tudjuk tartani.)

megoldás

6.2. Rendezés

Az alábbi feladatokban adva van n elem, melyek különböző súlyuak/méretűek. Egy méréssel összehasonlíthatunk közülük kettőt, hogy meghatározzuk, melyik a nagyobb.

6.32. Hány mérés kell a legnagyobb és legkisebb elem kiválasztásához? (Tehát mindkettőt meg akarjuk határozni minél kevesebb páronkénti összehasonlítással.) Adjunk alsó becslést is!

megoldás

6.33. Mennyi a gyorsrendezés futásideje legrosszabb esetben?

megoldás

6.34. A gyorsrendezés nagy előnye, hogy helyben rendez és várható időben gyorsan. Hogyan módosítsuk ezt az algoritmust, ha lehetnek a listán egyenlő elemek is?

megoldás

Az összehasonlításon alapuló rendezéseknél a kérdéseink többnyire a korábbi válaszoktól függték. Rendezhetnénk azonban úgy is, hogy előre megadjuk helypárok egy sorozatát, és minden lépésben az ott álló egy-egy elemet összehasonlítjuk, majd egy esetleges cserével növekvő sorrendbe hozzuk. Az ilyen cserelistákat *rendező hálózatoknak* nevezzük.

6.35. Készíts n elemhez rendező hálózatot!

megoldás

6.36. Mutasd meg, hogy ha egy rendező hálózat 0–1 értékű bemenetekre jól működik, akkor tetszőleges számokra is!

megoldás

6.37. Bizonyítsd be, hogy egy rendező hálózatban bármely két szomszédos elemet (helyet) valamikor összehasonlítunk!

megoldás

6.38. Készíts n elemhez rendező hálózatot $O(n \log^2 n)$ összehasonlítással és $O(\log^2 n)$ mélységgel! (Egy rendezés során egyszerre több diszjunkt párt is összehasonlíthatunk, ezt, azaz a párhuzamos lépések számát nevezzük a hálózat mélységének.)

megoldás

6.39. Mutasd meg, hogy bármely rendező hálózatban legalább $\Omega(n \log n)$ összehasonlítás van, tehát legalább $\Omega(\log n)$ mély!

megoldás

Ilyen hálózat létezik is, de a gyakorlatban nem praktikus, lásd Ajtai–Komlós–Szemerédi-féle rendező hálózat.

6.3. Számolás

- 6.40.** (a) Mennyi $11117^{24601} \bmod 11$?
(b) Mennyi $396396936966391^{36303065464} \bmod 6$?
(c) Mennyi $36203843409^{24601} \bmod 10$?
(d) Mennyi $3^{20483^{3073}} \bmod 2^{12}$?

megoldás

6.41. Modulo $2^n + 1$

- (a) mennyi 2^{2^n} ?
(b) mennyi 2^k inverze?
(c) ha $a \cdot b = x2^n + y$, akkor hogyan fejezhetjük ki egyszerűbben $a \cdot b$ -t?

megoldás

6.42. Írj fel rekurziót Karacuba algoritmusának lépésszámára és határozd meg a teljes futásidőt. (Emlékeztető: Karacuba algoritmus két sokjegyű szám összeszorozását az alábbi trükk rekurzív alkalmazásával végezte el: $(10^n u_1 + u_0)(10^n v_1 + v_0) = (10^{2n} + 10^n)u_1 v_1 - 10^n(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + (10^n + 1)u_0 v_0$

megoldás

6.43. Mit csinál az alábbi rekurzív algoritmus? Mennyi a futásideje?

$$f(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{ha } a = 0 \\ 2f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}), & \text{ha párosak} \\ f(\frac{a}{2}, b), & \text{ha csak } a \text{ páros} \\ f(a, \frac{b}{2}), & \text{ha csak } b \text{ páros} \\ f(\frac{a-b}{2}, b), & \text{ha mindkettő páratlan és } a \geq b \\ f(b, a), & \text{ha mindkettő páratlan és } a < b \end{cases}$$

megoldás

6.44. Hány lépés összeszorozni két $n \times n$ -es mátrixot Strassen algoritmusával? Algoritmus: $\mathbf{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$, $\mathbf{M}_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}$, $\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$, $\mathbf{M}_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$, $\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$, $\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$, $\mathbf{M}_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$ és $\mathbf{C}_{1,1} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7$, $\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5$, $\mathbf{C}_{2,1} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4$, $\mathbf{C}_{2,2} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6$.

megoldás

6.45. Mutasd meg, hogy három valós szorzás elég két komplex szám $(a + bi$ és $c + di$ alakban) szorzatának meghatározásához.

megoldás

6.4. Diszkrét Fourier-transzformáció

Diszkrét Fourier-transzformáció: Össze akarjuk szorozni az $A(x) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i x^i$ és $B(x) = \sum_{i=0}^{K-1} b_i x^i$ polinomokat $R_n = \text{mod}(2^n + 1)$ gyűrű feletti $\text{mod}(x^K + 1)$ polinomgyűrűben, ahol K egy 2 hatvány, ami osztja n -et. Ehhez veszünk egy K -adik primitív egységgyököt R_n -ben, ezt jelöljük ω -val és a gyökét θ -val (erre csak az előjel miatt lesz szükségünk, aki először látja a képletet, inkább hagyja figyelmen kívül és majd a végén megérti miért kell). Ezután $a'_i = \theta^i a_i$ és $\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{K-1} \omega^{ij} a'_j$ lesz az A Fourier-transzformáltja, hasonlóan definiáljuk $\hat{b}_i$ -t is. És $\hat{c}_i = \hat{a}_i \hat{b}_i$. Most már csak vissza akarjuk ezt transzformálni: $c'_i = \sum_{j=0}^{K-1} \omega^{-ij} \hat{c}_j$ és $\bar{c}_i = c'_i \theta^{-i} / K$ lesznek a szorzatpolinom, $C(x)$ együtthatói.

6.46. Mutasd meg, hogy nullosztómentes gyűrűben, ha $x^k = 1$ és $x \neq 1$, akkor $\sum_{i=0}^{k-1} x^i = 0$! Milyen kikötésre van még szükségünk, ha azt akarjuk, hogy *mod* m gyűrűben is igaz legyen a formula?

megoldás

6.47. Ha kettes számrendszerben dolgozunk, akkor melyik számot érdemes ω -nak és θ -nak választanunk?

megoldás

6.48. Mutassuk meg, hogy a fenti, polinomok szorzatának kiszámítására szolgáló módszer tényleg jó.

megoldás

6.49. Hogy jobban megértsük és gyakoroljuk, próbáljuk meg a FENTI MÓD-SZERREL kiszámolni $n = 8$, $K = 4$ paraméterek mellett az $x^2 + 1$ polinom négyzetét. (Akinék ez túl könnyű, számolhat valami bonyolultabbat is...)

megoldás

6.5. Stabil párosítások

Minden feladatban tegyük fel, hogy ugyanannyi fiú van, mint lány, és a preferencialisták teljesek (hacsak a feladat mást nem mond).

6.50. Lehetséges-e, hogy egy stabil párosításban mindenki a számára második legjobb párt kapja?

megoldás

6.51. Létezik-e stabil párosítás, ha a preferenciasorrendben a döntetlent is megengedjük, viszont instabilitás csak akkor keletkezik, ha egy fiú és egy lány *szigorúan* jobban szereti egymást, mint a partnerét?

megoldás

6.52. Mutasd meg, hogy a fiúoptimális stabil párosításban nem lehet, hogy két fiú is a legrosszabb párt kapja!

megoldás

6.53. Mutasd meg, hogy egy nem feltétlenül teljes páros gráfban minden stabil párosításban ugyanazoknak a csúcsoknak van párja!

megoldás

6.54. Egy fiú és egy lány utolsók egymás listáján, mégis van olyan stabil párosítás, ahol összetartoznak. Létezik olyan stabil párosítás is, ahol nem?

megoldás

6.55. Írjuk a fiúk preferencia-sorrendjét egy $n \times n$ -es táblázatba úgy, hogy az i -edik oszlopba írjuk az i -edik legkedvesebb lány sorszámát. Tegyük fel, hogy minden oszlopban előfordul az összes lány (sorszáma). Ilyenkor az egyes oszlopok egy-egy párosítást határoznak meg. Milyen feltételnek kell teljesülnie a lányok preferenciáira, hogy ezek a párosítások mind stabilak legyenek?

megoldás

6.56. Jelöljük $f(n)$ -nel a stabil párosítások maximális számát n fiú és n lány esetén (tehát egy olyan preferenciasorrendre nézve, ami maximalizálja a lehetséges stabil párosítások számát). Adj minél jobb becsléseket $f(n)$ -re!

megoldás

6.6. Elemi Gráfalgoritmusok

Minden feladatot minél gyorsabb algoritmussal oldjunk meg! (Az optimális többnyire élszámban lineáris.)

6.57. Adva van egy pointer egy láncolt lista első elemére. Sajnos a láncolt lista utolsó eleméről a pointer visszamutat a lista egyik korábbi elemére, így nem tudjuk egyszerű végigjárással megállapítani, hogy melyik elem az utolsó. Hogyan tudjuk konstans tárral megkeresni a lista utolsó elemét?

megoldás

6.58. Szerepeljen a G összefüggő multigráfban minden él páros sokszor. Keressünk benne Euler-sétát!

megoldás

6.59. Döntsük el, hogy G 2-összefüggő-e!

megoldás

6.60. Egy D irányított gráf csúcsainak egy felsorolása *topologikus sorrend*, ha nincs későbbi csúcsból korábbiba mutató él. Határozzuk meg D csúcsainak egy topologikus sorrendjét, vagy állapítsuk meg, hogy tartalmaz irányított kört.

megoldás

6.61. Irányítsuk meg a 2-élösszefüggő G gráf éleit úgy, hogy erősen összefüggő digráfot kapjunk!

megoldás

6.62. Bontsuk fel D -t az erősen összefüggő komponenseire!

megoldás

6.63. Döntsük el, hogy van-e D -ben bármely két pont között legalább az egyik irányban irányított út!

megoldás

6.64. Bontsuk a G irányítatlan gráfot összefüggő komponenseire!

megoldás

6.65. Határozzuk meg, hogy G 2-színezhető-e. Ha igen, adjuk is meg egy 2-színezését, ha nem, adjunk egy páratlan kört!

megoldás

6.66. Adj példát arra, hogy Dijkstra algoritmusa nem működik negatív súlyok esetén!

megoldás

6.67. Mutasd meg, hogy a Dijkstra-algoritmus futásideje lecsökkenthető $O(m+nk)$ -ra (ahol m az élszám), ha az élsúlyok csak az $1, 2, \dots, k$ értékek közül kerülhetnek ki!

megoldás

6.68. Az s és t közötti legrövidebb utat szeretnénk megtalálni egy irányítatlan gráfban úgy, hogy egyszerre futtatunk Dijkstrát s -ből és t -ből. Mikor álljunk le? Miért lehet hasznos ez? Mi a helyzet irányított gráfokra?

megoldás

6.69. Adj gyors algoritmust egy olyan feszítőfa megkeresésére, amelyben a legnagyobb élsúly a lehető legkisebb!

megoldás

6.70. Egy gráfhoz, amiben már kiszámoltuk a minimális feszítőfát, hozzáadunk egy új csúcsot és d rá illeszkedő élt, ahol d egy kis konstans. Hogyan frissíthetjük a minimális feszítőfát?

megoldás

6.71. Minimális feszítőfát adnak-e az alábbi algoritmusok?

- (a) Súlyok szerinti csökkenő sorrendben töröljük azokat az éleket, amiket elhagyva a gráf összefüggő marad.
- (b) Súlyok szerinti növekvő sorrendben vizsgáljuk az éleket és hozzávesszük az erdőhöz azokat, amik nem zárnak kört.
- (c) Tetszőleges sorrendben hozzávesszük az erdőhöz a gráf éleit, és amikor kört zárunk be, elhagyjuk a körből az egyik maximális súlyú élt.

megoldás

6.72. Mit számít ki vajon a következő program? Hogyan kell inicializálni?

```
FOR k=1..n
  FOR i=1..n
    FOR j=i..n
      IF  $M(i,k)+M(k,j) < M(i,j)$  THEN
         $M(i,j):=M(i,k)+M(k,j)$  and  $P(i,j):=P(k,j)$ 
```

megoldás

6.7. Dinamikus programozás

6.73. Tegyük fel, hogy egy fa minden csúcsán adott egy (akár negatív) súly. Hogyan keressünk maximális súlyú független csúcshalmazt?

megoldás

6.74. Egy egészekből álló sorozatban keressük meg azt az intervallumot (egymást követő számok egy sorozatát), amiknek az összege maximális.

megoldás

6.75. Egy sorozatot egy másik részsorozatának nevezünk, ha néhány tag elhagyásával adódik belőle. Határozzuk meg két véges sorozat leghosszabb közös részsorozatát.

megoldás

6.76. Adott egy mátrix, aminek minden eleme 0 vagy 1. Határozzuk meg a legnagyobb négyzetes összefüggő „blokkot”, ami csupa 1-esből áll.

megoldás

6.77. Legyen egy $m \times n$ -es és egy $n \times k$ -as mátrix összeszorzásának az időigénye $f(m, n, k)$. Adott r darab A_i mátrixunk, amiknek szeretnénk az $A_1 A_2 \dots A_r$ szorzatát kiszámítani. Hogyan határozhatjuk meg az egyes mátrixszorzások elvégzésének ideális sorrendjét?

megoldás

6.78. Egy konvex sokszög minden átlójának adott egy súlya. Keressük meg azt a háromszögelést, ahol a behúzott átlók összsúlya minimális!

megoldás

6.79. Keressük meg a Suurballe algoritmussal az alábbi gráfban a legrövidebb (legkisebb összhosszú) éldiszjunkt st útpárt: $c(sa) = c(ab) = c(bt) = 1$ és $c(sb) = c(at) = 3$. (Persze csak egy éldiszjunkt pár van, a lényeg, hogy az algoritmust gyakoroljuk.)

megoldás

6.80. Hogyan keressünk legrövidebb csúcdiszjunkt útpárokat irányított, él-súlyozott gráfban adott s -ből?

megoldás

6.81. Adjunk gyors algoritmust, mely s -ből az összes (t_1, t_2) párra kiszámítja a legrövidebb összegű éldiszjunkt útpárt!

megoldás

6.82. Adjunk lineáris futásidejű algoritmust, mely meghatározza, hogy s -ből mely csúcsokba megy két éldiszjunkt út, ha a gráf

- (a) irányítatlan,
- (b) aciklikus!

megoldás

6.8. Folyamok

6.83. Igaz vagy hamis?

- (a) Egy maximális folyamban minden irányított körnek van olyan éle, ahol 0 a folyamérték.
- (b) Minden hálózathoz van olyan maximális folyam, ahol bármely irányított kör egy élén 0 a folyamérték.
- (c) Ha minden kapacitás különböző, akkor a maximális folyam egyértelmű.
- (d) Ha az összes kapacitást megszorozzuk egy $\lambda > 0$ konstanssal, a minimális vágás ugyanaz marad.
- (e) Ha az összes kapacitáshoz hozzáadunk egy $\lambda > 0$ konstanst, a minimális vágás ugyanaz marad.
- (f) Ha az összes kapacitáshoz hozzáadunk egy $\lambda > 0$ konstanst, a maximális folyam λ többszörösével nő.
- (g) Ha a hálózat nem tartalmaz irányított kört, akkor a segédgráf sem tartalmazhat.

megoldás

6.84. A $K_{2,3}$ gráfon tekintsük azt a többtermékes folyamproblémát, hogy a kétcsúcsú osztályú rész egyik csúcsából a másikba, a háromcsúcsú osztály mindhárom csúcsából pedig az osztály egy másik csúcsába kell egy terméket vinnünk. Mutassuk meg, hogy ez a feladat kielégíti a vágásfeltételt, de mégsem megoldható!

megoldás

6.85. Egy hálózat élein átfolyó mennyiséget most nem csak felülről, hanem alulról is korlátozzuk. Határozzuk meg, hogy létezik-e olyan folyam (amit ilyenkor áramnak szoktak hívni), ami kielégíti a feltételeket!

megoldás

6.86. Gondoljuk át Hu és Rothschild–Whinston tételét, azaz azt, hogy létezik kéttermékes folyam $(s_1t_1$ és $s_2t_2)$, ha teljesül a vágásfeltétel. Sőt, ha teljesül az Euler-feltétel (bármely csúcsra illeszkedő élek kapacitásának összege páros, kivéve a források és nyelők, ahol még a vinni kívánt termék mennyiségét is hozzáadjuk), akkor van egész megoldás is. (Emlékeztető: irányítatlan alapgráf esetén, ha egy él kapacitása c , akkor összesen mindkét irányban csak c -t lehet vinni, tehát nem lehet pl. mindkét irányban c -t!)

megoldás

6.87. Tegyük fel, hogy egy irányított gráfban adott egy s forrás, amiből k különböző terméket kell elvinnünk k különböző nyelőbe, $t_1, \dots, t_k$ -ba úgy, hogy minden élen adott egy kapacitás. Ha az i -edik termék ára p_i , akkor hogyan találjuk meg a legtöbb hasznot hozó folyamatot? (Azaz maximalizálni akarjuk $\sum d(st_i)p_i$ -t.) Igaz-e, hogy ha a kapacitások egészek, akkor van egészértékű megoldás?

megoldás

6.88. Tegyük fel, hogy egyetlen információforrásból két nyelő bármelyikébe vezet két éldiszjunkt út egy aciklikus digráfban és két $\mathbb{F}_p$ -beli jelet szeretnénk küldeni. Minden uv élen az u -ba bejövő üzenetek egy (előre fixált) véletlen kombinációját küldjük tovább. Van-e olyan konstans p , hogy nagy valószínűséggel mindkét nyelő vissza tudja kódolni mindkét jelet?

megoldás

6.89. Adott egy aciklikus digráfban egy információforrás. Hogyan határozhatjuk meg lineáris időben, hogy melyek azok a csúcsok, amikbe két $\mathbb{F}_p$ -beli jelet tudunk küldeni, ha p elég nagy? (Mindbe egyszerre akarjuk eljuttatni a jeleket.)

megoldás

6.9. Approximáció

6.90. A ládapakolás (Bin packing) feladatban adva van n db csomagméret, $a_1, \dots, a_n \leq 1$. A kérdés, hogy hány 1 méretű ládába tudjuk bepakolni a csomagokat.

(a) Mutasd meg, hogy ha konstans számú láda elég és na_i egész, akkor ez **P**-beli!

(b) Milyen approximációt ad a Next Fit mohó algoritmus, ami mindig megpróbálja berakni az aktuális ládába a csomagot, ha nem fér be, akkor pedig egy új (eddig üres) ládába rakja?

(c) Mutasd meg, hogy **NP**-nehéz eldönteni, hogy elég-e két láda!

megoldás

6.91. Egy G gráfra legyen $\tau(G) = \min\{|S| : S \subset V(G), \forall e \in E(G) \exists s \in S, s \in e\}$. Ez G csúcsfedési száma.

(a) Mutasd meg, hogy $\tau(G)$ meghatározása **NP**-nehéz!

(b) Adj 2-approximációs algoritmust!

megoldás

6.92. A TSP (utazó ügynök probléma) bemenete egy teljes, élsúlyozott gráf, kimenete pedig a legrövidebb Hamilton-kör hossza.

(a) Mutassuk meg, hogy metrikus gráfra (azaz olyan gráfra, ahol az élsúlyokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség) van 2-approximáció!

(b) Általános gráfra viszont „semmilyen” $g(n)$ -re nincs $g(n)$ -approximáció!

megoldás

6.10. Kódolás

6.93. A $\Sigma = \{E, M, S\}$ abc felett minek a Lempel–Ziv–Welch-kódolása az

1 2 4 1 3 7 6 2 8 5 8 12 6 15 17 18 16 1

kód? (E, M, S kódjai rendre 1, 2, 3.)

megoldás

6.94. Hány elemű ábécé esetén kódolja a leghosszabb szöveget az 1, 5, 6, 7, ..., 100 Lempel–Ziv–Welch-kód?

megoldás

6.95. Egy n elemű ábécé Lempel–Ziv–Welch-kódolása esetén legfeljebb hány-szor fordulhat elő egy adott szám? (Az elméleti modellben, ahol a kódok a természetes számok.)

megoldás

6.96. Van-e olyan n , amire n elemű ábécére az $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 2n, 2n$ valaminek a kódja?

megoldás

7. fejezet

Gráfelmélet – megoldások

7.1. Összefüggőség, feszítőfák

1.1. Legyen F_1 és F_2 a két feszítőfa. Elérhető, hogy minden lépésben eggyel nőjön az aktuális feszítőfában az F_2 -vel közös élek száma: vegyünk egy új F_2 -beli élet az aktuális feszítőfánkhoz, ez bezár egy kört. Ebből a körből el tudunk hagyni egy nem F_2 -beli élet, és így kapjuk a következő feszítőfát.

1.2. Vegyük a G gráf egyik mélységi keresőfáját, és rendeljük hozzá a fa éleihez a $+$ és $-$ jeleket úgy, hogy a szomszédos élek különböző jelet kapjanak. A gráf nem fabeli élei mélységi keresőfában csak olyan (v, w) csúcspárok közt mehetnek, melyekre teljesül, hogy a fa r gyökere valamint a egyes csúcsok által meghatározott két mélységi fabeli $r - v$ és $r - w$ út egyike a másikat tartalmazza. (Erre mondjuk azt, hogy nincs keresztél.) Emiatt a feszítőfa alternáló tulajdonsága fennáll.

1.3. Tekintsünk a konvex sokszögnek egy tetszőleges háromszögelését, majd rendeljünk minden háromszöghöz egy csúcsot, és a szomszédos háromszögeknek megfelelő csúcsokat kössük össze éllel. Így egy összefüggő gráfot kapunk, amiben nincsen kör, tehát a kapott gráf egy fa. Az 1-fokú csúcsok olyan háromszöghöz tartoznak, amellyel csak egy másik háromszög volt szomszédos, tehát legalább két oldala az eredeti sokszögből származik.

1.4. Rendeljünk hozzá a számokhoz csúcsokat, és kössük össze kettőt, ha a megfelelő páronkénti összeg racionális. Az $n \geq 5$ miatt $\frac{n^2-3n+4}{2} > \frac{n^2}{4}$, ezért a gráf nem lehet páros, azaz van benne páratlan kör. A páratlan kör mentén tekintve a racionális páronkénti összegeket adódik, hogy a körhöz tartozó

csúcsokhoz racionális számok tartoznak. Másrészt vegyük észre, hogy a gráf összefüggő, hiszen legfeljebb $n - 2$ él hiányzik a lehetséges $\binom{n}{2}$ közül, míg egy nem összefüggő gráfban a hiányzó élek száma legalább $n - 1$ lenne. (K_n egy vágásában $k(n - k)$ él van, ha k és $(n - k)$ csúcs esik a vágás két oldalára.) Emiatt szomszédos gráfbeli élek sorozatán egy megtalált racionális számból az összeshez eljuthatunk. Ebből adódik, hogy minden szám, azaz minden páronkénti összeg is racionális, kihasználva hogy a és $a + b$ racionális voltából b -re is következik ez.

1.5. Rögzítsük G egy 3-színezését, és jelölje n_1, n_2, n_3 a három színosztály méretét. Ekkor $n = n_1 + n_2 + n_3$ teljesül. Tekintsük tetszőleges két csúcsosztály egyesítését, és vizsgáljuk az általuk feszített éleket. Ezeknek összefüggő gráfot kell feszíteniük, ellenkező esetben lenne legalább két komponens, és a komponensek egyikében a két szereplő szín megcserélésével ismételten jó színezést kapnánk, így G 3-színezése nem lenne egyértelmű a feladat értelmében. Élek csak különböző színű csúcsok között mennek, így G éleit megszámlálhatjuk oly módon, hogy összegezzük a három lehetséges részgráf élszámát, melyeket két-két színosztály feszít. Az egyes gráfokban legalább annyi él van, mint az azonos csúcsszámú fák élszáma, innen adódik az élszámra vonatkozó $|E| \geq (n_1 + n_2 - 1) + (n_2 + n_3 - 1) + (n_3 + n_1 - 1) = 2n - 3$ becslés. Megjegyzés: könnyen igazolható, hogy a becslés éles, és az is hasonló módon, hogy az n csúcsú egyértelműen k -színezhető gráfok élszáma legalább $(k - 1)(n - k) + \binom{k}{2}$.

7.2. Fák

1.6. f -ről feltehetjük, hogy $f \leq k - 1$. Az állítást csúcsszámmra vonatkozó indukcióval igazoljuk. $n = 1$ csúcsú fára az állítás triviális. Általános esetben vegyük a fa egy levelét. Ha $\frac{f}{2} + 1$ részfa tartalmazná, kész lennénk. Ellenkező esetben hagyjuk el azokat a részfákat, amik csak ebből az egy csúcsból álltak, legyen ezek száma $z \leq \frac{f}{2}$. A maradék egy $n - 1$ csúcsú fának részfaiból áll, melyek száma $k - z$, és melyek közül legalább $\frac{kf}{2} - z\frac{f}{2}$ pár metszi egymást, hiszen csak az egycsúcsú részfák és őket tartalmazó részfák alkotta párokat veszítjük el. Emiatt $n - 1$ csúcsú fán a $k - z$ részfából álló rendszerre a feladat feltétele teljesül, ezen belül megtaláljuk tehát a keresett csúcsot.

1.7. Elég azt belátni tudni, hogy egy jól megválasztott v csúcs elhagyásával létrejön olyan komponens, amibe pont r multihalmazbeli csúcs esik, vagy amihez v -t hozzávéve a multihalmazbeli csúcsok száma már eléri az r számot. Ez a csúcs a fa szomszédos csúcsain lépkedve úgy található meg, ha egy

levélből indulva mindig arrafelé a csúcs felé lépünk el ha szükséges, ami a R legtöbb elemét tartalmazza.

7.3. Körkeresés

1.8. 1. megoldás. Induljunk ki G egy szélességi kereső feszítőfájából, és szintezzük be a csúcsokat a szélességi feszítőfa gyökerétől vett távolság szerint. A nem faélek nem ugorhatnak át szintet a szélességi keresés jellegéből adódóan, másrészt egymás alatti szintek között sem haladhat ilyen él, mert páros kört zárna be. Végül vegyük észre, hogy adott szinten belülről sem indulhat ki egy csúcsból két nem faél, mert e két él a fában páros hosszú kört zárna be. Emiatt a nem faélekre vonatkozó foksámösszeg legfeljebb $(n - 1)$, amiből az állítás következik.

2. megoldás. Belátható, hogy minden él csak egy (páratlan) körhöz tartozhat legfeljebb. Egy kör legalább 3 élből áll, emiatt a körök száma maximum az élek számának harmada. Dobjunk el most minden körből egy-egy élet, így az élszám legalább $\frac{2}{3}$ -a megmarad, és így egy erdőt kapunk, amiből $\frac{2}{3}|E| \leq (n - 1)$ következik.

1.9. Csúcsszám szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, $n = 4$ -re az állítás nyilvánvaló. Általános esetben vegyük a gráf egyik leghosszabb útját, és jelölje ennek végpontját P . P -ből csak az út pontjaiba vezethetnek élek. Ha P foka legalább 3, P legtávolabbi szomszédjával olyan kört zár be az úttal, aminek van egy P végpontú húrja. Ha P foka legfeljebb 2 lenne, hagyjuk el a gráfból, és az így kapott gráfra alkalmazzunk indukciót. Ennek $n - 1$ csúcsa és legalább $2(n - 1) - 3$ éle van.

Az élességet a $K_{n-2,2}$ bizonyítja.

1.10. Világos, hogy mivel van n különböző színű él a gráfban, ezért van olyan kör, amelynek élei különböző színűek. Valóban, hiszen ha $1 - 1$ élet választunk minden színosztályból, több élünk lesz mint egy n -csúcsú körmentes gráfnak lehet. Tekintsük a legrövidebb kört, amelyben az élek színei különbözőek. Ha ez nem C_3 lenne, a kör tetszőleges két szomszédos uv , uw éléhez az őket összekötő vw élet véve nem kaphatunk háromszínű C_3 -at, így a két élet a körből elhagyva és vw élet hozzávéve nyernénk a minimálisnál kisebb kört – ellentmondás.

1.11. Feltehetjük, hogy a G páros gráfunk összefüggő. Tekintsünk benne egy szélességi kereső feszítőfát, amelynek gyökere egy minimális δ foksámú v csúcs! Tekintsük a feszítőfában a v -től rendre $1, 2, \dots, k$ távolságra lévő

pontok halmazát. Vegyük észre, hogy a szélességi kereső feszítőfa ezen csúcsai között nem haladhatnak élek, hiszen azok $2k + 1$ -nél kisebb kört, vagy páratlan kört zárnának be. Ez azt is jelenti, hogy v minimális fokszáma miatt a v -től i távolságra levő csúcsok l_i száma legalább $(\delta - 1)l_{i-1}$, ahonnan $l_1 = \delta$ felhasználásával az adódik, hogy összesen több mint $(\delta - 1)^k$ különböző csúcsot találtunk G -ben, vagyis $\delta < n^{1/k} + 1$. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő élekkel, és ismételjük meg az eljárást. Így a csúcsokat sorban elhagyva, minden lépésben kevesebb mint $n^{1/k} + 1$ élet hagyunk el, azaz G -ben az élek száma legfeljebb $n^{1+1/k} + n$.

Megjegyzés: Minden m élű gráfnak létezik olyan páros részgráfja, aminek legalább $m/2$ éle van. (Lásd az 5.2 feladatot.) Emiatt ha egy gráfban nincsenek $C_4, C_6, \dots, C_{2k}$ hosszú körök, akkor a gráf éleinek száma legfeljebb $2n^{1+1/k} + 2n$.

7.4. Vegyes feladatok

1.12. Induljunk ki a leghosszabb körből, melynek bármely élét elhagyva egy leghosszabb utat kapunk. Azaz új csúcshoz nem vezethet belőle él, de az összefüggőség miatt ekkor a kör minden csúcsot tartalmaz.

1.13. (a) Indirekten tegyük fel, hogy létezik jó 3-színezése az éleknek. Vegyük a Petersen-gráf szokásos lerajzolását, melyben egy 5 csúcsú körön belülré rajzolunk egy csillagötszöget, és a két ötszög csúcsait élekkel összepárosítjuk. A külső ötszög jó színezését csak úgy kaphatjuk, hogy két színnel felváltva színezzük az ötszög 4 egymást követő élét, majd az ötödik él színe a kimaradó harmadik szín lesz. Innentől a külső ötszöget és a belső csillagötszöget összekötő élek színe meg van határozva. Könnyen látható, hogy a belső ötszög éleire az így kapott színezés nem kiterjeszhető. .

(b) Ha volna benne Hamilton-kör, akkor létezne az éleinek jó 3-színezése is. Ugyanis a Hamilton-kör éleit felváltva színezve, majd a kimaradó éleket a harmadik színosztályba téve jó színezést kapnánk. Ez azonban (a)-nak ellentmond.

1.14. Tekintsünk egy Euler-sétát a gráfban, és színezzük felváltva két színnel az éleit. A két színosztályba tartozó élek egy megoldást adnak.

1.15. $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ esetek kizárása szükséges és elégséges feltételt jelent. Ha a G gráf és komplementere izomorfak, akkor egyező élszámúak is, emiatt élhalmazuk uniója páros számú élből kell hogy álljon, márpedig $2 \mid \binom{n}{2} \iff n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Most indukcióval igazoljuk, hogy ilyenkor létezik is a keresett gráf. $n = 1$ -re az 1-csúcsú gráf, $n = 4$ -re a 4 csúcsú

út megfelelő. Tegyük fel, hogy találtunk jó n -csúcsú G gráfot, ekkor konstruálunk olyan $n + 4$ csúcsú, ami szintén megfelel a feltételnek. Vegyünk fel G mellett 4 további csúcsot, legyenek ezek v_1, v_2, v'_1, v'_2 . Vezessen el G minden csúcsa és a v_2, v'_2 csúcsok között, valamint a négy új csúcs feszítse a $(v_1, v'_1), (v'_2, v_2), (v_2, v'_1)$ éleket. (Ez éppen egy 4 csúcsú út!) Könnyű látni, hogy az új gráf komplementere izomorf lesz az új gráffal.

1.16. 1. megoldás. k szerinti indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ -re az állítás semmitmondó. Legyen $k > 1$, és H_0 a G p csúcsú részgráfjai közül olyan, amelynek élszáma maximális. Ha $\delta(H_0) \geq q$, kész vagyunk. Ha nem, akkor $V(G) \setminus V(H_0)$ minden csúcsából G -be legfeljebb q él vezethet, különben lenne olyan csúcs, amivel a H_0 -ban minimális fokút kicserélhetnénk, és az élszám nőne. Emiatt $V(G) \setminus V(H_0)$ által feszített gráfban a minimális fokszám legalább $(k-1)q$, azaz az indukció alkalmazható erre a $(k-1)p$ csúcsú gráfra.

2. megoldás. Bontsuk szét k egyenlő csúcsszámú kupacra a gráfot. Ha egy kupac nem jó, azaz a minimális fokszáma kicsi, q alatti, akkor a kupacban a minimális fokú csúcshoz találunk valamelyik másik kupacból olyan csúcsot, amivel cserélve kupacunkban nőne a fokszámösszeg. Ha egyik kupac sem jó, akkor így találunk néhány kupacot, amikből ciklikusan tudunk cserélni egy-egy csúcsot úgy, hogy mindben növekedjék a fokszámösszeg. (Valóban: irányított kék élet vezetve egy kupacból abba a kupacba, ahonnan tudnánk jobb csúcsot becserélni a minimális fokú csúcs helyére, lenne irányított körünk a kupacok között kék élekből, mert minden kék kifok legalább 1.) Ám ezt a javítást csak véges sokszor végezhetnénk el, mivel pozitív egészszel nőtt közben a fokszámösszeg, és nem nőhet az összfokszám fölé. Emiatt előbb-utóbb lesz 0 kék kifokú csúcs, ami a feltételnek megfelelő p -elemű csúcshalmazt jelent, melyben a minimális fokszám elegendően nagy.

7.5. Többszörös összefüggőség, Menger-tétel

1.17. (a) Elegendő belátni, hogy minden pontpár közt ugyanannyi élidegen és csúcsidegen út vezet. Világos, hogy minden csúcsidegen út élidegen, ugyanakkor a 3-regularitás miatt nem lehet két élidegen útnak közös csúcsa a kezdő és végponton kívül.

(b) Vegyünk két 2-élösszefüggő gráfot, amelyeknek egy 2-fokú csúcsa van, a többi fokszám 4, majd azonosítsuk a 2-fokszámú csúcsokat. A kapott gráf 4-reguláris, 2-élösszefüggő de nem 2-összefüggő.

1.18. A k -szoros összefüggőség definícióját alkalmazhatjuk. Ha elhagyunk $k-1$ csúcsot a gráfból, akár benne van az új csúcs, akár nincs, a megmaradó gráf összefüggő lesz.

1.19. (a) Rendeljünk minden irányított élhez egységkapacitást. A maximális folyamról feltehető, hogy egészértékű, és így éldisjunkt utakat ad, a minimális vágás pedig egy szétvágó élhalmaz lesz.

(b) A G irányított gráfból állítsuk elő a G' irányított gráfot oly módon, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsot „széthúzzunk”: egy v' , v'' csúcspárral helyettesítsük, melyek között irányított $v'v''$ él vezet, előbbi csúcsba vezetnek a G -ben v -be vezető élek, utóbbiból indulnak a v -ből induló élek. G' -re alkalmazzuk az irányított él-Menger-tételt.

(c) Legyen $G(A, B, E)$ a páros gráfunk, irányítsuk meg az éleit A -ból B felé. Vezessen továbbá egy s új pontból él minden A -beli csúcsba, és minden B -beli csúcsból egy-egy él egy új t pontba. Az így kapott irányított gráfban a csúcsidegen utak párosításélekeknek feleltethetőek meg, az elvágó csúcshalmaz pedig lefoglaló pontthalmaznak a páros gráfban.

(d), (e) Az irányítatlan gráf élei helyett vegyünk fel egy-egy ellentétesen irányított élpárt.

1.20. Iteráljuk a következő eljárást: keressünk a -ból b -be utat úgy, hogy a -ból indulunk, és minden lépésben továbblépünk az aktuális csúcsból egy új csúcsba, amíg b -be nem érünk. A fokszámfeltételek miatt mindig tovább tudunk lépni. A bejárt élek egy (a, b) sétát adnak, amiből az irányított köröket elhagyva kapjuk a keresett utat.

Az út éleit elhagyva a fennmaradó gráfban a feladat feltételei k helyett $(k-1)$ -gyel teljesülnek, így az eljárás ismételhető k -szor.

1.21. Hagyjuk el a G gráfból a k élfüggetlen (b, a) utat, majd alkalmazzuk a 1.20 feladat állítását.

1.22. Készítsük el a G' gráfot G -ből oly módon, hogy minden élet megduplázunk. G' -ben minden vágásban 2-szer annyi él van, mint a megfelelő G -beli vágásban, ezért a Menger-tétel szerint a G' -beli élfüggetlen utak száma adott csúcspár közt a duplája a G -beli értéknek, ami a feladat állításával ekvivalens.

1.23. Vegyünk egy z_1 és egy z_2 csúcsot, kössük őket össze rendre az x_i és az y_i csúcsokkal. Az így kapott gráf továbbra is k -összefüggő. Innen adódik, hogy z_1 és z_2 között található k csúcsdisjunkt út, melyek párosítják az x -eket az y -okkal.

1.24. A $k = 1$ eset triviális, legyen tehát $k > 1$. Általánosan feltehető, hogy megtaláltunk egy $y_1, y_2, \dots, y_t$ -n áthaladó $x - z$ utat, és szeretnénk kibővíteni úgy, hogy y_{t+1} -et is tartalmazza, ahol $t \leq k-2$. Feltehetjük, hogy az y_i csúcsokon az indexeik szerinti sorrendben halad az út. Tekintsük a G' gráfot, amelyet egy új w csúcs hozzáadásával kapunk G -ből: w -t kössük

össze a fenti $x - -z$ út minden csúcsával. Vegyünk G' -ben maximálisan sok csúcsidegen utat w és y_{k-1} közt. Ezek száma legalább k , mivel G' is k -szorosan csúcsösszefüggő. (1.18.) feladat.) Ekkor lesz az $x - -z$ úton egy olyan csúcspár $(x, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{k-2}, z)$ közül, hogy közékük illeszthető egy y_{k-1} -et tartalmazó, a csúcsidegen utak két szakaszából álló út.

1.25. k szerinti indukciót használunk. A $k = 2$ eset Menger tételéből következik. Általánosan feltehető, hogy megtaláltunk egy $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ tetszőleges pont- $(k-1)$ -est tartalmazó kört, és szeretnénk a kört kibővíteni úgy, hogy v_k -t is tartalmazza. Tekintsük a G' gráfot, amelyet egy új z csúcs hozzáadásával kapunk G -ből, melyet a körünk minden csúcsával összekötünk. Vegyünk G' -ben maximálisan sok csúcsidegen utat z és v_k közt. Ha ezek száma legalább k , akkor lesz a körön v_i és v_{i+1} úgy, hogy közékük illeszthető egy v_k -t tartalmazó, a csúcsidegen utak két szakaszából álló út. Ellenkező esetben, ha k -nál kevesebb csúcsdiszjunkt út volt köztük, akkor G k -szoros összefüggősége miatt a körünk pontosan a $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ pontokból áll. (Valóban, ha lenne további csúcs a körön, akkor a 1.18.) feladat szerint G' is k -szorosan összefüggő lenne.) Ekkor viszont tetszőleges szomszédos v_i és v_{i+1} párt összekötő él helyett választható egy v_k -n keresztülhaladó út.

7.6. Fülfelbontás

1.26. Kezdlépként induljunk ki egy tetszőleges x csúcsból, majd vegyünk egy rá illeszkedő G -beli kört. Az első fázis általános lépésében tekintsünk egy olyan y csúcsot, ami még nem csúcsa az aktuális G^* fülfelbontási gráfunknak, de vezet belőle él G^* -ba. Az erős összefüggőség miatt egyrészt ilyen y létezik ha van még kimaradó csúcs, másrészt G^* -ból vezet irányított út y -ba. Ezen útnak és élnek az uniója adja a fülfelbontás következő elemét.

A második fázisban, ha elfogytak a kimaradó csúcsok, már csak éleket kell behúznunk a gráfba. Ez a lépés a feltételeknek szintén eleget tesz.

1.27. Vegyünk először egy a, b csúcsokon áthaladó kört, ilyen a G 2-szeres összefüggősége miatt létezik. Elkészítünk egy fülfelbontást az előző feladat mintájára, majd a „fül”-ek éleit sorban jól megirányítjuk oly módon, hogy minden aktuális fülbeli él rajta legyen irányított (a, b) úton. Ez elegendő is, hiszen további fülek hozzávétele nem ronthatja el egy tetszőleges e élre vonatkozóan azt, hogy létezik rajta áthaladó (a, b) út.

Legyen a fülfelbontás alapköre a megoldás elején választott a, b csúcsokat tartalmazó kör, és irányítsuk meg az éleit úgy, hogy két irányított (a, b) utat határozzanak meg. Ekkor az eddigi élekre az állítás teljesül. Teljesül

továbbá az alábbi két tulajdonság, amit fenntartunk: (1) a gráfban nincs irányított kör, (2) minden csúcsba eljuthatunk a -ból, és minden csúcsból eljuthatunk b -be irányított úton. Tekintsünk most általános lépésben egy új hozzáadott fület, legyenek végpontjai x és y . A füleleket x -ből y felé, vagy éppen fordítva fogjuk megirányítani. A két lehetőség egyikével irányított körtől mentes marad a gráf, ellenkező esetben volna irányított út oda-vissza a két csúcs között, ami ellentmondás lenne. Eszerint irányítjuk az új fületet, mondjuk x -ből y felé. Világos, hogy így a második tulajdonság is teljesül. Tekintsük most egy-egy irányított (a, x) és (y, b) utat, ami feltételünk szerint létezik, és vegyük hozzá az új fületet. Ez éppen egy megfelelő utat ad az új fület minden élére. Valóban, gondot csak az okozna, ha volna ismétlődő pontja a sétának, de nem lehet, mert nincs irányított kör a gráfban.

1.28. Az 1.26 eljárását alkalmazhatjuk egy módosítással: az első fázis általános lépésében olyan utat keresünk G^* -ból y -ba, amely nem pont az y -ból G^* -ba vezető él végpontjából indul. Ilyen út a 2-összefüggőség miatt létezik, ezért sosem veszünk irányított kört a G^* gráfunkhoz.

1.29. Tekintsük a gráf egy fülfelbontását az 1.26 eljáráshoz hasonló módon, amikor az első fázisban irányított körök vagy legalább 3-csúcsú utak alkották a füleket. Színezzük mohón sorban a fülek csúcsait az eljárással párhuzamosan: világos, hogy 3-nál nincs több színre szükség. Vegyük észre, hogy a második fázisra nem kerülhet sor az eljárásban G kritikusan 2-élösszefüggősége miatt.

7.7. Párosítási feladatok páros gráfokban

1.30. Feleltessük meg a sakktábla képét egy $G(A, B, E)$ páros gráfnak: a sorok legyenek A csúcsai, az oszlopok B csúcsai, és két csúcs között fusson él, ha a sor és oszlop által meghatározott mezőn áll bástya. A G páros gráf 4-reguláris, ezért a König-féle élszínezési tétel szerint teljes párosítások diszjunkt uniójára bontható; ezek közül kettőt választva kaphatunk egy megfelelő bástyacsoportot. (A König-féle élszínezési tétel helyett hivatkozhatunk arra is, hogy a Hall-feltétel teljesül minden reguláris páros gráfban.)

1.31. Gráfokra átfogalmazva azt kell igazolnunk, hogy ha $K_{10,10}$ -ból egy 4-reguláris részgráfot elhagyunk, a megmaradt 6-reguláris páros gráf teljes párosítások diszjunkt uniójára bontható. Ez ismét König élszínezési tételének (vagy a Hall-feltétel ismételt ellenőrzésének) következménye.

1.32. Feleltessük meg az n elemű halmaz k és $k+1$ elemű részhalmazainak csúcsokat, és kössük össze kettőt, ha az egyik tartalmazza a másikat. Fel-

használva, hogy az A_i -knak megfelelő csúcsok mind $n - k$ fokúak, a B_j -knek megfelelő csúcsok fokszáma $k + 1$, az így kapott páros gráfban könnyen ellenőrizhető a Hall feltétel teljesülése a k elemű részhalmazokhoz rendelt csúcsok osztályára, azaz létezik az A_i -ket fedő párosítás.

1.33. Feleltessük meg az embereknek egy páros gráf A csúcsosztályát, a süteményeknek a B csúcsosztályt, összekötve két csúcsot, ha a megfelelő süteményt szimpatikusnak találja a megfelelő ember. Ezután duplikáljuk az A minden elemét – az új csúcsosztályt jelölje A' csúcsosztály – és a rá illeszkedő éleket is. Az így kapott gráfban könnyen ellenőrizhető a Hall-feltétel teljesülése $(A \cup A')$ -re, ami a feladat állításával ekvivalens.

1.34. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$, a független csúcsok maximális száma definíció szerint. Tudjuk Gallai tétele szerint, hogy $\alpha(G) = n - \tau(G)$, sőt egy minimális lefogó ponthalmaz komplementere éppen egy maximális független halmaz. König tétele szerint $\tau(G) = \nu(G)$, a lefogó pontok minimális száma a független élek maximális számával egyezik meg G -ben, hiszen páros a gráf. Márpedig $\chi(\overline{G}) = n - \nu(G)$, hiszen a páros gráf komplementerében minden színosztály legfeljebb kételemű lehet, egy-egy G -beli élnek megfelelően. Így

$$\chi(\overline{G}) = n - \nu(G) = n - \tau(G) = \alpha(G) = \omega(\overline{G}).$$

1.35. Feleltessünk meg a_i, b_j csúcsokat az A_i, B_j halmazoknak, és vezessünk élt kettő közt, ha metszőek. Igazolandó, hogy létezik közöttük teljes párosítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Hall-feltétel az a_i csúcsok osztályára teljesül, amiből az állítás következik.

1.36. A bal- és jobboldali mellékosztályok a csoport egy-egy partícióját adják. Alkalmazzuk az **1.35.** feladatot.

1.37. A feltétel szerint B -re illeszkedik minden él, emiatt B -ben az átlag-fokszám N -nél nagyobb. Tekintsünk egy $b \in B$ elemet, aminek maximális a fokszáma, és vegyük a szomszédhalmazát: ez megfelelő $A \cup C$ -beli halmazt ad.

1.38. Ha G -ben az A osztályra teljesül a Hall-feltétel, akkor teljesen bepárosítható B -re. A párosítás e_1 és e_2 egyikét biztosan nem használja, ezért a Hall-feltétel G' és G'' egyikére biztosan szintén teljesül.

1.39. Legyen $G(A, B, E)$ páros gráf, melyre $|A| = |B|$. Azt kell igazolnunk, hogy akkor és csak akkor létezik egy X Tutte-feltételt sértő halmaz (amire

$G \setminus X$ -ben a páratlan komponensek száma $|X|$ -nél nagyobb), ha létezik egy Hall-feltételt sértő Y halmaz is az egyik csúcsosztályban (amelyre $|N(Y)| < |Y|$). Egyik irány: ha Y sérti a Hall-feltételt, akkor $N(Y)$ sérti a Tutte-feltételt, hiszen elhagyásával $|Y|$ darab izolált pontja lesz legalább a gráfnak. Másik irány: tegyük fel, hogy $K \cup L$ sérti a Tutte-feltételt, ahol $K \subset A$ és $L \subset B$. Nevezzük A -, illetve B -többségűnek egy páratlan komponens, ha A -ban, illetve B -ben van több csúcsa. Legyen rendre t_A és t_B az A -, illetve B -többségű páratlan komponensek száma $G \setminus \{K \cup L\}$ -ben.

Ha $|K| < t_B$, akkor a B -többségű páratlan komponensek B -be eső része (jelölje ezt Y_B) sérti a Hall-feltételt, hiszen csak K -val lehet minden Y_B -beli csúcs összekötve saját komponensének csúcsain kívül.

Hasonlóképpen, ha $|L| < t_A$, akkor az A -többségű páratlan komponensek A -ba eső része (jelölje ezt Y_A) sérti a Hall-feltételt.

Mivel $K \cup L$ sértette a Tutte-feltételt, $|K| + |L| < t_A + t_B$, így az előző kettő eset egyike biztosan fennáll.

1.40. Vegyünk fel V_2 osztályba d csúcsot, összekötve őket minden V_1 -beli csúccsal. A kapott gráfra alkalmazzuk a Hall tételt.

1.41. 1. megoldás. Alkalmazzuk $d = n - 11$ értékkel a 1.40 feladatbeli deficités Hall-tételt. Csak olyan $X \subseteq A$ -ra kell ellenőrizni a feltételt, amelyre $|X| \geq n - 10$, ezekre pedig fennáll, mert X -re legalább $10n + 1 - n(n - |X|)$ él illeszkedik, hiszen legfeljebb $n(n - |X|)$ illeszkedik $A \setminus X$ -re. $10n + 1 - n(n - |X|) = 1 + n(|X| + 10 - n)$, emiatt X szomszédhalmazában legalább $|X| - (n - 11)$ csúcs van valóban.

2. megoldás Vegyük észre, hogy a gráfunkban a lefogó csúcsok száma legalább 11, mivel minden csúcs legfeljebb n élet foghat le. König tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$ páros gráfokra, így $\nu(G) \geq 11$.

1.42. Ha lenne egy A -osztálybeli X Hall-feltételt sértő halmaz, akkor $|X| > r$ -nek teljesülnie kell. $B \setminus N(X)$ csúcsai ekkor csak $A \setminus X$ csúcsaival lehetnének összekötve, így fokszámuk nem lehetne legalább r .

1.43. Legyen a gráf $G(A, B, E)$, és tegyük fel, hogy $|A| \leq |B|$. A fokszámokat az egyes osztályokban összeadva kapjuk, hogy $3|B| \leq |E| \leq 4|A|$, amiből $\frac{3}{7}n \leq |A|$ adódik. Alkalmazva a deficités Hall-tételt (1.40 feladat), azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq \frac{3}{7}n + |X| - |A|$. $A \setminus X$ -re legfeljebb $4|A \setminus X|$ él illeszkedhet, így legfeljebb $\frac{4}{3}|A \setminus X|$ B -beli csúcs van, akinek nincs X -ben szomszédja, azaz $|N(X)| \geq n - |A| - \frac{4}{3}|A \setminus X| \geq \frac{3}{7}n - |A| + |X|$ valóban teljesül.

1.44. A Hall-tételt alkalmazzuk. Ha volna egy A -osztálybeli X Hall-feltételt sértő halmaz, akkor $d(x) + d(b) \geq n$ nem teljesülhetne $x \in X$, $b \in B \setminus N(X)$ párra.

Megjegyzés. A feltétel éppen az Ore-tétel feltétele, így valójában Hamilton-kört is tartalmaz a gráf, ennek csúcsszáma $2n$. Ez a kör két diszjunkt teljes párosítás uniója.

7.8. Független élhalmazok

1.45. (a) A Tutte-tétel feltételét ellenőrizzük. 3-reguláris gráf páros csúcshalmaza, azaz az üres halmaz nem sérti a feltételt. Tekintsünk egy páratlan komponens egy tetszőleges X csúchalmaz elvétele után. X -hez legalább 2 éllel kapcsolódik a 2-élösszefüggőség miatt, de pontosan kettő nem lehet, mert akkor a páratlan komponensben nem egész szám lenne a feszített élé száma. Viszont legfeljebb $3|X|$ éllel kapcsolódhatnak a páratlan komponensek X -hez, ezért a számuk legfeljebb $|X|$.

(b) Keressünk egy tetszőleges 3-reguláris G gráfot, amely egy csúcs elhagyásával 3 részre esik szét. Könnyen látható, hogy ilyenkor a 3 komponens páratlan kell hogy legyen, azaz G -ben nem létezhet teljes párosítás.

1.46. Legyenek az F_0 -beli élek kékek, egy tetszőleges F_1 maximális párosításbeli élek pirosak. Tekintsük ezek unióját! Elhagyva a két színnel színezett éleket, ez a gráf színek szerint alternáló körökből és utakból áll. F_1 maximalitása miatt nem létezhet benne kék éllel kezdődő és végződő út, hiszen akkor azon út mentén cserélve a párosításéleket egy F_1 -nél nagyobb párosítást találnánk. Ha tehát van F_1 által le nem fedett csúcs F_0 -ban, az csak páros hosszú alternáló utakon fordulhat elő; módosítsuk F_1 -et úgy, hogy az ilyen utak piros élei helyett a kékeket vesszük be. Az így kapott párosítás maximális és fedi F_0 csúcsait.

1.47. A Tutte-tétel feltételét ellenőrizzük. Indirekt feltesszük, hogy létezik egy X minimális sértő halmaz, erre $|X| > 0$ nyilván teljesül. Jegyezzük meg, hogy a páratlan komponensek száma ekkor legalább 2-vel nagyobb mint $|X|$ paritási megfontolás miatt. Minden $x \in X$ -ből legfeljebb 2 (páratlan) komponens felé mehet él, ellenkezőleg $K_{1,3}$ -at tartalmazna G . X minimális, ezért pontosan 2 él indul minden $x \in X$ -ből páratlan komponensbe, hiszen az 1 páratlan komponenssel szomszédos csúcsokat elhagyhatnánk. Tekintsük azt a G^* páros gráfot, melynek egyik csúcsozttálya X , másik csúcsozttálya a páratlan komponenseknek megfelelő Y ponthalmaz, ahol xy él akkor van a gráfban, ha x csúcsból a megfelelő páratlan komponensbe vezetett él. G^* nem tartalmazhat kört sem, X minimalitása miatt: az X -beli csúcsait elhagyva kisebb sértő halmazt kapnánk. A minimalitásból az is következik, hogy G^* összefüggő. Emiatt G^* fa kell hogy legyen, amelynek X -beli csúcsai 2-fokúak,

így azonban a számuk nem lehet 2-vel kisebb, mint a fa többi csúcsának száma, ami ellentmondást ad: nem létezhet sértő halmaz.

1.48. Indukciót alkalmazunk; elég 3-mal osztható n -ekre igazolni az állítást. $n = 3$ -ra nyilvánvaló. Ha $n - 3$ -ra tudjuk, akkor legyen G -nek n csúcsa. Amennyiben G teljes vagy üres gráf, az állítás triviális, ellenkező esetben elhagyhatunk 3 csúcsot, amelyek között van behúzott él, és van nem behúzott is; és alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.

1.49. Legyenek M élei kékek, N élei pirosak. Az M és N élhalmaz uniója színek szerint alternáló utak és alternáló páros körök komponenseire bomlik. Mivel kék élből több van mint pirosból, kell lennie egy alternáló kékkel induló páratlan élszámú útnak. M' álljon ezen út piros éleiből, valamint a többi komponens kék éleiből; N' álljon ezen út kék éleiből, valamint a többi komponens piros éleiből.

1.50. Ha felbontható t élű élhalmazok uniójára $E(G)$, akkor a $t \mid e(G)$ oszthatóság nyilván teljesül, emellett a t élű élhalmazok jó élszínezését adják a gráfnak, ezért $\chi_e(G) \leq e(G)/t$ is igaz. A másik irány: vegyünk egy jó élszínezést a gráfnak, ami megtehető $\lfloor e(G)/t \rfloor$ színnel (esetleg valamelyik színt nem használjuk). Azt állítjuk, hogy elérhető, hogy minden színosztály ugyanannyi élből álljon, ezzel az állítást belátnánk. Alkalmazzuk a legalább 2-vel eltérő számú színosztályok kiegyensúlyozására az 1.49 feladat eljárását. Világos, hogy az összélszám alapján minden egyszínű élhalmaz mérete t lett ekkor, ha nincs 1-nél nagyobb eltérés az azonos színű élhalmazok méretei között.

1.51. (a) Jelölje $d(x, y)$ az x -et és y -t összekötő legrövidebb út hosszát. Ha $d(x, y) = 1$, akkor $\nu(G \setminus \{x, y\}) < \nu(G)$ nyilván teljesül. Belátjuk, hogy ha $d(x, y) \leq k$ -ra igaz az állítás, akkor $d(x, y) = k+1$ -re is. Legyen z olyan csúcs, melyre $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Indirekt feltéve, hogy $\nu(G \setminus \{x, y\}) = \nu(G)$, legyen M_1 egy maximális, $\nu(G)$ méretű párosítás $G \setminus \{x, y\}$ -ban, és M_2 egy $\nu(G)$ méretű párosítás a $G \setminus z$ -ben. Az M_2 ekkor lefedi x -et és y -t, különben az indukciós feltételből adódó $\nu(G \setminus \{x, z\}) < \nu(G)$ vagy $\nu(G \setminus \{y, z\}) < \nu(G)$ ellentmondásra vezetne. Az M_1 lefedi z -t az indukciós feltevés szerint, hiszen tudjuk, hogy $\nu(G \setminus \{x, z\}) < \nu(G)$. Az M_1 és M_2 uniója alternáló páros hosszú körök és utak uniója lesz tehát, ahol x, y és z egy-egy alternáló páros hosszú útnak a végpontja. Vegyük a z -ből induló utat. Feltehető, hogy nem x -ben végződik. Módosítsuk M_2 -t úgy, hogy vesszük M_2 és az x -ből induló alternáló út szimmetrikus differenciáját. Így egy $\nu(G)$ nagyságú párosításhoz jutunk, ami nem tartalmazza sem x -et sem z -t, de ez ellentmondás, mert $d(x, z) \leq k$.

(b) Ha M a G egy maximális párosítása, akkor egyrészt M nem lehet teljes

párosítás, hiszen ekkor $\nu(G)$ értéke bármely csúcs elhagyása után csökkenne, másrészt legfeljebb 1 M által nem fedett csúcs lehet, különben lenne $\{x, y\}$, melyeket elhagyva a párosítás nagysága nem csökkenne, ami a) eredményének ellentmond. Így M egy hűján párosítja G csúcsait, és a feltétel szerint ekkor a kimaradó csúcs tetszőleges lehet, a maradék gráfban van teljes párosítás.

7.9. Lefogások, független halmazok

1.52. Használjuk Gallai tételét, mely szerint ha G egyszerű és nincs benne izolált pont, akkor teljesül, hogy $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ és $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. Vegyük észre, hogy van a gráfban teljes pártosítás: $\{e_i = (i, 101 - i), i = 1, \dots, 50\}$, emiatt $\nu = 50$, amiből $\rho = 50$ is adódik. Világos, hogy $\{i = 1, \dots, 10\}$ független halmaz, másrésztől bármely 11 csúcs közül a legnagyobb két értékű között fut él, azaz $\alpha(G) = 10$, $\tau(G) = 90$.

1.53. (a) Vegyünk egy maximális független élhalmazt, ennek csúcsai biztosan lefogó ponthalmazt alkotnak, mert lefogatlan éllel a párosítás mérete növelhető lenne.

(b) Feltehető, hogy G -nek nincs izolált pontja. Gallai tétele szerint $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$, innen az a) állítását alkalmazva adódik a kívánt egyenlőtlenség: $\tau(G) + 2\rho(G) \leq 2\nu(G) + 2\rho(G) = 2|V(G)|$.

(c) $x = 2$ -re a K_3 gráf ad példát. Legyen $x = \frac{p}{q}$, ahol $q \leq p < 2q$. Induljunk ki $2q$ csúcson felvett q élű párosításból; ebben $\nu = \tau = q$. Egyesével vegyünk hozzá éleket a csúcsok közt, amíg meg nem kapjuk a K_{2q} teljes gráfot. Minden lépésben τ értéke legfeljebb eggyel nőhet, vagy nem változik, az utolsó lépésben $\tau = 2q - 1$. Eközben ν változatlan. Ebből adódóan a $\frac{\tau}{\nu}$ függvény minden q -nál nagyobb, de $2q$ -nál kisebb egész számlálójú és q nevezőjű tört értékét felveszi.

Alternatív megoldás. Közvetlen konstrukciót ad $\frac{\tau}{\nu} = \frac{p}{q}$, értékre ($q \leq p < 2q$) egy p csúcsú teljes gráf és $2q - p$ izolált csúcs uniójának komplementere.

1.54. Jelöljön A egy maximális független csúcshalmazt. Megmutatjuk, hogy mindegyik csúcsához választható egy rá illeszkedő független él. Legyen B a független csúcsok szomszédainak halmaza, és tekintsük a két osztály által feszített páros gráfot G -ben. Az A osztály minden X részhalmazára teljesül a Hall-feltétel, mivel $r|X|$ él indul ki belőle, és $N(X)$ minden foka legfeljebb r . Az A -t fedő párosítás egy, a feladat állítását igazoló független élhalmaz.

1.55. 1. megoldás. Mohó algoritmus szerint válasszunk független ponthalmazt: minden kiválasztott csúcs legfeljebb további d csúcs választását zárja ki, ezért legalább $\frac{|V(G)|}{d+1}$ méretű független halmazt kapunk.

2. megoldás. Vegyük a csúcsok egy véletlen sorrendjét, és színezzük kékre azokat a csúcsokat, amelyekből csak a sorrendben későbbi csúcsokhoz vezetnek élek. A kék csúcsok nyilván független halmazt adnak. Annak a várható értéke, hogy i csúcs kék színű lesz, éppen $\frac{1}{d_i+1}$. Ezt i -re összegezve kapjuk a kék csúcsok várható értékét, ami $\alpha(G)$ alsó korlátja lesz. (Ezzel valójában egy lényegesen erősebb állítást igazoltunk.)

7.10. Síkgráfok

A megoldások során c_i az i -fokú csúcsok számát jelöli, míg l_i az i élű lapok (tartományok) számát. A $\sum_i c_i = 2e$ ill. $2e = \sum_i l_i$ összefüggésekre számos alkalommal szükség lesz, ezeket az élek kétszeres leszámolásával kapjuk.

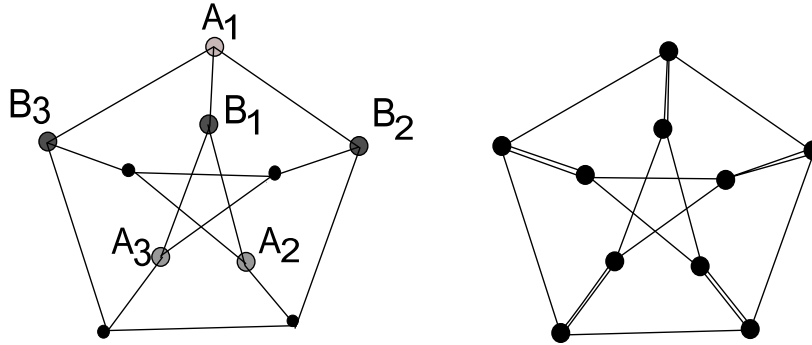
1.56. Feltehető, hogy a gráf összefüggő, továbbá tartományainak mindegyike (a külsőt is ideértve) háromszög. Valóban, elég háromszögelt n -csúcsú gráfokra igazolni az állítást, mert további élek behúzásával minden síkgráfból kapható ilyen. Ekkor $2e = \sum_i l_i \geq \sum_i 3l_i = 3l$ és az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, hiszen minden tartomány három oldalú. Emiatt $e + 2 \leq n + \frac{2}{3}e$ minden síkbarajzolható gráfra, amiből átrendezéssel adódik a kívánt $e \leq 3n - 6$. Ha a gráf ráadásul páros is, akkor a tartományok egyike sem lehet háromszög, ezért a $2e = \sum_i l_i \geq \sum_i 4l_i = 4l$ egyenlőtlenségből indulhatunk ki, és az $e/2 \leq l$ -et az Euler-formulába helyettesítve nyerjük az $e + 2 \leq n + \frac{1}{2}e$ egyenlőtlenséget, ami a bizonyítandóval ekvivalens.

1.57. Készítsük el a szükséges gráfot az objektumok (házak és kutak), illetve összekötő utak gráf-reprezentációjaként, a $K_{3,3}$ gráfot kapjuk. Ez egy 6 csúcsú páros gráf, amelynek 9 éle van, emiatt a 1.56 feladat szerint nem síkbarajzolható, mert az $e \leq 2n - 4$ nem teljesül.

1.58. A K_5 5-csúcsú 10 élű gráf, emiatt a 1.56 feladat szerint nem síkbarajzolható, mert az $e \leq 3n - 6$ nem teljesül.

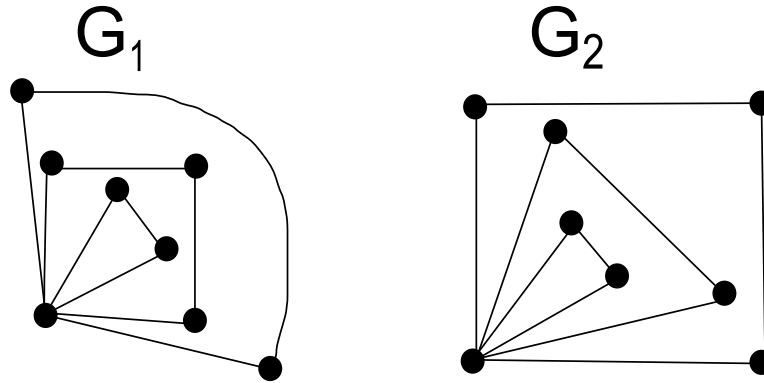
1.59. 1. megoldás. Kuratowski tételét használhatjuk: az ábrán látható módon a Petersen gráfnak van a $K_{3,3}$ gráffal topologikusan izomorf részgráfja, ezért nem síkbarajzolható.

2. megoldás. Wagner tételét használhatjuk: a gráf ábra szerint megjelölt 5 élét összehúzáva K_5 -öt kapunk, tehát a gráf minorként tartalmazza az ötpontú teljes gráfot, azaz nem síkbarajzolható.



1.60. Azt állítjuk, hogy $n \leq 4$ -re a gráf síkbarajzolható, $n > 4$ -re már nem. Az állítás első fele következik abból a megállapításból, hogy $n = 4$ -re a gráf a kocka élhálójával egyezik meg, és $n \leq 4$ -re ennek élhálójáról beszélhetünk. $n = 5$ -re azonban a gráf 20 élet tartalmaz 10 csúcson, ami nem teljesülhet egy síkbarajzolható gráfra 1.56 szerint.

1.61. Az ábra szerinti G_1 és G_2 izomorfak, azonban a lerajzolásuk szerinti duálisukat tekintve a kapott G_1^* és G_2^* gráfok nem izomorfak.



1.62. A G gráf G^* duálisában $n^* = l$ csúcs, $e^* = e$ él és $l^* = n$ lap van. Ha G és G^* is egyszerű páros gráf volna, akkor 1.56 szerint $e \leq 2n - 4$ és $e \leq 2n^* - 4 = 2l - 4$ teljesülne, de a két egyenlőtlenség összegéből $e \leq n + l - 4$ adódna, ami az Euler-formulának ellentmondana.

1.63. A feltételből következik, hogy minden tartomány legalább 5-oldalú. Ebből adódóan $2e = \sum_{i=5}^{\infty} il_i \geq \sum_{i=5}^{\infty} 5l_i = 5l$ teljesül, amit az Euler-formulába helyettesítve $e \leq \frac{5}{3}(n - 2)$ adódik. Egyenlőség akkor teljesül, ha minden tartomány 5-oldalú. Ilyen gráfokat 5-reguláris síkgráfok duálisaként kaphatunk meg, ezekből adunk meg egy végtelen sorozatot. Legyen G_1 az

ikozaéder élhálója, és G_{i+1} -et készítsük el oly módon, hogy G_1 és G_i síkbarajzolt gráfok külső tartományainak egy-egy élét töröljük el, és az így 4-fokúvá váló csúcsokat a két gráf között párosítsuk.

1.64. Mivel minden foksám 3, ezért $2e = 3n = 180$ teljesül, azaz $n = 60$ és $e = 90$. Másrészt $l = l_5 + l_6$ és $2e = 5l_5 + 6l_6$ az élek lapok szerinti kétszeres leszámolásából adódóan, emiatt $2e = 180 = 5l + l_6 = 5(e + 2 - n) + l_6 = 160 + l_6$. Innen $l_6 = 20$, $l_5 = 12$ adódik.

1.65. A poliéder minden csúcsába minimum három, de a feladat feltétele szerint legalább 4 él fut. Emiatt

$$\frac{e}{2} \geq \frac{4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + \dots}{4} \geq n.$$

Az Euler-formula szerint ekkor $l - 2 \geq \frac{e}{2}$ adódik, ahol

$$l - 2 \geq \frac{e}{2} = \frac{3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \dots}{4} \geq l - \frac{l_3}{4}.$$

Ebből $l_3 \geq 8$ következik.

1.66. Rajzoljuk le a poliéder élhálóját. Legyen a kiválasztott L lap csúcsszáma k . Tegyük fel indirekt módon, hogy minden foksám legalább 4. Ekkor $2e = \sum_{i=1}^n d_i \geq 6(n - k) + 4k$ összefüggés adódna. Most $k - 3$ éllel háromszögeljünk fel az L lap képét. Az így kapott G' (a poliéder élhálójából és a behúzott $k - 3$ élből áll) síkgráfra $2e' \geq 6(n - k) + 4k + 2(k - 3)$ -at kapnánk, azaz $e' \geq 3n - 3$ teljesülne, ami ellentmond 1.56 eredményének.

1.67. Tekintsük az élszínezett síkgráf olyan közös csúcsra illeszkedő élpárjait, melyek közös tartományt határolnak, és színük eltérő. Legyen c az ilyen "színváltó" élpárok száma. Ha az állítás nem volna igaz, $c \geq 4n$ teljesülne, hiszen a színváltások száma minden csúcs körül páros. Másrészt egy $2k + 1$ vagy egy $2k$ oldalszámú tartománynak legfeljebb $2k$ ilyen színváltó élpárja lehet. Ebből adódóan teljesül az alábbi becslés:

$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2l_3 + 4l_4 + 4l_5 + 6l_6 + 6l_7 + 8l_8 + \dots \leq \\ &\leq 2 \left(\sum_{i=3} i l_i \right) - 4 \sum_{i=3} l_i = 4e - 4l. \end{aligned}$$

Ez ellentmond az $n + l = e + 2$ Euler-formulának.

1.68. Tekintsük a gráf egy síkbarajzolását. Az élek jó irányítását megfeleltethetjük a lapok irányításának a következő módon: ha az élek irányítása a feltételnek megfelelő, akkor minden lap határán az óramutató járása

szerint vagy azzal ellentétes irányban körbejárhatunk. Azt láthatjuk, hogy szomszédos lapok irányítása ellentétes kell legyen az élek irányítása szerint, tehát összességében az állítás azzal ekvivalens, hogy a lapoknak létezik jó 2-színezésük, vagyis a duális síkgráf páros. Ehhez elég belátnunk, hogy nincsen benne páratlan hosszú kör. Tekintsünk egy kört a duálisban, ez egy külső és egy belső részre particionálja a tartományok halmazát, tegyük fel, hogy k a belső tartományok száma. Váltunk vissza a duálisról az eredeti gráfra, melyben az x hosszú duálisbeli körön x él lép ki a belső részből. Ha a körön belül k csúcsa van G -nek, és az általuk feszített gráfnak e éle, akkor a kilépő élek x számára $x = 4k - 2e$ teljesül, emiatt x , a kör hossza biztosan páros.

1.69. Rajzoljuk le a poliéder élhálóját, így kapjuk a G síkgráfot. Először megmutatjuk, hogy található benne irányított kör. Ez világos: ha elindulunk egy tetszőleges csúcsból és mindig továbblépünk egy kifelé irányított élen, legfeljebb n lépésen belül egy irányított kört zárunk be. Belátjuk, hogy ezen a C kör által határolt síkrészen belül, illetve ezen kívül is találunk olyan (poliéderlapnak megfelelő) tartományt, amelynek a határa irányított kör. Ha a körön belül nincs csúcs, máris megtaláltuk a körön belüli keresett tartományt. Ha van, akkor találunk egy olyan kört, amelynek belseje kevesebb csúcsot tartalmaz, így az algoritmus a gráf végeességéből adódóan egy irányított határu laphoz vezet. Induljunk ugyanis ki egy C által határolt síkrészen belüli P csúcsból, és kifelé irányított éleken továbblépve vagy C csúcshalmazába érkezünk vagy bezárunk egy irányított kört a körön belül és készen vagyunk. Hasonlóan a visszafelé irányított éleken továbblépve P -ből a C csúcshalmazába érkezünk vagy bezárunk egy irányított kört és kész vagyunk. Viszont a C -n belül haladó P -n átmenő irányított út létezése ismét maga után vonja, hogy találunk egy irányított kört C -n belül, amelynek a belső csúcsai száma csökkent C -hez képest. (Hiszen P már biztosan nem belső csúcs.) Az eljárással eljutunk tehát a keresett tartományhoz. Az utolsó megfigyelés, hogy nem lehetséges, hogy belül és kívül is ugyanazt a kört találjuk meg: azaz ha C -n belül nincs további csúcs, akkor rajta kívül kell lennie.

1.70. Vegyük a gráf tetszőleges síkbarajzolását. Alkalmazzuk a következő eljárást: állapítsuk meg, hogy van-e metsző élpár, és ha van, akkor egy ilyen élpár egyik tagját hagyjuk el. Ezzel legalább eggyel csökkentettük az élszámot, és legalább eggyel az élkeresztezési számot is. Vegyük észre, hogy mindaddig, amíg a gráf élszáma meghaladja a $3n - 6$ számot, nem lehet a gráf síkgráf, azaz biztosan találunk tetszőleges lerajzolásában metsző élpárt. Emiatt a metszési szám legalább annyi, ahányszor élet kellett elhagynunk, azaz legalább $n + 6$.

7.11. Tournamentek

1.71. (a) Ha nem lenne mediánsorrend, akkor a $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ csúcsok egy permutációjában az előreélek száma a vizsgált sorrendbelinél nagyobb lenne. Viszont ezt a permutációt alkalmazva az összes csúcsra (úgy, hogy a többi csúcs helye nem változik) az összes csúcs eredeti sorrendjéhez képest is növekedne a az előreélek száma, ami ellentmondás.

(b) Ha az állítás nem volna igaz, akkor a csúcsok sorrendjét $(v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j, v_i)$ -re, illetve a második esetben $(v_j, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1})$ -re változtatva az előreélek száma növekedne, ami ellentmondás.

1.72. Első rész: tetszőleges mediánsorrend esetén az első csúcs, v_1 pseudo-győztes. Valóban, ha nem lenne az, akkor létezne olyan v_k , amelyből vezetne el v_1 -be és annak összes legyőzöttjébe, ám ekkor a $v_1 - v_k$ csere révén olyan sorrendet kapnánk, amiben nőtt az előreélek száma.

Második rész: Figyelembe véve 1.71 (b) eredményét $j := i + 1$ alkalmazásával világos, hogy a mediánsorrend szerint az $(i, i + 1)$ élek élei a tournamentnek, azaz a sorrend éppen egy Hamilton-utat határoz meg.

1.73. Tekintsük a tournament csúcsainak egy mediánsorrendjét: $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, valamint vegyük a gyökeres kifenyő mélységi bejárési sorrendjét $(w_1, w_2, \dots, w_{k+1})$. Ágyazzuk be mohón a fenyőt a következő módon. Legyen $w_1 \equiv v_1$. Általánosan, ha az első $j - 1$ fenyőcsúcsot azonosítottuk a mediánsorrendben, akkor w_j azonosításához tekintsük a w_j -be mutató $w_i w_j$ fenyőélt, és tegyük fel, hogy $v_t \equiv w_i$. ($i < j$ a bejárás miatt, ezért w_i -t már azonosítottuk.) Legyen w_j -nek megfelelően a legkisebb indexű eddig még nem használt v csúcs, amelyre $v_t v$ él a tournamentben. Állítjuk, hogy ennek a v -nek az indexe legfeljebb $2(j - 1)$, ha $j \geq 2$. $j = 2$ -re ez következik abból, hogy $v_1 v_2$ él a tournamentben. Általános esetben pedig 1.71 (b) eredményét felhasználva indukcióval bizonyítunk. v_t indexére nézve az indukció szerint $t \leq 2(i - 1)$ teljesül. $v_t \equiv w_i$ legyőzte a $v_{t+1}, \dots, v_{2(j-1)}$ csúcsok legalább felét, tehát legalább $j - i$ csúcsot. Eddig ezen csúcsok közül legfeljebb $j - i - 1$ -et azonosíthattunk valamely fenyőcsúccsal, azaz valóban lesz olyan, amit ki tudunk választani.

7.12. Körök, utak irányított gráfokban

1.74. Ha egy irányított gráfban nincs kör, azaz a gráf aciklikus, akkor van benne olyan csúcs, aminek a befoka 0. (Forrásnak nevezzük az ilyen csúcsot.) Valóban, ha nem így lenne, akkor tetszőleges csúcsból indulva mindig tudnánk egy irányított élen visszafelé lépni egy újabb csúcsba, emiatt legfeljebb

n lépésen belül olyan pontba érkeznénk, ahol már jártunk, ez pedig egy irányított kört mutatna meg a gráfban.

Alkalmazzuk azt az iteratív eljárást, hogy az i -edik lépésben kiválasztunk egy forrást a kapott $(n - i + 1)$ csúcsú irányított gráfunkból, letöröljük, és betesszük a sorrend végére. A kapott sorrendben csak előreélek lesznek tehát, amit a feltételünk kér.

Megjegyzés: a bizonyítást hasonlóképpen végezhetjük volna úgy is, hogy 0 kifokú csúcsokat (nyelőket) választunk, mivel azok száma sem nulla egy aciklikus gráfban, ekkor az eredményül kapott sorrendet még meg kell fordítanunk.

1.75. Tekintsük a $D(V, E)$ gráf F_1 forráshalmazát és az Y_1 csúcsalmazt, amelynek elemei a források egyikéből elérhető csúcsok. F_1 nyilvánvalóan független halmaz, Y_1 -re pedig teljesül, hogy vezet minden csúcsába él valamelyik F_1 -beli pontból. Ha ezek uniója nem adná ki az összes csúcsot, hagyjuk el a két csúcsalmazt, és a megmaradt D' gráfra alkalmazzuk az előző lépést, megkapva ezzel az F_2 forráshalmazt és az Y_2 forráshalmazból elérhető csúcsalmazt. A meghatározott forráshalmazok uniója független halmaz, és $Y_1 \cup Y_2$ -re is teljesíti a feltételt. A forráshalmazt és források szomszédhalmazát meghatározó lépések ismétlésével 2 részre particionáltuk a csúcsalmazt aszerint, hogy F_i -nek vagy Y_i -nek lett eleme. A forráshalmazok X uniójából minden más csúcs elérhető lesz a konstrukció szerint, és közöttük nem vezethet él. Ez tehát a feltételünket kielégítő független halmaz.

1.76. Tekintsük a legnagyobb aciklikus D' részgráfját a D digráfknak. Nem lehet olyan csúcs $D \setminus D'$ -ben, amelybe nem vezet D' -ből él, hiszen egy ilyen csúccsal bővíteni lehetne D' -t. Tehát, ha 1.75 szerinti független halmazt tekintjük D -ben, arra feladatunk állítása teljesülni fog.

7.13. A Turán-tétel és alkalmazásai

1.77. Könnyű látni, hogy két páros gráf élhalmazával a K_5 gráf nem fedhető: akárhogy particionálja az első páros gráf két osztályba a csúcsokat, lesz egy legalább 3 nagyságú osztály, azaz egy K_3 amit az első nem fedett le, és ezt a második páros gráf sem tudja lefedni. Tehát az élhalmazok uniója K_5 -mentes gráfot alkot, így Turán tételét $k + 1 = 5$ -tel alkalmazva összesen legfeljebb $\frac{k-1}{2k}n^2 = \frac{3}{8}n^2$ éle lehet.

1.78. Feleltessünk meg a számoknak csúcsokat, és kössünk össze kettőt, ha együtt megjelöljük egy szelvényen, így kapjuk a G gráfot. Akkor nyerünk biztosan, ha bármely öt csúcs között van 2, akiket összeköttöttünk, azaz a gráf

komplementerében nincsen K_5 gráf. G komplementerének emiatt legfeljebb $\frac{3}{8}n^2 = 3750$ éle lehet a Turán tétel szerint $n = 100$ feltétel mellett, azaz G -nek legalább $\binom{100}{2} - 3750 = 1200$ éle van, ennyi szelvényt muszáj kitöltenünk.

1.79. Tekintsük a színezett élek gráfját! Mivel az $R(3, 3)$ Ramsey-szám 6, ezért a gráfban nem lehet K_6 , így a Turán-tétel szerint legfeljebb $\frac{4}{10}15^2 = 90$ éle lehet. Valóban ez az elérhető maximum, mert ha 5 háromcsúcsú X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 csoportba osztjuk a csúcsokat, xy kék él ha $x \in X_i, y \in X_{i+1}$, piros ha $x \in X_i, y \in X_{i+2}$ valamelyik i -re, akkor nem lesz egyszínű háromszög a gráfban.

1.80. Turán tételéből adódik, hogy ha $k = 4$ -gyel igaz lenne az állítás, akkor rögzítve egy színt, minden pontnégyesbe esne ilyen színű él, és ekkor ezen egyszínű élek száma legalább 12 lenne, az 1.78 megoldás gondolatmenete szerint. Valóban, az azonos színű élek gráfjának komplementere nem tartalmazhat $K_k = K_4$ -et, így Turán tétele szerint a többi színű élből legfeljebb 33 lehet, vagyis a kiválasztott színből legalább $\binom{10}{2} - 33 = 12$. Összesen azonban nincsen 4×12 , csak 45 él a tízcsúcsú gráfban, emiatt $k \geq 5$. Megmutatjuk, hogy $k = 5$ -re létezik jó színezés. Legyenek a gráf csúcsai a $(\text{mod } 10)$ maradékosztályok, és színezzük a 04, 07, 47, 12, 13, 23, 59, 68 éleket az első színnel. Világos, hogy 4 klikket kapunk így, ezért bármely öt csúcs között lesz közülük él. Legyen az i -edik ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) színosztályban minden él, amit az előzőleg felsorolt 8 él $2(i-1)$ -gyel való eltolásával kapunk, tehát xy helyett $x + 2(i-1), y + 2(i-1)$ kerül bele. (Ha tetszik, egy szabályos 10-szög átlóit forgatjuk körbe ötödfordulatokkal.) Világos, hogy így minden színosztály teljesíti a szükséges feltételt, és belemetsz az összes K_5 -be. Az is könnyen látható, hogy minden élnek legfeljebb egy színt határoztunk meg. A fennmaradó éleket innentől tetszőlegesen színezhettük, a színezés jó lesz.

1.81. Feltehető, hogy $n \geq 3$. A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből adódóan ha $n = 3$, akkor $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 \leq p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, és mivel $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, ebből $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 \leq 1/3$ adódik, ami $p_i = 1/3$ választás mellett éles is.

Ha $n \geq 4$, akkor a kifejezés értéke könnyen láthatóan elérheti az $1/4$ értéket $p_1 = p_2 = 1/2$ esetén. Belátjuk, hogy ez éles. Feltehető, hogy a $p_i + p_{i+2}$ összegek közül $p_1 + p_3$ a legnagyobb, ekkor a kifejezés értéke nem csökken, ha $p_2 := p_2 + p_n, p_n := 0$ módon módosítjuk a súlyok értékeit. Legyen most w a páratlan indexű p_i -k összege, a feltétel szerint tehát $(1-w)$ a páros indexűké. Ekkor könnyen látható, hogy

$$\sum_i p_i p_{i+1} \leq w(1-w) \leq \left(\frac{w + (1-w)}{2} \right)^2,$$

amit állítottunk.

1.82. Legyen a p_i súlyok nevezőinek legkisebb közös többszöröse N , és készítsük el azt a G' gráfot, amelyet a G felfújásával kapunk a következő módon: i csúcs helyét egy Np_i nagyságú X_i független halmaz veszi át, és ha $ij \in E(G)$, akkor X_i és X_j minden csúcsa legyen összekötve. Így $|V(G')| = N$, és $|E(G')| = N^2 \sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j$. Ha a G gráfban nincs $\omega(G) + 1$ -es klikk, akkor G' -ben szintén teljesül ez, ami miatt az élszám becslhető Turán tétele szerint az alábbi módon: $|E(G')| \leq \frac{\omega(G)-1}{2\omega(G)} N^2$. N^2 -tel való osztás után az állítást (és az előző feladat általánosítását) nyerjük.

1.83. (a) Mivel csak v -re illeszkedő éleken történt változás, csakis olyan k -csúcsú klikk keletkezhetett, amiben v is benne van. Másrészt ekkor u nem lehet benne, hiszen G' -ben nincs benne az uv él. Ha létezne G' -ben ilyen klikk, akkor vegyük észre, hogy G -ben ugyanekkora klikket alkotna a csúcshalmaz, miután u -t v helyére hozzávennénk, mivel G' -beli szomszédságuk megegyezik. G viszont nem tartalmazott a feltételünk szerint k -klikket.

(b) Alkalmazzuk ismételten az (a)-ban látott transzformációt G -n oly módon, hogy válasszuk u -nak a maximális fokú csúcsot, v legyen tetszőleges csúcs, amely nem szomszédja. Vegyük észre, hogy az élszám nem csökken, és az összes $v : uv \notin E(G)$ -re végrehajtva olyan G -t kapunk, amelyben $n - d(u) - 1$ csúcs független X_1 halmazt alkot, és minden más csúccsal össze van kötve. Címkezzük meg ezen csúcsokat, és folytassuk az eljárást a maradék gráfon. A transzformációsorozat eredményeképp minden csúcsot megcímkézzünk, mind egy-egy X_i független csúcsoztályba sorolódnak, amely az összes többi csúcsoztály minden csúcsával össze van kötve. Feltéve, hogy G -ben nem volt $k + 1$ -es klikk, valamint hogy élszáma az ilyen tulajdonságú n csúcsúak között maximális, azt láthatjuk, hogy a transzformációsorozattal nyert gráfban a megkapott független csúcsoztályok száma éppen k . (Több nem lehet, mert akkor lenne K_{k+1} a gráfban, kevesebb sem, mert akkor lehetne élet behúzni valamelyik csúcsoztályon belül, azaz G nem volt élszámra maximális.) A csúcsoztályok mérete legfeljebb eggyel térhet el, ellenkező esetben nagyobb élszámú n -csúcsú gráf is létezne. Valóban, ha $|X_i| > |X_j| + 1$, akkor X_i -ből X_j -be egy csúcs áttételével az élszám nőne $|X_i| - 1 - |X_j|$ -vel. Tehát ha G -nek maximális élszáma volt, akkor pont annyi éle volt, mint az n -csúcsú, k -osztályú Turán-gráfnak.

7.14. Cseresznyék

1.84. Számoljuk meg őket a száruknál fogva! Az eredmény $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$.

1.85. Számoljuk meg a cseresznyéket a gyümölcsök felől! Minden csúcspárra legfeljebb 1 cseresznye illeszkedik ha nincs C_4 a gráfban, ezért $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \leq$

$\binom{n}{2}$. Felhasználva a $\sum_{i=1}^n d_i = 2e$ összefüggést és a d_i számokra vonatkozó számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget, $\frac{(2e)^2}{2n} - e \leq \frac{n(n-1)}{2}$, innen e -re egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk, amiből adódik, hogy e kisebb, mint a másodfokú egyenlet nagyobbik gyöke:

$$e \leq \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 16n^2(n-1)}}{8} \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$$

1.86. (a) Vegyünk egy tetszőleges xy élet. Nem lehet közös szomszédjuk, mert nincs K_3 a gráfban, ezért az xy -t tartalmazó cseresznyék száma maximum $(n-2)$. Összegezzük ezt minden élre, ezzel megszámloltunk kétszer minden cseresznyét (mindkét száránál), azaz az állítás teljesül.

(b) és (c) 1. megoldás. A cseresznyék száma éppen a háromszögek t_3 számának háromszorosából, és a háromcsúcsú kétélű részgráfok y számának összegéből adódik. y felülről becsülhető azon háromcsúcsú részgráfok számával, amelyekben van él is és nem-él is: $y \leq \frac{\sum_{i=1}^n d_i(n-d_i-1)}{2}$. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3t_3 &\geq \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n d_i(n-d_i-1)}{2} = \\ &= \frac{\sum_i d_i^2 - d_i}{2} - \frac{\sum_i d_i(n-d_i-1)}{2} \geq \frac{4e^2}{n} - ne, \end{aligned}$$

ami az állítással ekvivalens.

2. megoldás. Összegezzük minden egyes ij élre azt a megállapítást, hogy $d_i + d_j - n \leq t_{ij}$, ahol t_{ij} az ij -re illeszkedő háromszögek száma. Vegyük figyelembe, hogy $\sum_{ij \in E(G)} t_{ij} = 3t_3$. Átrendezés után ebből épp a bizonyítandót kapjuk.

1.87. (a) Vonjuk le az összes lehetséges háromszögek számából a nem egyszínű háromszögek számát! Utóbbiakat úgy kapjuk, hogy összeszámoljuk az egy csúcsra illeszkedő eltérő színű élpárok számát – így minden ilyen háromszöget kétszer vettünk, ebből adódik a képlet.

(b) Az (a) feladatrészt gondolatát visszük tovább. Általánosan felírható, hogy az egyszínű háromszögek pontos száma

$$\binom{n}{3} - \sum_{i=1}^n \frac{d(i) \cdot (n-d(i)-1)}{2},$$

ha $d(i)$ -vel jelöljük az i csúcsba futó kék élek számát. A $d(i) \cdot (n-d(i)-1) \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ becslést minden i -re alkalmazva kapjuk a feladat állítását.

1.88. Vegyük észre, hogy $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ a meccsek száma, emiatt a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_i \binom{x_i}{2} = \sum_i \binom{y_i}{2}.$$

Tournamentben ábrázolva a meccsek kimeneteleit (a győztesektől a vesztesek felé irányítva az éleket), azt kell látnunk, hogy közös csúcsból kifelé vezető élekből képezhető párok száma a befelé vezető élpárok számával egyezik meg. Ez valóban igaz, hiszen irányított háromszög 0–0-val, vagy 1–1-gyel növeli a kétféle kifejezés értékét annak függvényében, hogy egyirányú kört határoznak meg az élei vagy nem.

1.89. Minden csúcspárra, amely élet feszít, 0 cseresznye (közös szomszédos csúcs) illeszkedhet a K_3 mentesség miatt, egyébként pedig legfeljebb 1 a C_4 -mentesség miatt. Ebből adódóan $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2} - e$. A korábbiakhoz hasonlóan, a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\frac{(2e)^2}{2n} \leq \frac{n(n-1)}{2}$, amiből $e \leq n \frac{\sqrt{n-1}}{2}$ következik, $n = 10$ -re a feladat állítását igazolva.

1.90. A 1.85 gondolatmenetét követjük. Tetszőleges ponthármashoz legfeljebb kettő közös szomszéd tartozhat, ez alapján becslünk:

$$2 \binom{n}{3} \geq \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{3} > \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 \geq \frac{n}{6} \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3}{n}.$$

Becsüljük a jobb oldalt a köbös és számtani közép közti egyenlőtlenséggel, majd szorozzunk n^2 -tel. Eszerint $2n^5 \geq (2e - 2n)^3$, amiből adódik a kívánt nagyságrendű becslés.

1.91. Legyen az egyenlőszárú háromszögek halmaza A . Minden háromszöghöz rendeljük hozzá (egyik) alapját. Vegyük észre, hogy minden alap legfeljebb kétszer szerepel, ellenkező esetben az alappal szemközti csúcsok mind az alap oldalfelező merőlegesére esnének. $\binom{n}{2}$ csúcspár van, azaz az egyenlőszárú háromszögek száma legfeljebb $2 \binom{n}{2} \leq n^2$.

1.92. Legyen l egy tetszőlegesen választott távolság. Kössük össze az éppen l távolságra eső pontokat. Vegyük észre, hogy az így kapott gráfban nincsen $K_{2,3}$ részgráf: ellenkező esetben volna a síkon három, egy rögzített pontpártól egyforma távolságra eső pontja. Az 1.85 feladat megoldásának gondolatmenetét követjük: tetszőleges pontpárhoz legfeljebb kettő közös szomszéd tartozhat. Ez alapján befejezhetjük a bizonyítást.

7.15. Színezési feladatok

1.93. (a) $\chi(G) \geq \omega(G)$, hiszen minden klikkben a csúcsokhoz különböző színt kell rendelni. $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$, ugyanis egy színosztály mérete legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, emiatt legalább $\frac{n}{\alpha(G)}$ színosztályra szükség van egy jó színezéshez.

(b) Vegyük G_1 és G_2 egy-egy jó színezését $\chi(G_i)$ ($i = 1, 2$) színnel, és legyen $(G_1 \cup G_2)$ -ben minden csúcs színe a két gráfbeli színből képzett rendezett pár. Így $\chi(G_1)\chi(G_2)$ színnel megszíneztük az uniógráfot. A színezés jó, hiszen ha két csúcs szomszédos $(G_1 \cup G_2)$ -ben, akkor legalább az egyik gráfban szomszédos G_1 és G_2 közül, így nem lehet azonos a hozzájuk tartozó rendezett színpár.

1.94. Páratlan kör nyilvánvalóan nem szerepelhet páros gráfban: a szomszédos csúcsok nem tudnának mind különböző színosztályba kerülni. Másrészt határozzuk meg az egyes csúcsokról egy sorrend szerint végighaladva mohón, hogy milyen színt kapnak. A sorrend legyen egy szélességi keresésből adódó sorrend. (Feltehetjük, hogy a gráf összefüggő, vagy komponensenként színezhetünk.) A szélességi keresés segítségével az első csúctól vett minimális távolság szerint szintekre bonthatjuk a gráfot. A nulladik szint, azaz az első csúcs színe legyen kék, az első szint csúcsaié (ami az első csúcs szomszédait tartalmazza) piros. A gráf élei csak szomszédos szintek között és azonos szinten belül mehetnek, de utóbbi esetet is kizárhatjuk, mert nincs a gráfban páratlan kör. Így a mohó színezéssel éppen a páros szintűek lesznek kék, a páratlan szintűek piros színűek.

1.95. Van benne 5-hosszú kör, emiatt legalább 3 a gráf kromatikus száma. Másrészt könnyen látható, hogy megszínezhető 3 színnel a gráf.

1.96. A 2-hatványok: $\{2^0, 2^1, \dots, 2^6\}$ egy 7-es klikket alkotnak, emiatt $7 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$. Másrészt 7 színnel megszínezhető a G gráf: ezt két egyszerű színezéssel is igazoljuk. Rendeljük a csúcsokhoz a $\{0, 1, \dots, 6\}$ színeket oly módon, hogy (i) x csúcsnak legyen a színe a prímosztói száma (multiplicitással számolva); (ii) x színe legyen i , ha $2^i \leq x < 2^{i+1}$. Világos, hogy mindkét színezésben a fenti 7 színt használjuk fel, valamint az is, hogy mindkét színezésben egy színosztályon belül nem lehet két szám, melyek egyike a másikat osztja.

1.97. A prímszámok halmaza az 1-gyel kiegészítve egy $\pi(100) + 1 = 27$ méretű klikket alkot, azaz $27 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$. Másrészt 27 színnel megszínezhető a gráf, ennek igazolására megadunk egy jó színezést. Legyenek a színosztályok címkéi a prímszámok és az 1 szám; tegyük az 1-et a neki megfelelő 1-es címkéjű kupacba, és minden más számot abba a kupacba, ami az ő leg-

kisebb prímosztója. Így minden számot szétszöttünk, és minden kupacban független csúcsok vannak, azaz a színezés valóban megfelelő.

1.98. Indirekte tegyük fel, hogy az állítás hamis. Ekkor minden szabályos egységoldalú háromszög csúcsai különböző színűek lennének. Vegyünk most két tetszőleges, egymástól $\sqrt{3}$ -ra lévő P és Q pontot. Ezek felezőmerőlegesére eső, mindkettőtől egyformán egységnyi távolságra levő pontpár egymástól is egységtávol van, amiből következik, hogy P -nek és Q -nak egyszínűnek kell lennie, azaz minden egymástól $\sqrt{3}$ -ra lévő pontpárra igaz ez az állítás. Vegyünk most egy háromszöget, melynek oldalai $1, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ hosszúak. Az előző következtetés szerint ennek mindhárom csúcsa egyszínű, azaz mégis lenne egységnyi távolságra egyszínű pontpár, ellentmondás.

1.99. A három páros gráf osztályai legfeljebb $2^3 = 8$ részre partícionálják a gráf csúcshalmazát aszerint, hogy melyik páros gráfon belül melyik osztályba tartozik egy adott csúcs. Egy partícióosztályon belül nem mehetnek élek, így ha a partícióosztályokat választjuk G színosztályainak, akkor 8 színnel egy jó színezését kapjuk a gráfnak.

Megjegyzés: az unió műveletet kétszer alkalmazva az állítás adódik a **1.93.** feladat (b) részének eredményéből is.

1.100. 1. megoldás. Alkalmazzuk 1.93 (b) pontjának állítását $G_1 = G, G_2 = \overline{G}$ szereposztással.

2. megoldás. $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) = \alpha(G)$. Másrészt $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$, 1.93 (a) állítása szerint. Ezek szorzatából következik a feladat állítása.

1.101. Belátjuk teljes indukcióval G kromatikus számára nézve, hogy $\overline{G}$ színezhető ekkor $n + 1 - \chi(G)$ színnel. Ha $\chi(G) = 1$, az állítás triviális. Az indukciós lépésben tekintsük az n csúcsú G gráf egy $\chi(G)$ -színezését, legyenek a színosztályai X_i ($i = 1 \dots \chi$). Ha a színosztályokat összehúzzuk $1-1$ ponttá, akkor teljes gráfot kapunk, mivel ellenkező esetben két színosztály egyesíthető lett volna. Tekintsük a $\chi - 1$ színnel színezhető,

$$\cup_{i=1}^{\chi-1} X_i$$

által feszített G' részgráfot, és válasszunk $x_i \in X_i$ ($i < \chi(G)$) csúcsokat úgy, hogy minden x_i -ből vezessen él X_χ -be. G' komplementere színezhető az indukció szerint $n - |X_\chi| + 1 - (\chi - 1)$ színnel. Létezik olyan szín – legyen a kék –, ami csak az $\{x_i : i = 1 \dots \chi - 1\}$ halmazban jelenik meg, mert a színek száma nagyobb mint

$$|\cup_{i=1}^{\chi-1} X_i \setminus \cup_{i=1}^{\chi-1} \{x_i\}|.$$

Válasszunk $|X_\chi|$ új színt az X_χ -beli csúcsoknak. Színezzük át $\overline{G'}$ eredetileg kék csúcsait úgy, hogy minden ilyen x_i csúcs kapja meg azt a színt, amelyiket

egy tetszőleges X_χ -beli szomszédjához rendeltünk. Mivel a komplementerben ezek az élek nem szerepelnek, a színezés jó lesz, és mivel a kék színt már nem tartalmazza, legfeljebb $n - |X_\chi| + 1 - (\chi - 1) + |X_\chi| - 1 = n + 1 - \chi(G)$ szín szerepel benne, amit szerettünk volna.

1.102. Nem igaz. Legyen $G = K_{n,n}$ teljes páros gráf A, B csúcsosztályokon, $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, ahol $|A_1| + |B_1| > n$. Töröljük az éleket A_1 és B_1 között, így kapva a G' gráfot. Ekkor $\alpha(G') > n$, de n -nél nagyobb nem lehet egy színosztály, ha a színosztály komplementerének is független halmaznak kellene lennie.

1.103. Ehhez elég igazolnunk, hogy $n - 2k + 2$ színnel az (n, k) -Kneser-gráf jól színezzhető. Rendeljük az i -edik színt ($i \leq n - 2k + 1$) azokhoz a k -elemű halmazokhoz, amiknek i a legkisebb elemük. Ezek a színosztályok független halmazokat feszítenek, lévén tartalmaznak közös elemet. A fennmaradó halmazok közül szintén semelyik kettő nem lehet diszjunkt, mert uniójuk legfeljebb $2k - 1$ elemű lehet. Ha tehát a fennmaradókhöz rendelünk egy $(n - 2k + 2)$ -edik színt, jó színezését kapjuk a Kneser-gráfnak.

Megjegyzés: Lovász László igazolta, hogy az (n, k) -Kneser-gráf nem is színezzhető ennél kevesebb színnel.

7.16. Élszínezések

1.104. Elég megmutatnunk, hogy létezik egy teljes párosítás a $G(A, B, E)$ páros gráfunkban. Ezen párosítás élhalmazához egy színt rendelve ugyanis a megmaradt gráf továbbra is reguláris páros gráf lesz. Innen a foksámokra vonatkozó teljes indukcióval következik az állítás. A foksámokat a két csúcsosztályban külön-külön összegezve az élszámot kapjuk: $r|A| = |E(G)| = r|B|$, amiből következik, hogy $|A| = |B|$. A Hall-feltételt ellenőrizve pedig adódik, hogy van a gráfban egy csúcsosztályt fedő párosítás.

Megjegyzés: Könnyen látszik, hogy G tartalmazhat akár párhuzamos éleket is.

1.105. Készítsünk egy H Δ -reguláris gráfot, amelynek $G(A, B)$ a részgráfja. Ekkor H -ra alkalmazva 1.104 eredményét, a színezést G -re megszorítva készen leszünk. Egy megfelelő H -t kapunk, ha G kisebbik csúcsosztályát további csúcsokkal feltöltjük, hogy a nagyobbik méretével egyezzen meg, majd mohó módon hozzáveszünk G -hez éleket mindaddig, amíg találunk Δ -nál kisebb fokú csúcsot, egyedül arra figyelve, hogy szintén Δ -nál kisebb fokúhoz kössük hozzá. (Ezúttal párhuzamos élek alkalmazása sem gond.) Az éldúsítás csak akkor akadhat el, ha a gráfunk Δ -reguláris lett.

1.106. G élkromatikus száma $2k + 2$. Vizing tétele szerint csak $2k + 1$ vagy $2k + 2$ lehet a paraméter értéke, előbbi kell kizárnunk. Ha $\chi'(G) = 2k + 1$ lenne, akkor az összes szín előfordulna tetszőlegesen választott csúcsra illeszkedő éleken. Hagyjuk el most G -ből az e élvágó élet. A megmaradt gráf két diszjunkt gráf, G_1 és G_2 uniója, melyek csúcsszáma páratlan. Valóban, $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) = (2k + 1)|V(G_1)| - 1 = 2|E(G_1)|$, amiből $|V(G_1)|$ páratlansága következik. Legyen $|V(G_1)| = 2t + 1$. G_1 -ben minden színosztály egy párosítást határoz meg, így G_1 élszáma legfeljebb $(2k + 1)t$ lehetne, ami kisebb, mint $1/2 \cdot ((2k + 1)|V(G_1)| - 1)$, ellentmondás.

1.107. Tegyük fel, hogy több mint 1 színnel színeztük ki a gráfot, de a színek száma legfeljebb 11. Szemeljünk ki egy P csúcsot. Van legalább 10 olyan csúcs, melyek ugyanazzal a (lila) színű éllel vannak P -hez kötve a skatulyaelv szerint. Ezen csúcsok közt a feladat feltétele értelmében nem lehet más színű él, tehát találtunk egy 11-es lila élekből álló klikket a gráfban. Ha a P csúcsra illeszkedő élek mind lila színűek lennének, akkor csak ez az egy szín fordulhatna elő a színezésben. Vegyünk tehát egy Q csúcsot, melyre PQ él nem lila. Q -ból a lila klikk felé nem vezethet két azonos színű él, mert az sértene a feltételt, így Q -ból legalább 11 egymástól és a lila színtől különböző színű él kell hogy kiinduljon, szemben eredeti feltevésünkkel.

Megjegyzés: A bizonyításból következik, hogy q csúcsú gráf jó színezéséhez pontosan 1 vagy legalább $\lceil \sqrt{q} \rceil + 1$ szín szükséges. Az eredmény éles a következő értelemben: ha egy $q = n^2$ csúcsú gráfot veszünk, ahol n prímszám, akkor az élek kiszínezhetőek $n + 1$ színnel úgy, hogy minden háromszög vagy egyszínű éleket tartalmaz, vagy a háromszög minden éle különböző színű. Valóban, vegyünk egy n -rendű affin síkot, ilyen létezik, ha n prímszám. Minden párhuzamossági osztályhoz rendeljünk egy színt. Két pont által meghatározott él színe legyen az, ami a pontok által meghatározott egyenes párhuzamossági osztályához lett rendelve.

7.17. Síkgráfok színezése

1.108. Alkalmazzunk indukciót az egyenesek számára! $n = 1$ -re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n - 1$ egyenes esetében létezik jó színezés. Helyezzük le az új n -edik egyenest, ez kettéosztja a síkot. Az egyik félsíkban a korábbi színezést módosítsuk: minden ország színét változtassuk meg. Ezáltal a két félsíkon belül az országhatárok továbbra is eltérő színű országok között haladnak, az n -edik egyenes által meghatározott új országhatár pedig szintén eltérő színű országokat határol.

1.109. Tekintünk egy olyan egyenest, amelyik semelyik csúcspár által meghatározott egyenesre nem merőleges. Vetítsük le merőlegesen erre a síkgráf csúcsait – így a csúcsok képei egymástól különböznek. A csúcsok vetületi képei egy sorrendet határoznak meg. Eszerint a sorrend szerint mohón színezzük ki a csúcsokat 3 színnel. Nem fogunk elakadni, mert minden csúcsnak legfeljebb két olyan szomszédja lesz, amelyiket már színeztük.

1.110. Tekintsük a G gráf lerajzolását, majd tartományainak egy jó színezését 4 színnel, az $\{1, 2, 3, 4\}$ címkékkal! Minden él két különböző színű tartományt határol; ezen színkombinációk alapján határozzuk meg az él színét. Legyen az él színe piros, ha $(1, 2)$ vagy $(3, 4)$; kék ha $(1, 3)$ vagy $(2, 4)$; sárga ha $(1, 4)$ vagy $(2, 3)$ a szomszédos tartományok színe. Mivel minden csúcsnál 3 tartomány találkozik G 3-regularitása miatt, ezért 3 különböző színkombináció fog tartozni az egy csúcsra illeszkedő élekhez, mégpedig olyan színkombinációk, amik összesen 3 színből választanak kettő színt. Emiatt a feladat feltétele teljesülni fog.

Megjegyzés: Az állítás megfordítása is igaz. Ha G 2-szeresen összefüggő és 3-reguláris síkgráf, továbbá élkromatikus száma 3, akkor 4 színnel „jól” színezhetőek a síkgráf tartományai.

1.111. Vegyünk fel egy négyzetet, és kössük össze a négyzet középpontját a négyzet összes csúcsával, egyet (A) kivéve. Könnyen látszik, hogy ez a gráf síkbarajzolható, de élkromatikus száma 3-nál nagyobb. Az A csúcs kivételével minden csúcs foka 3. A feladat feltétele szerinti gráfot kapunk tehát, ha vesszük ennek a gráfnak 3 példányát, és a kettő fokú csúcsait egy újonnan hozzávett P csúcshoz kötjük.

7.18. Listaszínezések

1.112. Legyen $G(A, B) = K_{\binom{2k-1}{k}, \binom{2k-1}{k}}$ teljes páros gráf. Minden csúcsához hozzárendelünk egy k -elemű listát, és megmutatjuk, hogy nem színezhető ki a gráf ezekről a listákról. Legyen H egy $2k - 1$ elemű színhalmaz, és rendeljük ennek minden k -elemű részhalmazát egy-egy csúcshoz a páros gráf A és B csúcsoztályban is. Tegyük fel, hogy létezik jó színezés, és nézzük meg, hány színt használ az egyes csúcsoztályokban. Egyrészt ha A -ban vagy B -ben kevesebb mint k színt használna, akkor lenne olyan csúcs, aminek a színlistáján szereplő egyik színt sem választottuk volna ki. Másrészt A -ban és B -ben nem lehetnek megegyező színű csúcsok, hiszen minden él be van húzva a két csúcsoztály között. Emiatt legalább $2k$ színt kellene használnunk, többet mint amennyi rendelkezésre áll, ellentmondás.

Megjegyzés. $G(A, B) = K_{k^k, k}$ teljes páros gráfról is megmutatható, hogy listaszínezési száma nagyobb mint k . Legyen ugyanis B osztályban minden csúcshoz k -féle alapszín közül egynek a k -féle árnyalata a színlistában, míg A osztályban minden csúcs listájába válasszunk minden alapszínből egy-egy árnyalatot úgy, hogy minden színlista legyen különböző. Világos, hogy akárhogy választunk a B -beli csúcsoknak színt, lesz pontosan egy A -beli, amelyiknek a teljes színlistáját felhasználtuk.

1.113. G síkgráfot majdnem háromszögeltnek mondjuk, ha a külső tartománytól eltekintve minden tartománya háromszög. Világos, hogy elég az állítást ilyen gráfokra igazolni, hiszen akkor ezek részgráfjaira is igaz lesz az állítás.

Indukcióval igazoljuk a feladatbelinél erősebb alábbi tételt: Létezik jó színezés akkor is, ha a C külső tartomány két kijelölt, szomszédos x, y csúcsának színe rögzített (és különböző), a külső tartomány további csúcsain a színlisták hossza 3, a többi csúcsra pedig 5 hosszú a színlista.

$n = 3$ -ra az állítás magától értetődő. Általános esetben, ha $|V(G)| = n$ és kisebb csúcsszámú gráfokra az állítás igaz, tekintsük a külső tartományon mint körön x -nek y -től különböző x' szomszédját. Legyen x' -nek x -től különböző szomszédja a körön z . Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy x' -ből vezet-e él a külső tartomány x -től és z -től különböző pontjai egyikébe. Első esetben, ha létezik ilyen $x'y'$ húr, akkor a következő eljárást követjük. Alkalmazzuk az indukciós eljárást arra a G_1 gráfra, amit a külső tartomány x -et tartalmazó, $x'y'$ által levágott fele határoz meg. Így x' -höz és y' -höz különböző színt rendeltünk hozzá, így alkalmazhatjuk ezután az indukciós feltevést a G_2 gráfra, amit a külső tartomány x -et nem tartalmazó, $x'y'$ által levágott fele határoz meg. Ezzel a gráf egy jó színezését kapjuk.

Második esetben hagyjuk el x' -t a gráfból, és az így kapott gráf legyen G' . Világos, hogy a majdnem háromszögeltségi tulajdonság miatt x' minden szomszédja G' külső tartományára kerül. Válasszunk ki két színt, c_1 -et és c_2 -t az x' színlistájáról úgy, hogy az x színétől különbözőek legyenek. G' -nek a külső tartományra kerülő új pontjainak színlistájáról töröljük ezt a két színt. Így is fennáll, hogy a külső tartományon minden színlista legalább 3-elemű, kivéve x és y esetén. Indukció szerint G' -nek létezik jó színezése. Ezt ki tudjuk egészíteni G jó színezésére, hiszen a c_1 és c_2 szín x' szomszédjainak új színlistái közül csak z színlistáján szerepelhet, emiatt x' -nek tudunk jó színt választani.

7.19. Perfekt gráfok

1.114. Válasszunk egy gyökeret a fában, és színezzük a fa csúcsait a gyökértől való távolság szerint. Minden részfához rendeljük hozzá a gyökérhez

legközelebbi csúcsát, legyenek ezek a részfák gyökerei. (Ez a hozzárendelés egyértelmű.) Vegyük azt a v csúcsot, ami részfának gyökere, és az ilyenek közt a lehető legtávolabb van a gyökértől. A v csúcs minden részfában benne lesz. Valóban, ha v -t nem tartalmazná egy részfa, akkor semelyik csúcsot nem tartalmazhatja, amelyet v a gyökértől elválaszt, így a v gyökerű részfától diszjunkt részfa lenne.

1.115. Tekintsük az $I(a_i, b_i)$ intervallumokat, és az $x \leq b_i$ egyenlőtlenségeket teljesítő x számok közül válasszuk ki a legnagyobbat, legyen ez x_1 . A definíció szerint lesz olyan J_1 intervallum az I_i -k közt, aminek éppen x_1 a jobb végpontja. Hagyjuk el most az x_1 -et tartalmazó intervallumokat. Ismételjük a lépést: $\{x_1, J_1\}, \dots, \{x_k, J_k\}$ kiválasztása után a megmaradt intervallumokon keressük azt a legnagyobb x_{k+1} számot, ami nem haladja meg a jobb végpontok egyikét sem, és legyen J_{k+1} egy x_{k+1} jobb végpontú intervallum a fennmaradók közül, végül hagyjuk el azon intervallumokat, amiket x_{k+1} lefog. Ha végül az így definiált $\{x_i | 1 \leq i \leq m\}$ pontrendszerünk az összes intervallumot lefogta, akkor egyben kimutattunk m darab J_i intervallumot is, amik a definíció értelmében diszjunktak. Tehát egy minimális lefogó rendszert találtunk. Ezzel a (b) által megkívánt eljárást megadtuk. Másrészt az eljárás értelmében 100 lépés után már nem maradhat lefogatlan intervallum. Valóban, ha $I_0 = (a_0, b_0)$ ilyen lenne, $a_0 > x_{100}$ esetén kimutatnánk $k+1 = 101$ diszjunkt intervallumot, $x_i < a_0 \leq b_0 < x_{i+1}$ vagy $b_0 < x_1$ az eljárásnak mond ellent: x_{i+1} , illetve x_1 definíciójának.

1.116. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ definíció szerint. Feltehetjük, hogy G -ben nincs izolált csúcs, hiszen egy izolált csúcs hozzávétele mindkét oldalt 1-gyel növeli. Belátjuk, hogy ekkor $\chi(\overline{G}) = \rho(G)$, azaz a lefogó élek minimális számával egyezik meg. Ekkor König tételére hivatkozva készen vagyunk. A színosztályok páros gráf komplementerében legfeljebb 2-eleműek, és éppen a páros gráf éleinek felelnek meg. Mivel minden csúcsra illeszkedik él $\overline{G}$ -ben, a színosztályok száma éppen akkor lesz minimális, ha egy maximális független párosítást egészítünk ki egyelemű ponthalmazokkal, ami éppen a minimális lefogó élhalmaznak felel meg.

Megjegyzés: mivel minden páros gráf részgráfja is páros, ebből következik, hogy minden páros gráf komplementere is perfekt.

1.117. (a) Az intervallumok számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk, az $n = 1$ triviális eset. Vegyük az 1.115 megoldásában definiált $J_1(a_1, b_1)$ intervallumnak megfelelő csúcsot, és hagyjuk el a gráfból. Az így kapott G' gráfról feltehetjük, hogy $\chi(G') = \omega(G')$. Ha J_1 -et hozzávéve a rendszerhez nem növekszik a klikkszám, az azt jelenti, hogy b_1 -et legfeljebb $\omega(G') - 1$ másik intervallum tartalmazta, így a J_1 -nek megfelelő csúcshoz, melynek foka legfeljebb $\omega(G') - 1$, hozzá tudunk rendelni olyan színt, amit használtunk G' színezésében, de nem használtunk a csúcs egyik szomszédján sem.

(b) $\omega(\overline{G})$ éppen a legnagyobb, páronként diszjunkt intervallumok rendszerének elemszáma. Az 1.115 megoldásában azt igazoltuk, hogy a lefogó pontthalmaz méretének minimuma éppen a páronként diszjunkt intervallumok számának maximuma. Emiatt van egy $\omega(\overline{G})$ elemszámú lefogó pontrendszer. Rendeljünk a lefogó pontokhoz egy-egy színt, és osszuk be az intervallumokat az egyik őket lefogó ponthoz. Ez a G gráf komplementerének jó színezését adja, amiből az állítás következik.

(c) A kör csúcsaiból válasszuk azt, amelyhez tartozó $I(a, b)$ intervallum jobb végpontja a legkisebb. A definíció szerint a kiválasztott csúcs mindkét körbeli szomszédjához tartozó intervallum tartalmazza ekkor b -t, így a két szomszéd között is vezet él.

1.118. Rajzoljunk le egy Petersen-gráfot, és hagyjunk el két élet belőle, melyek távolsága 2. Legyen ez a gráf $\overline{G}$. Világos, hogy $\overline{G}$ -re a klikkszám 2, ugyanakkor a kromatikus szám pedig 3, mert a gráf tartalmaz továbbra is C_5 -öt. Másrészt, G -ben 5 színnel lehet jól színezni (a színosztályok feleljenek meg egy 5-elemű független élhalmaz pontpárjainak a Petersen-gráfban, ami a letörölt éleket nem tartalmazza), és van 5 nagyságú klikk is, mégpedig olyan, melyben négy csúcs épp a letörölt élpár végpontjai. Erre a G gráfra a feltétel teljesül.

1.119. Elég belátni, hogy $\chi(G) \leq \omega(G)$. Legyen r a T fa gyökere, és színtezzük a fa csúcsait r -től való távolságuk szerint. Rendeljük hozzá a T_i részfákhoz az r -hez legközelebbi csúcsukat, legyen ez r_i , és rendezzük a részfákat gyökerük r -től való távolsága szerint csökkenő sorrendbe. Legyen m a páronként diszjunkt részfák maximális száma, ami a gráf definíciója szerint $\omega(G)$. Belátjuk indukcióval, hogy $\omega(G) = m$ színosztályba sorolhatóak a pontok úgy, hogy az egy jó színezését adja G -nek. $m = 1$ -re az állítás triviális. Általánosságban vegyük első színosztálynak az r_1 -et tartalmazó részfákat. Ezek nyilván független halmazt alkotnak, mi több, az r_1 -et nem tartalmazó többi részfa olyan, hogy legfeljebb $m - 1$ lehet a páronként diszjunkt részfák száma közöttük, hiszen T_1 a sorrend miatt diszjunkt tőlük. Így indukciós feltételünk szerint a többi részfának megfelelő csúcs $m - 1$ független halmazba sorolható, amit igazolni akartunk.

Megjegyzés: Lényegében a 1.114 és a 1.115 állításának egy általánosítását igazoltuk: Ha egy T fa részfarendszeréből legfeljebb m diszjunkt részfat választathatunk ki, akkor a részfák lefoghatóak m csúccsal.

7.20. Sorrend szerinti színezések

1.120. Tekintsük G egy jó színezését $\chi(G)$ színnel, és tekintsük a csúcsoknak egy olyan sorrendjét, amelyikben az előbbi színezés színosztályainak csúcsai

mind egy-egy blokkot alkotnak a sorrendben. Így a sorrend szerint χ darab független halmaz egymásutánja lesz a sorrend. Ha eszerint színezzük, a sorban k színosztály minden csúcsára teljesül indukció szerint, hogy k -nál nagyobb indexű színt nem rendelhetünk hozzá a színezésben. Valóban, hiszen eddig felsorolt szomszédai csak korábbi színosztályokhoz tartozhattak, amelyekhez az indukció szerint kisebb indexű szín lehetett csak hozzárendelve, így a k -adik szín szabad.

1.121. Tekintsünk egy teljes párosítást n éllel, és számozzuk be a csúcsokat úgy, hogy a párosításélek végpontjai szomszédosak legyenek. Vegyük azt a G páros gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy tekintjük a páros és a páratlan indexű csúcsok osztályát és az általuk feszített teljes páros gráfot, és kihagyjuk a teljes párosításunk éleit. Ekkor a sorrend szerinti mohó színezés a teljes páros gráfból hiányzó élekhez rendel egy-egy színt, vagyis a színosztályok kételeműek lesznek, emiatt a színek száma n lesz.

8. fejezet

Leszámlálási feladatok – megoldások

8.1. Bevezető feladatok

2.1. Megoldás:

$$\frac{10!}{2!3!2!1!}$$

Ugyanis a 10 betűt $10!$ -féleképpen állíthatjuk sorba, ekkor azonban megkülönböztettük az M betűket, mintha M_1 és M_2 betűk lennének. Hasonlóan a három A betűt A_1, A_2, A_3 betűkként vettük figyelembe. Mivel azonban ezek nem különböznek, ezen betűk sorrendjeivel le kell osztanunk, pl. három A betű $3!$ sorrendje valójában csak 1-nek számít. Hasonlóan az M -k és T -k sorrendje sem számít.

2.2. Hétjegyű telefonszámból 10^7 van. Olyan, amiben nincs két szomszédos jegy, melyek megegyeznek: $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 10 \cdot 9^6$, hiszen ha az első néhány számjegy megvan, akkor a következő számjegynek csak az utolsótól kell eltérnie, így 9-féle lehet (ha ez a számjegy nem az első). Tehát az ilyen telefonszámok száma $10^7 - 10 \cdot 9^6$.

2.3. (a) Háromszor kell lefelé lépniünk és 4-szer jobbra, így az utak száma $\binom{7}{3} = 35$.

(b) Az utak száma $(2 \cdot 2 + 1)^2 = 25$. Valóban, az öt pont közül a középsőt mindenképp érintenünk kell. A-ból ide ötféle módon juthatunk el és szintén ötféle módon juthatunk innen tovább B-be. Tehát az utak keresett száma $5 \cdot 5 = 25$.

(c) Az A pontban kezdünk, ezt úgy tekinthetjük, hogy ide egyféleképpen juthatunk. Szintén egyféleképpen juthatunk a bal oldali görbe legalsó pontjára. Ezután minden pontba annyi féleképpen juthatunk, mint a bal alsó és a jobb alsó szomszédjába összesen. Tehát az eljutások száma az egyes elágazási pontokba rendre 1, 2, 3, 5, 8, majd B-be 13 féleképpen juthatunk el.

2.4. (a) Összesen $9 \cdot 10^6$ szám van. Azon számok száma, amelyekben nincs két azonos számjegy $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Így $9 \cdot 10^6 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ ilyen szám van.

(b) Vegyünk egy számot, amiben van pontosan két azonos számjegy, ezután töröljük a hátrébb állót. Így egy olyan 6 jegyű számot kapunk amiben minden jegy különbözik. (Az sem baj, ha a 0-ból volt kettő, mert a hátsót töröltük ki.) Továbbá a két megegyező jegy $\binom{7}{2}$ helyen lehetett. Így az ilyen számok száma $\binom{7}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Azt az olvasóra bízunk, hogy a két jegy helyének ismerete valamint a kapott 6 jegyű szám ismerete bijekcióban áll az eredeti számokkal.

2.5. Az $n + 5$ ember $(n + 5)!$ sorrendben állhat sorba. Most számoljuk meg, ebből hány rossz, vagyis hány olyan van, amiben nincs két egymás mellett álló fiú. Az n lány $n!$ sorrendben állhat sorba. Az elején, a végén, köztük van $n + 1$ hely, itt állnak a fiúk vagyis $\binom{n+1}{5}$ -féleképpen választhatjuk ki a helyüket és 5!-féleképpen állhatnak be az 5 helyre. Tehát $\binom{n+1}{5} n! 5!$ ilyen sorrend van. Tehát a feladatnak megfelelő sorrendek száma

$$(n + 5)! - \binom{n + 1}{5} n! 5!$$

2.6. Először az első kérdéssel foglalkozzunk. A feladatot úgy is elképzelhetjük, hogy leteszünk 12 pontot, majd közéjük teszünk 4 elválasztó részt, így éppen 5 részre bontottuk a 12 pontot, ami a 12 számnak egy felbontását adja meg. Pl. $** | *** | **** | * | **$ megfelel $2 + 3 + 4 + 1 + 2 = 12$ -nek. A 12 pont között 11 hely van, ebből kell kiválasztanunk a 4 | helyet, így $\binom{11}{4}$ ilyen felbontás van.

Ha lehet 0 is az összeadandók között, akkor már állhat | az elején is, sőt két | is állhat egymás mellett. Valójában ekkor a $12 * \text{ és } 4 |$ jel bármely sorozata megad egy felbontást, így a felbontások száma $\binom{16}{4}$.

Megjegyzés: A két rész egymásra is visszavezethető: a második kérdésnél úgy is dönthetünk, hogy a 17-t bontjuk fel 5 pozitív szám összegére, és a végén minden számból levonunk 1-et.

2.7. Vegyünk egy feladatnak megfelelő számot, írjunk eléje egy 1-est és utána egy 9-est, majd két szomszédos jegy alá írjuk a különbségüket, így a 8-at

felbontottuk 6 nemnegatív szám összegére, amelyek sorrendje számít. Ezt a 2.6 feladat megoldása szerint $\binom{13}{5}$ -féleképpen lehet megtenni. (Pl. 13348-ből először 1133489 majd $0 + 2 + 0 + 1 + 4 + 1 = 8$ lesz.)

2.8. Ezt a 2.6 feladat megoldásához hasonlóan az első esetben $\binom{21}{5}$, a második esetben $\binom{15}{5}$ -féleképpen lehet megtenni.

2.9. Ez valójában nem más mintha a 999-et felbontanánk 4 számra, majd az elsőhöz hozzáadnánk 1-et. Az így kapott 4 szám lesz a változók kitevőiben. Ezt $\binom{1002}{3}$ -féleképpen lehet megtenni.

2.10. A 2.7 feladat megoldása szerint eljárva a válasz $\binom{n+m-1}{m}$ -nek adódik.

2.11. Legyen a_k azon házak száma, amelyekben pontosan k ember él. Ekkor $a_k = d_k - d_{k+1}$ és

$$\sum_i c_i^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (d_k - d_{k+1})k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(k^2 - (k-1)^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)d_k.$$

2.12. Vegyük észre, hogy a konvex n -szög bármely 4 pontja meghatároz két metsző átlót, így a metszéspontok száma $\binom{n}{4}$, ha nincsen olyan pont, amelyen 3 átló is átmegy.

Ennyi lehet is, vagyis megadható olyan konvex n -szög, melyben nem megy át 3 átló 1 ponton: ezt n -re vonatkozó indukcióval lehet bizonyítani. Az állítás $n = 3$ -ra triviális, és ha már van egy konvex n -szögünk, akkor az $(n+1)$ -edik pontot először válasszuk meg úgy, hogy konvex $(n+1)$ -szöget kapjunk, majd ha ráesett az előző néhány pont, illetve metszéspont által meghatározott egyenes valamelyikére, akkor mozgassuk el egy picit az $(n+1)$ -edik pontot. Az így kapott konvex $n+1$ -szög már megfelel a feltételeknek.

2.13. Jelölje $s(n)$ annak a számnak a lehetséges legnagyobb értékét, ahány részre n egyenes feloszthatja a síkot. Vegyük észre, hogy mikor behúzzuk az n -edik egyenest, akkor az előző $n-1$ egyenes felosztja ezt az n -edik egyenest legfeljebb n részre, ezek a részek pedig szétvágnak egy-egy tartományt. Így $s(n) = s(n-1) + n$. Az $s(1) = 2$ kezdeti feltételből kapjuk, hogy $s(n) = 1 + \binom{n+1}{2}$. A fentiekből azt is láthatjuk, hogy ha nincs két párhuzamos egyenes és három egy ponton átmenő egyenes, akkor ezek éppen $1 + \binom{n+1}{2}$ síkrészt határoznak meg.

8.2. Szita

2.14. (a) Legyen A_i az i -vel osztható számok halmaza 300-ig. Ekkor $|A_2| = 300/2 = 150$, $|A_3| = 300/3 = 100$. Ha ezeket levonjuk 300-ból, akkor kétszer vontuk le a 6-tal osztható elemek számát, amelyekből $300/6 = 50$ van. Így azon számok száma, melyek nem oszthatóak se 2-vel, se 3-mal:

$$300 - 300/2 - 300/3 + 300/6 = 100.$$

(b) Legyen megint A_i az i -vel osztható számok halmaza 300-ig. Ekkor $|A_2| = 300/2 = 150$, $|A_3| = 300/3 = 100$, $A_5 = 300/5 = 60$. Ha ezeket összeadjuk, akkor 2-szer számoltuk a 6-tal, 10-zel és 15-tel osztható számokat és háromszor a 30-cal oszthatóakat.

Azonban a 6-tal, 10-zel és 15-tel osztható számok számát levonva, a 30-cal osztható számok számát pontosan háromszor vontuk le, őket így egyszer sem számoltuk. Tehát azon számok száma, melyek 2, 3 vagy 5 valamelyikével oszthatóak:

$$300/2 + 300/3 + 300/5 - 300/6 - 300/10 - 300/15 + 300/30 = 220.$$

2.15. Legyen V az összes olyan 7-jegyű szám, melyek mindegyik jegye 1, 2 vagy 3. Legyen A_i azon számok halmaza, melyek kihagyják az i jegyet. Ekkor azon 7-jegyű számok, melyekben az 1, 2, 3 mindegyike előfordul:

$$|V \setminus \bigcup_{i=1}^3 A_i| = |V| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3 - 0.$$

2.16. A 2.14 és 2.15 feladatok megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy azon diákok száma, akik egyik tantárgyat sem szeretik:

$$30 - 12 - 14 - 13 + 5 + 4 + 7 - 3 = 4.$$

2.17. (a) Vegyük észre, hogy egy adott x -re $(1 - v_1(x))(1 - v_2(x)) \dots (1 - v_k(x))$ pontosan akkor 1 ha x nincs egyetlen A_i -ben sem, egyébként pedig 0. Tehát ezt x -re összegezve éppen $V \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ halmaz elemszámát kapjuk.

(b) A $v_{i_1}(x)v_{i_2}(x) \dots v_{i_k}(x)$ pontosan akkor 1 ha x benne van az $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ halmazok mindegyikében, egyébként pedig 0. Tehát ezt x -re összegezve éppen az $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ halmaz elemszámát kapjuk.

(c) Ez egyszerűen következik az (a) és (b) részből, mert

$$(1 - v_1(x))(1 - v_2(x)) \dots (1 - v_n(x)) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} v_{i_1}(x) v_{i_2}(x) \dots v_{i_k}(x).$$

2.18. Legyen V az összes permutációk halmaza. Legyen A_i azon permutációk halmaza, melyekben az i elem fixpont. Ekkor $|V| = n!$ és

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)!,$$

mert k elem képe önmaga, a többi szabadon permutálhatjuk. Tehát a fixpont nélküli permutációk száma

$$\begin{aligned} |V \setminus \cup_{i=1}^n A_i| &= |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Meg lehet mutatni, hogy ez $\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor$.

2.19. Legyen V az x -nél kisebb pozitív egészek halmaza. Legyen $p \leq \sqrt{x}$ prím és

$$A_p = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq x, p \mid n\}.$$

Ekkor azon V -beli elemek, amelyek egyetlen $\sqrt{x}$ -nél kisebb vagy egyenlő prímmel sem oszthatóak, éppen az x és $\sqrt{x}$ közötti prímek valamint az 1. Valóban, ha van egy x -nél kisebb összetett számunk, akkor az felbomlik legalább két prím szorzatára, így azok valamelyike legfeljebb $\sqrt{x}$. Vegyük észre, hogy

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \lfloor \frac{x}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \rfloor = \lfloor \frac{x}{d} \rfloor,$$

ahol $d = p_{i_1} \dots p_{i_k}$ négyzetmentes szám, mert a prímek különbözőek voltak. Tehát

$$\begin{aligned} 1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) &= |V \setminus \cup_{p \leq \sqrt{x}} A_p| = \\ &= |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \pi(\sqrt{x})} |A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}}| = \\ &= \sum_{d \mid \prod_{p \leq \sqrt{x}} p} \mu(d) \lfloor \frac{x}{d} \rfloor, \end{aligned}$$

hiszen $\mu(d)$ pontosan akkor 1, ha d páros sok különböző prím szorzata, -1 , ha d páratlan sok különböző prím szorzata és 0, ha nem négyzetmentes.

2.20. Számoljuk meg a szürjektív $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvényeket. Ebből egyrészt $n!$ darab van, hiszen ezek éppen az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációi. Most megadunk ugyanerre egy szitaformulát. Legyen V az összes $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvény halmaza, A_i pedig azon függvények halmaza, melyek nem veszik fel az i értéket. Ekkor a szürjektív függvények halmaza éppen $V \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$. Az

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)^n,$$

hiszen k érték kivételével mindent felvehetnek ezen függvények. Tehát

$$\begin{aligned} n! = |V \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| &= |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^n. \end{aligned}$$

2.21. Számoljuk meg, hogy az $\{1, 2, \dots, n + m\}$ halmazból hányféleképpen választható ki k elem, ha az $1, 2, \dots, n$ elemek egyikét sem választjuk. Ez persze $\binom{m}{k}$, hiszen valójában csak m elemből választunk ki k darabot. Másrészt legyen V az összes k elemű részhalmaza az $\{1, 2, \dots, n + m\}$ halmaznak. Legyen A_i ($i = 1, \dots, n$) azon k -elemű részhalmazok halmaza, melyek tartalmazzák i -t. Ekkor

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}| = \binom{n + m - \ell}{k - \ell}$$

hiszen rögzített ℓ elemet be kell raknunk a k -elemű halmazba, a többi szabadon választhatjuk. Tehát

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} = |V \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| &= |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \\ &= \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \binom{n + m - \ell}{k - \ell}. \end{aligned}$$

2.22. Számoljuk meg, hogy hányféleképpen lehet egy m elemű halmazt lefedni d darab s elemű halmaz uniójával. Mivel $m > sd$, így a válasz természetesen 0. Most adunk erre egy leszámplálást szitával. Legyen V az összes parciális fedések halmaza d darab s elemű halmazzal. Legyenek A_i azon parciális fedések, melyekben nincs benne az i elem. Ekkor

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{m - k}{s}^d,$$

hiszen $m - k$ elemből kell d darab s elemű halmazt választani. Tehát

$$\begin{aligned} 0 &= |V \setminus \cup_{i=1}^n A_i| = |V| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \\ &= \sum_{k=0}^{m-s} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{s}^d. \end{aligned}$$

2.23. Legyen C az összes színezések halmaza λ színnel (vagyis nem csak a jó színezéseké). Legyen A_e ($e \in E$) azon színezések halmaza, melyben az e él két végpontja azonos színű. Ekkor

$$|\cap_{e \in T} A_e| = \lambda^{c(T)},$$

ugyanis a T -beli élek által meghatározott komponenseket egy színnel kell színeznünk, de a különböző komponensek színei lehetnek akár azonosak, akár különbözőek. Tehát

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= |C \setminus \cup_{e \in E} A_e| = \sum_{T \subseteq E(G)} (-1)^{|T|} |\cap_{e \in T} A_e| = \\ &= \sum_{T \subseteq E(G)} (-1)^{|T|} \lambda^{c(T)}. \end{aligned}$$

2.24. Számoljuk meg, hogy egy adott $x \in V$ elemet hányszor számolunk meg a különböző kifejezésekben. Ha x nincs benne egyetlen A_i -ben sem, akkor pontosan 1-szer számoljuk mindhárom kifejezésben. Ha x pontosan k darab A_i -ben van benne, ahol $k \geq 1$, akkor $V \setminus \cup_{i=1}^n A_i$ -ben nem számoljuk, míg a másik két kifejezésben éppen

$$\sum_{j=0}^{2t-1} (-1)^j \binom{k}{j} \text{ illetve } \sum_{j=0}^{2t} (-1)^j \binom{k}{j}$$

súllyal számoljuk. Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{k}{j} &= \sum_{j=0}^r (-1)^j \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) = \\ &= (-1)^r \binom{k-1}{r} \end{aligned}$$

negatív, ha $r = 2t - 1$, és pozitív, ha $r = 2t$. Tehát valóban

$$|V| + \sum_{j=1}^{2t-1} (-1)^j \sigma_j \leq |V \setminus \cup_{i=1}^n A_i| \leq |V| + \sum_{j=1}^{2t} (-1)^j \sigma_j.$$

2.25. Tegyük fel, hogy egy elem pontosan t halmazban van benne, ekkor ez az elem éppen

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{k} \binom{t}{j}$$

súllyal szerepel a

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{k} \sigma_j$$

összegben. Ha $t < k$, akkor a fenti összeg 0. Ha $t = k$, akkor éppen 1. Ha $t > k$ akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{k} \binom{t}{j} &= \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{t}{k} \binom{t-k}{t-j} = \\ &= \binom{t}{k} \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{t-k}{t-j} = 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{k} \sigma_j$$

valóban azokat az elemeket számolja pontosan 1-szer, amelyek pontosan k darab halmazban vannak benne.

2.26. Tudjuk a 2.25 feladatból, hogy azon elemek száma, amelyek pontosan t darab halmazban vannak, éppen

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{t} \sigma_j.$$

Ha ezt összegezzük 0-tól k -ig, akkor megkapjuk azon elemeket, amelyek legfeljebb k halmazban vannak benne. Ebben az összegben σ_j együtthatója:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^k (-1)^{t+j} \binom{j}{t} &= \sum_{t=k}^n (-1)^{t+j} \left(\binom{j-1}{t-1} + \binom{j-1}{t} \right) = \\ &= (-1)^{j+k} \binom{j-1}{k} \end{aligned}$$

ha $j \leq 1$ és 1 ha $j = 0$. Tehát

$$|T'_k| = \sigma_0 + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k} \sigma_j.$$

2.27. Tudjuk a 2.25 feladatból, hogy azon elemek száma, amelyek pontosan t darab halmazban vannak éppen

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j}{t} \sigma_j.$$

Ha ezt összegezzük k -től n -ig akkor megkapjuk azon elemeket amelyek leg-
alább k halmazban vannak benne. Ebben az összegben σ_j együtthatója:

$$\begin{aligned} \sum_{t=k}^n (-1)^{t+j} \binom{j}{t} &= \sum_{t=k}^n (-1)^{t+j} \left(\binom{j-1}{t-1} + \binom{j-1}{t} \right) = \\ &= (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k-1} + (-1)^{n+j} \binom{j-1}{n} = (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $j \leq n$ azaz $j-1 < n$. Tehát

$$|T''_k| = \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} \binom{j-1}{k-1} \sigma_j.$$

2.28. (a) A 2.25 és 2.18 feladatok megoldásait felhasználva ez a szám éppen

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j+k} \binom{j}{k} \binom{n}{j} (n-j)! = \frac{n!}{k!} \sum_{j=k}^n \frac{(-1)^{j+k}}{(j-k)!} = \frac{n!}{k!} \sum_{t=0}^{n-k} \frac{(-1)^t}{t!}.$$

(b) A 2.26 és 2.18 feladatok megoldásait felhasználva ez a szám éppen:

$$\begin{aligned} n! + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{j+k} \binom{j-1}{k} \binom{n}{j} (n-j)! &= \\ &= n! + \frac{n!}{k!} \sum_{j=k+1}^n \frac{(-1)^{j+k}}{j \cdot (j-1-k)!} = \\ &= n! + \frac{n!}{k!} \sum_{t=0}^{n-k-1} \frac{(-1)^{t+1}}{(t+k+1) \cdot t!}. \end{aligned}$$

(c) A 2.27 és 2.18 feladatok megoldásait felhasználva ez a szám éppen

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n (-1)^{j+k} \binom{j-1}{k-1} \binom{n}{j} (n-j)! &= \frac{n!}{(k-1)!} \sum_{j=k}^n \frac{(-1)^{j+k}}{j \cdot (j-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!} \sum_{t=0}^{n-k} \frac{(-1)^t}{(t+k) \cdot t!}. \end{aligned}$$

2.29. Könnyen megsejthető és indukcióval bizonyítható, hogy az n -edik differenciasorozat k -adik eleme éppen

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_{i+k-1}.$$

2.30. (a) Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} P_k(x+1) - P_k(x) &= (x+1)x \dots (x-k+2) - x(x-1) \dots (x-k+1) = \\ &= kx(x-1) \dots (x-k+2) = kP_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Így az m -edik differenciasorozatban a $k(k-1) \dots (k-m+1)P_m(j)$ számok fognak szerepelni.

(b) Mivel a $P_j(x)$ polinomok bázist alkotnak, így tetszőleges k -adfokú $P(x)$ polinomot felírhatunk $\sum_{j=0}^k a_j P_j(x)$ alakban, ahol a_k a P főegyütthatója. Az (a) részből látjuk, hogy a k -edik differenciasorozat konstans $a_k k!$ lesz, minden más tag eltűnik.

2.31. Mindhárom azonosságot meg lehet oldani a 2.20 feladat mintájára (sőt az első azonosság éppen a 2.20 feladat). Most azonban megmutatjuk, hogy az 2.29 és 2.30 feladatok hogyan adják ki ezt az eredményt. A három azonosságban a $P_1(x) = x^n$, $P_2(x) = x^{n-1}$, $P_3(x) = x^{n+1}$ polinomokhoz tartozó sorozatok n -edik differenciasorozatának egy-egy elemét kell meghatározni. Az első esetben ez éppen $a_n \cdot n! = n!$. A második esetben ez a szám 0, hiszen egy $n-1$ -edfokú polinom n -edik differenciasorozata azonosan eltűnik.

A harmadik esetben egy lineáris polinom lesz az n -edik differencia sorozat. Mivel

$$x^{n+1} = x(x-1) \dots (x-n) + \frac{n(n+1)}{2} x(x-1) \dots (x-n+1) + Q_{n-1}(x),$$

ahol $\deg Q(x) \leq n-1$, így az n -edik differenciasorozat $(n+1)!x + \frac{n(n+1)}{2} \cdot n!$, és ez van $x=0$ -ban kiértékelve.

2.32.

$$\begin{aligned} \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} \binom{r-jt}{k} (r-jt)^{-1} &= \\ = \frac{1}{k!} \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} (r-jt-1) \dots (r-jt-k+1) &= \\ = \frac{1}{k!} \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} P_{r,t}(j). \end{aligned}$$

Itt $P_{r,t}$ egy $k-1$ -edfokú polinom, ennek a k -adik differenciasorozata azonosan 0 teljesen függetlenül attól, hogy mi a polinom valójában!

8.3. Binomiális együtthatók és generátorfüggvények

2.33. (a) Számoljuk meg egy n elemű halmaz összes részhalmazát! Ez egyrészt 2^n , hiszen minden elemről külön-külön eldöntjük, hogy benne legyen vagy sem. Másrészt a k elemű halmazokból éppen $\binom{n}{k}$ van, így ezt $k=0, 1, \dots, n$ -re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

(b) Számoljuk meg a következő halmaz elemszámát kétféleképpen:

$$\{(A, B) \mid A \subset B, |A| = k, |B| = m, B \subset \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Először B -t $\binom{n}{m}$ féleképpen választhatjuk. Majd B -ből A -t $\binom{m}{k}$ -féleképpen választhatjuk. Tehát a halmaz elemszáma

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k}.$$

Másrészt úgy is számolhatunk, hogy először kiválasztjuk A -t $\binom{n}{k}$ -féleképpen, majd a maradék $n-k$ elemből kiválasztjuk azt az $m-k$ elemet, amelyeket

hozzávéve A -hoz megkapjuk B -t, ez utóbbit $\binom{n-k}{m-k}$ -féleképpen tehetjük meg. Tehát a halmaz elemszáma

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

Ezt összevetve korábbi eredményünkkel kapjuk, hogy

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

(c) Határozzuk meg a következő halmaz elemszámát kétféleképpen:

$$\{(x, A) \mid x \in A, A \subset \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Ha az $|A|$ halmaznak k eleme van, akkor A -t éppen $\binom{n}{k}$ -féleképpen választ-hatjuk. Majd A -ból x -et k -féleképpen választhatjuk. Ha ezt minden k -ra összegezzük, akkor kapjuk, hogy az (x, A) párok fenti halmazának elemszáma

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Másrészt úgy is számolhatunk, hogy először kiválasztjuk x -et n -féleképpen, majd a maradék $n-1$ elemből kiválasztunk néhányat még, hogy megkapjuk A -t, így a fenti halmaz elemszáma $n2^{n-1}$. Tehát

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(d) Legyen egy társaságban n férfi és m nő, belőlük akarunk kiválasztani r embert. Ezt meg lehet tenni $\binom{n+m}{r}$ -féleképpen. Másrészt úgy is számolhatunk, hogy kiválasztunk k férfit, majd hozzáválasztunk $r-k$ nőt. Ezt $\binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$ -féleképpen tehetjük meg. Ezt minden k -ra összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

(e) Válasszunk ki az $1, 2, \dots, n+1$ számból $s+t+1$ darabot. Ezt meg lehet tenni $\binom{n+1}{s+t+1}$ -féleképpen. Másrészt úgy is számolhatunk, hogy kiválasztjuk először az $s+1$ legnagyobb számot. Ha ez a $k+1$ -es szám, akkor az első k számból kell még kiválasztani s darabot és az utolsó $n-k$ számból t darabot.

Ezt $\binom{k}{s}\binom{n-k}{t}$ -féleképpen tehetjük meg. Ezt minden k -ra összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_k \binom{k}{s} \binom{n-k}{t} = \binom{n+1}{s+t+1}.$$

2.34.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) = \\ &= \sum_{k=0}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

2.35.

$$\sum_{t=k}^n \binom{t}{k} = \sum_{t=k}^n \binom{t}{k} \binom{n-t}{0} = \binom{n+1}{k+1}.$$

A második lépésben felhasználtuk 2.33 feladat (e) részét.

2.36.

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} &= \sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{s-(n+k)} = \\ &= \binom{r+s}{s-n} = \binom{r+s}{r+n}. \end{aligned}$$

A második lépésben felhasználtuk 2.33 feladat (d) részét.

2.37.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \binom{m}{k} &= \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} \binom{m}{k} = \\ &= n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{m}{m-k} = n \binom{n+m-1}{m}. \end{aligned}$$

A harmadik lépésben felhasználtuk 2.33 feladat (d) részét.

2.38.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

A második lépésben felhasználtuk 2.33 feladat (d) részét.

2.39. (a) Vegyük észre, hogy

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-k}.$$

Így

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \sum_k (-1)^k \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-k} = \\ &= \binom{n}{m} \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{n-k} = 0. \end{aligned}$$

Azt is látjuk, hogy ha $n = m$, akkor ez az összeg $(-1)^n$.

(b) Az (a) rész szerint az inverzben az i -edik sor j -edik oszlopában levő elem $(-1)^{i+j} \binom{i-1}{j-1}$.

2.40. (a) A két oldalon az x^r együtthatóját összehasonlítva megkapjuk a 2.33 feladat (d) részét:

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

(b) A két oldalon az x^{r-1} együtthatóját összehasonlítva kapjuk, hogy

$$r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}.$$

2.41. (a) Ha $G(x) = \frac{F(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, akkor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

és a Cauchy-szorzás szabályából adódik, hogy

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

(b) Az (a) részből és indukcióval következik, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n-1} x^{k+1-n}.$$

Megjegyzés: Könnyebb megjegyezni a

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

összefüggést.

(c) Az $x^{t+n+m-1}$ együtthatóját összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\sum_k \binom{k}{n-1} \binom{t-k}{m-1} = \binom{t+1}{n+m-1}.$$

Ez éppen a 2.33 feladat (e) részével ekvivalens.

2.42. Az általános binomiális tétel szerint

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n.$$

Itt

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} (-4)^n &= \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2) \cdots (1/2 - n)}{n!} (-1)^n 4^n = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} 2^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Tehát

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Megjegyzés: Ezt az eredményt le lehet vezetni a Catalan-számok generátorfüggvényéből is, amit elemi módon meg lehet kapni.

(b) Használjuk fel az (a) rész eredményét:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \right)^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.$$

Az x^n együtthatóját összehasonlítva a két oldalon éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

2.43.

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

2.44. Legyen $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ és $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = b_n$$

azzal ekvivalens, hogy $A(x)e^x = B(x)$. Tehát $A(x) = e^{-x}B(x)$, ahonnan kapjuk, hogy

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k.$$

2.45.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x^{i^2} + x^{i^2+1} + x^{i^2+2} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor x^n.$$

2.46.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^{jk} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \mid n} b_k \right) x^n.$$

Tehát

$$a_n = \sum_{k \mid n} b_k.$$

2.47. (a) Legyen

$$A_n = \sum_k \binom{n}{2k} \binom{k}{m}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_k \binom{n}{2k} \binom{k}{m} \right) x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2k} x^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{m} \frac{x^{2k}}{(1-x)^{2k+1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{m} \left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)^k = \frac{1}{1-x} \frac{\left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)^m}{\left(1 - \frac{x^2}{(1-x)^2} \right)^{m+1}} = \\
&= (1-x) \frac{x^{2m}}{(1-2x)^{m+1}}
\end{aligned}$$

(b) Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= (1-x) \frac{x^{2m}}{(1-2x)^{m+1}} = (1-x)(x/2)^m \frac{(2x)^m}{(1-2x)^{m+1}} = \\
&= (1-x)(x/2)^m \sum_{r=m}^{\infty} \binom{r}{m} (2x)^r.
\end{aligned}$$

Az x^n együtthatóját összehasonlítva a két oldalon kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2^m} \left(\binom{n-m}{m} 2^{n-m} - \binom{n-m-1}{m} 2^{n-m-1} \right) = \\
&= 2^{n-2m-1} \left(2 \binom{n-m}{m} - \frac{n-2m}{n-m} \binom{n-m}{m} \right) = \\
&= 2^{n-2m-1} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m}.
\end{aligned}$$

2.48. Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \right) x^n = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} (2x)^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{(2x)^k}{(1-2x)^{k+1}} = \\
&= \frac{1}{1-2x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-2x)^2} \right)^k = \frac{1}{1-2x} \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-2x)^2}} = \\
&= \frac{1-2x}{1-5x+4x^2} = \frac{1-2x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-4x} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-x} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_n (4x)^n + \frac{1}{3} \sum_n x^n.$$

Tehát

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \frac{1}{3} (2 \cdot 4^n + 1).$$

2.49. Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}$$

és

$$B_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} \right) x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \left(\sum_n \binom{n+k}{m} x^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{x^{m-k}}{(1-x)^{m+1}} = \\ &= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^{-k} = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^m = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k \right) x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} 2^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} 2^k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \left(\frac{2x}{1-x} \right)^k = \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^m = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Tehát $A_n = B_n$ minden n -re.

2.50. Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k} \right) x^n = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n-k} (-x)^{n-k} \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k (1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (x(1-x))^k = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-4x(1-x)}} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.
 \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k} = 2^n.$$

2.51. A feladat megoldása során fel fogjuk használni, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Először is végrehajtottunk egy változócserét, legyen $m - k = r$. Így

$$A_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{2m-2k}{m-k} (-2)^k = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \binom{2r}{r} (-2)^{m-r}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \binom{2r}{r} (-2)^{m-r} \right) x^m = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} (-2)^{-r} \left(\sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} (-2x)^m \right) = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} (-2)^{-r} \frac{(-2x)^r}{(1+2x)^{r+1}} = \frac{1}{1+2x} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^r = \\
 &= \frac{1}{1+2x} \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{1+2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}.
 \end{aligned}$$

Tehát $A_m = 0$, ha m páratlan, és $A_m = \binom{m}{m/2}$, ha m páros.

2.52. Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} \right) x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2k} (2x)^n \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \frac{(2x)^{2k}}{(1-2x)^{2k+1}} = \\ &= \frac{1}{1-2x} \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x^2}{(1-2x)^2}}} = \\ &= \frac{1}{1-2x} \frac{1-2x}{\sqrt{(1-2x)^2-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n. \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

2.53. Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \right) x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m+2k} x^n \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{x^{m+k}}{(1-x)^{m+2k+1}} = \\ &= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{-x}{(1-x)^2} \right)^k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \frac{-x}{(1-x)^2}}}{2 \frac{-x}{(1-x)^2}} = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \frac{1 - \frac{1+x}{1-x}}{2 \frac{-x}{(1-x)^2}} = \\
&= \frac{x^m}{(1-x)^m} = x \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r}{m-1} x^r.
\end{aligned}$$

Az x^n együtthatóját összehasonlítva a két oldalon kapjuk, hogy

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

2.54.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k \right) x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{n=2k}^{\infty} \binom{n-k}{k} (2x)^n \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{(2x)^{2k}}{(1-2x)^{k+1}} = \frac{1}{1-2x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x^2}{1-2x} \right)^k = \\
&= \frac{1}{1-2x} \frac{1}{1 - \frac{2x^2}{1-2x}} = \frac{1}{1-2x-2x^2} = \\
&= \frac{\alpha}{1 - (1+\sqrt{3})x} + \frac{\beta}{1 - (1-\sqrt{3})x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha(1+\sqrt{3})^n + \beta(1-\sqrt{3})^n) x^n.
\end{aligned}$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((1+\sqrt{3})^{n+1} + ((1-\sqrt{3})^{n+1}) \right).$$

2.55.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \left(\frac{1}{4} \right)^k \left(\frac{5}{12} \right)^{n-2k} \right) x^n = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^{-2k} \left(\frac{1}{4} \right)^k \left(\sum_{n=2k}^{\infty} \binom{n-k}{k} \left(\frac{5}{12} x \right)^n \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{36}{25}\right)^k \frac{\left(\frac{5}{12}x\right)^{2k}}{\left(1 - \frac{5}{12}x\right)^{k+1}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{12}x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{4}x^2}{\left(1 - \frac{5}{12}x\right)}\right)^k = \\
&= \frac{1}{1 - \frac{5}{12}x} \frac{1}{1 - \frac{x^2/4}{1 - \frac{5}{12}x}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{4}x^2} = \frac{9/13}{1 - \frac{3}{4}x} + \frac{4/13}{1 + \frac{1}{3}x}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{5}{12}\right)^{n-2k} = \frac{9}{13} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{4}{13} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

2.56. (a) és (b) A 2.44 feladat megoldásából azonnal adódik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n!} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{e^z}{1-z}.$$

A 2.44 feladat megoldásából azt is tudjuk, hogy

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(c) Egyik lehetőség, hogy észrevesszük, hogy a_n -re éppen a (b)-beli képlet adódott a fixpontmentes permutációk számára a 2.18 feladatban. A másik lehetőség, hogy észrevesszük, hogy a feladatban szereplő azonosság triviálisan teljesül a fixpontmentes permutációk számára, ugyanis az összes permutációt megszámlálhatjuk úgy, hogy először rögzítünk $n-k$ fixpontot (ezt $\binom{n}{k}$ /féleképpen választhatjuk ki), majd a maradék k elemet a_k féleképpen permutálhatjuk, hogy ne legyen fixpont. Így

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

Tehát ezen második megoldással és az (a) és a (b) résszel egy új bizonyítást kaptunk a 2.18 feladat megoldásában bizonyított formulára.

2.57. Legyen

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)!$$

és

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(n-k) 2^k.$$

Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = e^z \cdot \frac{1}{1-z},$$

míg

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z}}{1-z} \cdot e^{2z},$$

ahol felhasználtuk 2.56 és 2.43 feladatok eredményeit. Tehát $a_n = b_n$ minden n -re.

8.4. Lineáris rekurziók

2.58. (a) A sorozat első néhány elemét kiszámolva azonnal megsejthetjük, hogy $a_n = 2^n$. Ezt könnyen be is tudjuk bizonyítani indukcióval: ez $n = 0, 1$ esetén igaz. Ha $n - 1$ -ig igaz az állítás akkor

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-2} = (10 - 6) \cdot 2^{n-2} = 2^n.$$

(b) Az (a) részhez hasonlóan most is megsejthetjük, hogy $a_n = 3^n$. Ezt is könnyen beláthatjuk indukcióval.

(c) Észrevehetjük, hogy két a lineáris rekurziót kielégítő sorozat összege is kielégíti a rekurziót, illetve egy ilyen sorozat konstansszoros is kielégíti a rekurziót. Így az (a) és (b) részből kiindulva megpróbálhatjuk a sorozatot $a \cdot 2^n + b \cdot 3^n$ alakban keresni. Hogy $a_0 = 3$ és $a_1 = 8$ legyen, az $a = 1$, $b = 2$ választás megfelelő. Innen viszont azonnal következik, hogy minden n -re

$$a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

2.59. A tanult módszer alapján adódnak a következő eredmények.

(a) $a_n = 2^n + 2$

(b) $b_n = \frac{1}{2} \left((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1} \right)$

(c) $c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1} \right)$

(d) $d_n = n$

(e) $e_n = n \cdot 2^{n+1}$

2.60. $a_n = 3 + 2^n + 2 \cdot 3^n$

2.61. $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$

8.5. Fibonacci-sorozat

2.62. Legyen A_n a dominófedések száma $2 \times n$ -es téglalap esetén. Ekkor $A_1 = 1$ és $A_2 = 2$. Ha a $2 \times n$ -es téglalapban az utolsó dominó áll, akkor a maradék $2 \times (n-1)$ -es téglalapot A_{n-1} -féleképpen tudjuk lefedni. Ha az utolsó 2 dominó vízszintesen áll akkor a maradék $2 \times (n-2)$ -es téglalapot A_{n-2} féleképpen tudjuk lefedni. Így $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

Tehát $A_n = F_{n+1}$, ahol (F_n) a Fibonacci-sorozat.

2.63. Legyen

$$A_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

Az $\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$ azonosságból könnyen adódik, hogy $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Mivel $A_1 = 1$ és $A_2 = 2$, így kapjuk, hogy $A_n = F_{n+1}$.

2.64. Először érdemes indukcióval bizonyítani, hogy

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Ha ezt bebizonyítottuk, akkor megint csak indukcióval könnyen adódik, hogy

$$(n+1)F_0 + nF_1 + \cdots + 1 \cdot F_n = F_{n+4} - (n+3).$$

2.65. Indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

2.66. Az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet két megoldása

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ha $F_n = c_1 \phi_1^n + c_2 \phi_2^n$ alakban keressük, akkor $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ értékekkel állíthatjuk be a kezdőértékeket. Tehát

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

2.67. Csak annyit fogunk felhasználni, hogy $F_n = c_1 \phi_1^n + c_2 \phi_2^n$, ahol $\phi_i^2 = \phi_i + 1$. Ebből már a binomiális tétellel következni fog az állítás:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (c_1 \phi_1^k + c_2 \phi_2^k) =$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_1^k + c_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_2^k = \\
&= c_1(1 + \phi_1)^n + c_2(1 + \phi_2)^n = c_1(\phi_1^2)^n + c_2(\phi_2^2)^n = F_{2n}.
\end{aligned}$$

2.68. (a) Indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Felhasználva, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m$$

kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} F_{n+m-1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Ebből pl. kapjuk, hogy $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

(c) Ez azonnal adódik a binomiális tételből és az

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

képletből.

2.69. (a) Vegyük észre, hogy $x^2F(x) = F(x) + xF(x) + 1$, mivel $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ha $n \geq 2$. Innen kapjuk, hogy

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Megjegyzés: Az

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{c_1}{1-\phi_1x} + \frac{c_2}{1-\phi_2x}$$

azonosságból is levezethető, hogy $F_n = c_1\phi_1^n + c_2\phi_2^n$, ahol $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(b) Felhasználva az $F_n = c_1\phi_1^n + c_2\phi_2^n$ összefüggést kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!} = c_1 e^{\phi_1 x} + c_2 e^{\phi_2 x}.$$

2.70. (a) Tekintsük az $(F_n, F_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ számpárokat modulo m . Ekkor legfeljebb m^2 különböző párt kaphatunk, hiszen mindkét koordináta legfeljebb m -féle lehet, így lesz két különböző i és j , melyekre $F_i \equiv F_j \pmod{m}$ és $F_{i+1} \equiv F_{j+1} \pmod{m}$. Innen viszont a rekurzióból következik, hogy tetszőleges n -re $F_{i+n} \equiv F_{j+n} \pmod{m}$. Vegyük észre, hogy az $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ felhasználásával visszafelé is lépkedhetünk. Tehát a sorozat periodikus $j - i$ periodussal.

(b) Először megmutatjuk, hogy $(F_n, F_{n+1}) = 1$. Tegyük fel, hogy $d \mid F_n$ és $d \mid F_{n+1}$. Ekkor $d \mid F_{n+1} - F_n$ vagyis $d \mid F_{n-1}$. Ezután $d \mid F_{n-1}$ és $d \mid F_n$ oszthatóságokból kapjuk, hogy $d \mid F_{n-2}$. Ezt folytatva kapjuk, hogy $d \mid F_1 = 1$. Tehát $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Második lépésben megmutatjuk, hogy minden m esetén létezik egy $r(m)$ szám, hogy $m \mid F_n$ pontosan akkor, ha $r(m) \mid n$. Legyen r a legkisebb pozitív szám, melyre $m \mid F_r$, ilyen van, mert az (a) rész szerint az (F_n) sorozat periodikus modulo m és $m \mid F_0 = 0$. Most használjuk a 2.68 feladat (b) részét, mely szerint $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$. Ha ezt $n = rk$, $m = k$ -ra használjuk akkor kapjuk, hogy

$$F_{r(k+1)} = F_{rk-1}F_r + F_{rk}F_{k+1}.$$

Ebből könnyen látható indukcióval, hogy $F_r \mid F_{rt}$, hiszen $F_r \mid F_r$ és $F_r \mid F_{rk}$ miatt $F_r \mid F_{r(k+1)}$. Ebből speciálisan következik, hogy $m \mid F_{rt}$. Megmutatjuk, hogy ha r nem osztja N -t akkor m nem osztja F_N -t. Legyen $N = rk + s$, ahol $1 \leq s < r$. Ekkor megint csak $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ összefüggést használjuk $m = rk$, $n = s$ szereposztással:

$$F_N = F_{s-1}F_{rk} + F_sF_{rk+1}.$$

Ha $m \mid F_N$ akkor $m \mid F_{rk}$ miatt $m \mid F_sF_{rk+1}$. Mivel $(F_{rk}, F_{rk+1}) = 1$, így $(m, F_{rk+1}) = 1$. Tehát $m \mid F_s$. Ez viszont ellentmond r definíciójának. Tehát $r(m) = r$ megfelel a feltételeknek.

Megmutatjuk, hogy ebből már könnyen következik a feladat állítása. Legyen $d = (n, m)$, ekkor $F_d \mid F_n$ és $F_d \mid F_m$ miatt $F_d \mid (F_n, F_m)$. Másrészt legyen $t = (F_n, F_m)$, ekkor $r(t) \mid n$ és $r(t) \mid m$ miatt $r(t) \mid (n, m)$. Tehát $r(t) \mid d$, így $t \mid F_d$ vagyis $(F_n, F_m) \mid F_d$. Tehát $F_d = (F_n, F_m)$.

2.71. Legyen $p > 2$ prím. Használjuk fel a 2.68 feladat (c) részének az állítását, mely szerint

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_k \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

Felhasználva, hogy $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ és $p \mid \binom{p}{k}$ ha $1 \leq k \leq p-1$, azt kapjuk, hogy

$$F_p \equiv 2^{p-1} F_p = \sum_k \binom{p}{2k+1} 5^k \equiv 5^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p},$$

ahol $\left(\frac{5}{p}\right)$ a Legendre-szimbólum. A kvadratikus reciprocitási tétel szerint

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$$

Tehát $F_p \equiv 1 \pmod{p}$ ha $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ és $F_p \equiv -1 \pmod{p}$ ha $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Hasonlóan járhatunk el F_{p+1} esetén:

$$\begin{aligned} 2F_{p+1} &\equiv 2^p F_{p+1} = \sum_k \binom{p+1}{2k+1} 5^k = \\ &\sum_k \left(\binom{p}{2k+1} + \binom{p}{2k} \right) 5^k \equiv 1 + 5^{(p-1)/2} \equiv 1 + \left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ha $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ akkor látjuk, hogy $p \mid F_{p+1}$. Ha $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ akkor $F_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$, így $F_{p-1} = F_{p+1} - F_p$ osztható p -vel.

2.72. A bizonyítás lényegében megegyezik a 2.67 megoldásával.

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} F_n^t F_t &= \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} F_n^t (c_1 \phi_1^t + c_2 \phi_2^t) = \\ &= c_1 \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} (\phi_1 F_n)^t + c_2 \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} (\phi_2 F_n)^t = \\ &= c_1 (F_{n-1} + \phi_1 F_n)^k + c_2 (F_{n-1} + \phi_2 F_n)^k \end{aligned}$$

Könnyen igazolható indukcióval, hogy $F_{n-1} + \phi_i F_n = \phi_i^n$ felhasználva, hogy $\phi_i^2 = 1 + \phi_i$. Tehát

$$\sum_{t=0}^k \binom{k}{t} F_{n-1}^{k-t} F_n^t F_t = c_1 (\phi_1^n)^k + c_2 (\phi_2^n)^k = F_{nk}.$$

8.6. Catalan-számok

2.73. (a) Legyen $a_1 a_2 \dots a_{2(n+1)}$ egy a feltételeknek megfelelő sorozat. Legyen a sorozat $2(k+1)$ -edik eleme a sorozat első eleme, amikor a $a_1 + a_2 + \dots + a_{2(k+1)}$ részletösszeg 0. Ekkor $a_1 = 1$, $a_{2(k+1)} = -1$ és az $a_2 a_3 \dots a_{2k+1}$ sorozat is olyan, hogy minden kezdő részletösszeg nemnegatív, hiszen az eredeti sorozatban a $2(k+1)$ -edik kezdő részletösszeg volt az első 0 összeg. Továbbá az $a_{2k+3} \dots a_{2(n+1)}$ sorozat is megfelel a feltételeknek. Tehát minden $2(n+1)$ sorozathoz egyértelműen hozzárendelhető egy $2k$ és egy $2(n-k)$ hosszú ugyanilyen sorozat valamilyen k -ra. Tehát:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

(b) Az összes séta $(0,0)$ -ból (n,n) -be éppen $\binom{2n}{n}$, hiszen $2n$ lépésből kell kiválasztani n jobbra és n felfelé lépést. Most számoljuk meg a „rossz” sétákat vagyis azokat, amelyek az $x = y$ egyenes fölé mennek. Ezek pontosan azok a séták, amelyek elmetszik az $y = x + 1$ egyenest. Csináljuk a következőt: az első metszésponttól tükrözzük a séta maradék részét az $y = x + 1$ egyenesre. Ekkor a séta (n,n) helyett az $(n-1, n+1)$ pontba fog menni, hiszen ez a tükröképe az (n,n) pontnak az $y = x + 1$ egyenesre. Másrészt minden $(0,0)$ -ból $(n-1, n+1)$ pontba menő sétának el kell metszenie az $y = x + 1$ egyenest, és az első metszésponttól tükrözve a sétát erre az egyenesre éppen egy olyan sétát kapunk ami az (n,n) pontba megy és metszi ezt az egyenest. Vagyis a „rossz” séták bijekcióban állnak a $(0,0)$ -ból $(n-1, n+1)$ pontba menő sétákkal. Ezekből $\binom{2n}{n-1}$ van, mert $2n$ lépésből kell kiválasztani $n-1$ jobbra lépést. Tehát a „jó” séták száma:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

(c) Vegyünk egy (b) részbeli sétát, és írjunk $+1$ -et ha a sétában jobbra lépnek és -1 -et ha felfelé. Ekkor éppen egy (a) részbeli sorozatot kapunk, mert az, hogy nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé, éppen azt jelenti, hogy a sorozat minden kezdő részletösszege nemnegatív. Ez persze fordítva is igaz: egy (a) részbeli sorozat meghatároz egy (b) részbeli sorozatot. Tehát

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

2.74. Először is egy apróság: minden hangyát „megkérünk”, hogy mindenképp látogassa meg a leágazást, vagyis ha a hangya egyből kimenne a csövön,

akkor is úgy tekintjük, hogy előbb bement a leágazásba, majd onnan azonnal kijött. Ezek után egy lapra $+1$ -et írunk, ha egy hangya bement a leágazásba és -1 -et, ha kijött onnan. Ennek a sorozatnak minden kezdő részletösszege nemnegatív, hiszen nem jöhetnek ki a csőből többen, mint ahányan bementek. Minden egyes sorozat meghatározza a hangyák sorrendjét, és minden sorrendhez egyértelműen vissza tudjuk állítani a sorozatot (hogyan?). Tehát a 2.73 feladat szerint a hangyáknak $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ sorrendje lehet.

2.75. Legyen D_n a keresett szám. Ekkor $D_3 = 1$, $D_4 = 2$. Egyszerűség kedvéért vezessük be a $D_2 = 1$ jelölést. Legyenek a konvex sokszög csúcsai $1, 2, \dots, n$ ebben a sorrendben. Vegyük az $1, 2$ oldalát a konvex sokszögnek, ez benne van egy háromszögben, legyen k a háromszög harmadik csúcsa. Ekkor a $2, \dots, k$ sokszöget D_{k-1} , az $1, k, k+1, \dots, n$ sokszöget D_{n-k+2} féleképpen bonthatjuk fel háromszögekre. Tehát

$$D_n = \sum_{k=3}^n D_{k-1} D_{n-k+2}.$$

Legyen $E_k = D_{k+2}$, ekkor $r = k - 3$ jelöléssel

$$E_{n-2} = \sum_{k=3}^n E_{k-3} D_{n-k} = \sum_{r=0}^{n-3} E_r E_{n-r-3}.$$

Ezt $n - 2$ helyett $n + 1$ -re felírva kapjuk, hogy

$$E_{n+1} = \sum_{r=0}^n E_r E_{n-r}.$$

Vegyük észre, hogy $E_0 = 1, E_1 = 1, E_2 = 2$. Tehát a C_n Catalan-számok rekurziója és első néhány tagja megegyezik, így az összes tagjuk megegyezik: $E_n = C_n$ vagyis $D_n = C_{n+2}$.

2.76. Megmutatjuk, hogy éppen C_n féleképpen nézhet ki ez a családfa. Legyen a_n ezen fák száma. Ekkor könnyen látható, hogy $a_1 = 1, a_2 = 2$. Ha az uralkodó első fiának k , második fiának $n - k - 1$ férfi leszármazottja van, beleértve a fiúkat, akkor

$$a_n = \sum_k a_k a_{n-1-k},$$

ahol $a_0 = 1$. Vagyis a rekurzió és a sorozat első néhány tagja megegyezik a Catalan-számok rekurziójával, így $a_n = C_n$.

2.77. Legyen a_n a keresett szám. Ekkor $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Megadunk egy rekurziót az a_n számokra. Legyenek a kör körül ülő emberek az $1, 2, \dots, 2n$ számokkal megszámozva. Tekintsük az első embert, tegyük fel, hogy ő a k -adik emberrel fog kezét. Vegyük észre, hogy k páros, különben a $2, 3, \dots, k-1$ számú emberek közül valakinek csak olyan pár jutna, akivel kezét fogva kereszteznék az $(1, k)$ kézfogást. Tehát legyen $k = 2r$. Ekkor a $2, \dots, 2r-1$, illetve a $2r+1, \dots, n$ számú emberek is csak egymás között foghatnak kezét. A kézfogások száma a két esetben a_{k-1} illetve a_{n-k} . Tehát

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1} a_{n-k}.$$

Ebből és a sorozat első néhány tagjából kapjuk, hogy $a_n = C_n$.

2.78. Legyen

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots$$

Ekkor

$$C^2(x) = C_0^2 + (2C_0C_1)x + (2C_0C_2 + C_1^2)x^2 + \dots$$

azaz x^n együtthatója

$$\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}.$$

Tehát

$$1 + xC^2(x) = C(x).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$C(x) \in \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Mivel $C(x)$ -ben a konstans tag együtthatója 1, ezért nem állhat + előjel, tehát

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

8.7. Stirling számok

2.79. (a) Először számoljuk le az $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ szürjektív függvények számát. Legyen A_i azon függvények száma, amelyek nem veszik fel az i értéket. Ekkor

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = (k-r)^n,$$

hiszen ennyi olyan függvény van, amelyek $\{i_1, \dots, i_r\}$ egyikét sem veszi fel. Így a logikai szita szerint a szűrjektív függvények száma

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n.$$

Vegyük észre, hogy minden szűrjektív f függvény megadja az $\{1, 2, \dots, n\}$ egy partícióját k részre, az i -edik halmazban éppen azon s elemek vannak, melyekre $f(s) = i$. Ugyanakkor az $1, 2, \dots, k$ elemeket permutálva minden partíciót $k!$ féleképpen kapunk meg. Tehát

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n.$$

(b) Tekintsük az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k nem üres halmazra való bontásait. Azon partíciókból, melyekben n magában egy halmazt alkot, éppen $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ van, hiszen a maradék $n-1$ elemet kell $k-1$ részre bontani. Ha n nem alkot egy 1-elemű halmazt, akkor a maradék $n-1$ elemet $k-1$ részre kell bontani, majd az n elemet ezen k halmaz bármelyikébe betehetjük. Így

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

2.80. Azon permutációkból, melyekben n fixpont $\left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]$ van, mert a maradék $n-1$ elemet ennyiféleképpen oszthatjuk be $k-1$ ciklusba. Ha n nem fixpont, akkor a maradék $n-1$ elemet először k ciklusba rendezzük, majd az n elemet $n-1$ helyre tehetjük. (Képzeljünk el a ciklusokat, mint a köröket. Ekkor az n -et bármely két elem közé beszúrhatjuk.) Tehát

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right].$$

2.81. Ezt könnyen bizonyíthatjuk n -re vonatkozó indukcióval, felhasználva, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Másik lehetőség a következő. Bizonyítsuk be az állítást először pozitív egész x -re. Színezzük az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemeit x színnel. Ilyen színezésből x^n van. Másrészt úgy is számolhatunk, hogy először felbontjuk az alaphalmazt k részre, minden rész egy színosztály lesz. Ekkor az első halmazt x , a másodikat $x-1$, harmadikat $x-2$ színre színezhetjük... Ezt minden k -ra összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1) \dots (x-k+1) = x^n.$$

Mivel mindkét oldalon egy polinom van és ezek megegyeznek minden pozitív egészre, így ez a két polinom megegyezik.

2.82. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ -re az állítás triviális. Ha $n - 1$ -ig igaz az állítás, akkor használhatjuk a 2.80 feladat rekurzióját:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k &= \sum_{k=0}^n \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \\ &= x \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + (n-1) \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \\ &= x \cdot x(x+1) \dots (x+n-2) + (n-1)x(x+1) \dots (x+n-2) = \\ &= x(x+1) \dots (x+n-1). \end{aligned}$$

2.83. Legyen

$$F_k(x) = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n.$$

Felhasználva a 2.79 feladat (b) részét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) x^n = \\ &= x F_{k-1}(x) + k x F_k(x). \end{aligned}$$

Tehát

$$F_k(x) = \frac{x}{1-kx} F_{k-1}(x).$$

Vegyük észre, hogy $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ definíció szerint, így $F_1(x) = \frac{x}{1-x}$. Ebből már következik, hogy

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \dots (1-kx)}.$$

2.84. Legyen

$$F_k(z) = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F'_k(z) &= \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \end{aligned}$$

$$= F_{k-1}(z) + kF_k(z).$$

Legyen $G_k(z) = F_k(z)e^{-kz}$. Ekkor

$$G'_k(z) = (F'_k(z) - kF_k(z))e^{-kz} = F_{k-1}(z)e^{-kz}.$$

Innen már indukcióval belátható, hogy

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}.$$

2.85. Legyen

$$F_k(z) = \sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{z^n}{n!}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F'_k(z) &= \sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] \right) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= F_{k-1}(z) + zF'_k(z). \end{aligned}$$

Tehát $(1-z)F'_k(z) = F_{k-1}(z)$. Figyelembe véve, hogy $\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!$ miatt $F_1(z) = \log \frac{1}{1-z}$, innen már következik, hogy

$$F_k(z) = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

2.86. (a) Vegyük észre, hogy a 2.84 feladat miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{(e^z - 1)^k}{k!} = e^{x(e^z - 1)}.$$

(b) Ez következik az (a) részből, mert

$$e^{(x+y)(e^z - 1)} = e^{x(e^z - 1)} e^{y(e^z - 1)}.$$

2.87. (a) Vegyük észre, hogy 2.85 feladat miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{(\log \frac{1}{1-z})^k}{k!} = 1/(1-z)^x.$$

(b) Ez következik az (a) részből, mert

$$(1 - z)^{-(x+y)} = (1 - z)^{-x}(1 - z)^{-y}.$$

2.88. Ez azonnal adódik a 2.84 feladat állításából:

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^r}{r!} = \frac{1}{r!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \right)^r.$$

A jobb oldalon a z^n együtthatóját úgy kapjuk, hogy k_1 helyen kiválasztjuk a $\frac{z}{1!}$ tagot, k_2 helyen a $\frac{z^2}{2!}$ tagot és így tovább. Ekkor $k_1 + \dots + k_n = r$ és $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Összehasonlítva az z^n együtthatóját a két oldalon kapjuk, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} \frac{1}{n!} = \sum \frac{r!}{k_1! \dots k_n!} \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^n \frac{1}{j!^{k_j}}.$$

Tehát

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{\underline{k} \in S(n,r)} \frac{n!}{k_1! 1^{k_1} k_2! 2^{k_2} \dots k_n! n^{k_n}}.$$

2.89. Ez lényegében megegyezik a 2.88 feladat megoldásával. Most a 2.85 feladat állítását használjuk fel:

$$\sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \right)^k.$$

Innen a 2.88 feladat megoldása szerint eljárva kapjuk, hogy

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] = \sum_{\underline{k} \in S(n,r)} \frac{n!}{k_1! 1^{k_1} k_2! 2^{k_2} \dots k_n! n^{k_n}}.$$

2.90. Használjuk a 2.81 és 2.82 feladatokat.

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1) \dots (x-k+1) = \\ &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left(\sum_{m=0}^n \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-x)^m \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_m \left(\sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} \right) x^m.$$

Ebből azonnal következik a feladat állítása.

2.91. Válasszunk ki $n - k$ elemet, amelyeket az $n + 1$ elemmel teszünk egy halmazba. A maradék k elemet pedig particionáljuk m halmazra. Ezt minden k -ra összegezve kapjuk, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}.$$

2.92. Először számoljuk meg, hogy hányféleképpen lehet az n csúcsú utat x színnel színezni úgy, hogy szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek. Ez egyrészt $x(x-1)^{n-1}$, mert az első csúcs x -féle színt kaphat, a többi $x-1$ -félé. Másrészt úgy is számolhatunk, hogy először felbontjuk a csúcsalmazt k olyan halmazra, amelyek egyikében sincs két szomszédos csúcs, majd ezeket a halmazokat különböző színekkel megszínezzük. Tehát

$$x(x-1)^{n-1} = \sum_k t(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1).$$

Most az n csúcsú út helyett vegyük az n csúcsú csillagot. Ezt is $x(x-1)^{n-1}$ -féleképpen lehet színezni úgy, hogy ne legyen két szomszédos, azonos színű csúcs. Másrészt úgy is számolhatunk, hogy először felbontjuk a csúcsalmazt k olyan halmazra, amelyek egyikében sincs két szomszédos csúcs, majd ezeket a halmazokat különböző színnel megszínezzük. Most azonban a csillag középpontjának egyelemű színosztálynak kell lennie, és a maradék $n-1$ csúcsot kell $k-1$ részre bontanunk. Így

$$x(x-1)^{n-1} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x(x-1) \dots (x-k+1).$$

Mivel az $x(x-1) \dots (x-k+1)$ polinomok bázist alkotnak, így

$$t(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}.$$

Valójában ebből a bizonyításból látszik, hogy út, illetve csillag helyett tetszőleges fa esetén $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ -féleképpen lehet felbontani a csúcsalmazt k független halmazra.

2.93. Használjuk a 2.81 feladatot:

$$\sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1) \dots (x-k+1) = x^n.$$

Ezt osszuk le x -szel, majd helyettesítsünk be 0-t. Ekkor éppen a feladat állítását kapjuk.

2.94. Meg kell határoznunk a

$$\frac{1}{n!} \sum_k k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

összeget, ez ugyanis a ciklusok számának átlaga. Ehhez deriváljuk le a 2.82 feladatból kapott összefüggést:

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1) \dots (x+n-1).$$

Deriválás után kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} k x^{k-1} = x(x+1) \dots (x+n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$

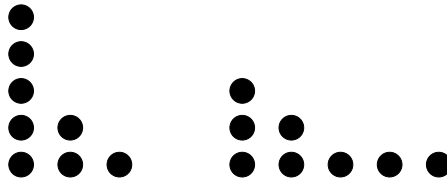
Ebbe $x = 1$ -t írva és $n!$ -sal osztva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n!} \sum_k k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

8.8. Partíciók

2.95. Legyen $n = t_1 + \dots + t_m$, ahol $t_i \leq k$. Legyen $s_i = |\{j \mid t_j \geq i\}|$. Ekkor $n = s_1 + \dots + s_k$, ahol $s_r = 0$, ha nincs legalább r méretű t_i . Ez megad egy bijekciót a két halmaz között.

Szemléletesebben ez nem más, mintha a partícióhoz tartozó Ferrers-diagramot tükröznénk a 45° -os egyenesre (lásd az ábrát).



2.96. Először bontsuk fel az n számot csupa különböző szám összegére. Majd a felbontásban szereplő összes számot írjuk fel $2^k m$ alakban, ahol m páratlan. Végül minden ilyen számot helyettesítsünk 2^k darab m számmal. Így

megkapjuk az n -nek egy felbontását csupa páratlan számra. Megmutatjuk, hogy vissza tudjuk állítani az eredeti felbontást a páratlan számokból. Tegyük fel, hogy a felbontásban t darab m -es van. Ekkor írjuk fel a t számot különböző 2-hatványok összegeként, ez egyértelmű. Ha $t = \sum 2^{k_i}$ akkor az eredeti számok a $2^{k_i}m$ voltak. Mások nem lehettek, mivel az eredeti számok különbözőek voltak, így a 2-hatványoknak muszáj különbözőeknek lenni. (Pl. $12 + 10 + 5 + 3$ -nak az $5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ felel meg.) Tehát a kétféle partíció között bijekció van.

2.97. (a)

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^j \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^{2j} \right) \dots \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^{kj} \right).$$

Ebben a szorzatban x^n együtthatóját úgy kapjuk meg, hogy minden zárójelből kiválasztunk egy x^{m_r} tagot, ahol $1 \leq r \leq k$. Ez megfelel annak a partíciónak, ahol az r -ből éppen m_r darabot vettünk.

(b) Vegyük észre, hogy ha az x^n együtthatóját akarjuk kiszámolni a végtelen szorzatban, akkor elég csak az első n tag szorzatát nézni, mert a többiből csak az 1-et választhatjuk ki. Tehát a következő konvergenciát érdemes nézni: $f_n(x) \rightarrow f(x)$, ha minden k -ra létezik $n_0(k)$, hogy $n > n_0(k)$ esetén $f(x) - f_n(x)$ legkisebb nem 0 együtthatós tagja legalább k . (Vagyis egy bizonyos együttható kitalálásához elég csak egy elég nagy indexű függvényt ismerni.) Ebben az értelemben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

2.98. (a) Ha adott az n egy partíciója, akkor egyesével töröljük ki belőle az 1-eseket. Ha t darab 1-es volt a partícióban akkor előbb megkapjuk az $n-1$ egy partícióját, majd az $n-2$ egy partícióját, ..., végül az $n-t$ egy partícióját. Fordítva, ha adott egy n -nél kisebb szám egy partíciója, akkor elég sok 1-est hozzávéve kapjuk az n egy egyértelmű partícióját. Így egy bijekciót kapunk az n -nél kisebb számok partíciói és az n partícióinak az 1-esei között.

(b) Teljesen hasonlóan az (a) részhez kapjuk, hogy a t -esek száma

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/t \rfloor} p(n-jt).$$

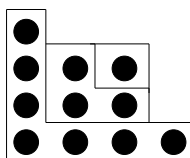
(c) Adjuk össze az összes számot az n partícióiban. Ez egyrészt $np(n)$, hiszen minden partícióban n a számok összege. Másrészt az (a) és (b) rész miatt ez:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{t=1}^{\lfloor n/t \rfloor} p(n-jt) \right) &= \sum_{k=1}^n p(n-k) \left(\sum_{j \mid k} j \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n p(n-k) \sigma(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(n-k) p(k). \end{aligned}$$

Tehát

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(n-k) p(k).$$

2.99. Először rendeljük minden partícióhoz azt a partíciót, amit úgy kapunk, hogy a Ferrers-diagramját tükrözzük a 45° -os egyenesre. Ekkor a legtöbb partíciót párba állítottuk. Kivételek azon partíciók, melyek szimmetrikusak voltak a 45° -os egyenesre. Ezen partíciók száma viszont éppen $r(n)$, mert meg lehet adni egy bijekciót köztük és azon partíciók között, ahol az összeadandók különböző páratlan számok. Valóban, a Ferrers-diagramot felbonthatjuk L alakú részekre, minden egyes L egy páratlan számot ad meg és ezek különbözőek. Ezt az eljárást visszafelé is meg lehet csinálni. Tehát $p(n) \equiv r(n) \pmod{2}$.



9. fejezet

Algebrai módszerek a kombinatorikában – megoldások

9.1. Lineáris algebrai módszerek

3.1. Az (a),(b),(c) és (d) feladatokat együtt fogjuk tárgyalni.

Feltehető, hogy a G gráf összefüggő, mert a generált V vektortér komponensenként generált vektorterek direkt összege lesz.

Először megmutatjuk, hogy ha C egy kör, akkor $\{v_f \mid f \in C\}$ vektorok összefüggőek. Valóban, jelöljük ki a kör egy irányítását, és ha egy $f \in C$ él irányítása megegyezik a körével, akkor legyen $\alpha_f = 1$, különben pedig -1 . Ekkor

$$\sum_{f \in C} \alpha_f \underline{v}_f = \underline{0}.$$

A következő lépésben megmutatjuk, hogy ha $F \subset E(G)$ körmentes részgráfot feszít, akkor a $\{\underline{v}_f \mid f \in F\}$ vektorrendszer lineárisan független. Tegyük fel, hogy ez nem így van, és léteznek α_f nem mind 0 számok, melyekre

$$\sum_{f \in F} \alpha_f \underline{v}_f = \underline{0}.$$

Legyen $F' \subset F$ azon f' élek halmaza, melyre $\alpha_{f'} \neq 0$. Ekkor F' is körmentes részgráfot vagyis erdőt feszít. Így van egy elsőfokú u pont az általa feszített részgráfban. Legyen g a ráilleszkedő él F' -ben. Ekkor $\sum_{f \in F} \alpha_f \underline{v}_f$ vektor u -beli koordinátája $\alpha_g \neq 0$, ami ellentmond annak, hogy ez a $\underline{0}$ vektor. Tehát valóban lineárisan függetlenek az $\{\underline{v}_f \mid f \in F\}$ halmaz vektorai.

Vegyük észre, hogy minden $\underline{v_e}$ vektor merőleges az $\underline{1}$ vektorra, így $\dim V \leq n - 1$, ugyanakkor egy feszítőfa élei lineárisan függetlenek, így ők egy $n - 1$ dimenziós teret generálnak. Tehát $\dim V = n - 1$, vagyis minden $\underline{1}$ -re merőleges vektor benne van V -ben.

Ha $S \subset E(G)$ érendszer feszíti G -t, akkor $\{v_f \mid f \in S\}$ generálja a V vektorteret, ugyanis már egy S éleiből kiválasztható feszítőfa is generálja V -t.

Tehát ha G összefüggő, akkor $\dim V = n - 1$, V bázisai egy-egy feszítőfához tartozó vektorrendszer. Ha G -nek c komponense van, akkor $\dim V = n - c$, és azon érendszerekhez tartozó vektorrendszerek lesznek V bázisai, amelyek G minden komponensében egy feszítőfát határoznak meg.

3.2. Tegyük fel, hogy sikerült a K_n teljes gráfot felbontani k darab teljes páros gráf uniójára, ahol $k < n - 1$. Legyenek a teljes páros gráfok osztályai (A_i, B_i) ($1 \leq i \leq k$). Rendeljünk minden csúcshoz egy változót, és tekintsük a következő $k + 1$ egyenletet:

$$\sum_{v \in A_i} x_v = 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

és

$$\sum_{v \in V} x_v = 0.$$

Mivel $k + 1 < n$, így az egyenletrendszernek van nem azonosan 0 megoldása. Tegyük fel, hogy az $\underline{a} = (a_v)_{v \in V}$ egy ilyen megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{v \in V} a_v^2 = \left(\sum_{v \in V} a_v \right)^2 - 2 \sum_{\{u, v\}} a_u a_v = \\ &= \left(\sum_{v \in V} a_v \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^k \left(\sum_{v \in A_i} a_v \right) \left(\sum_{u \in B_i} a_u \right) = 0. \end{aligned}$$

Ez az ellentmondás mutatja, hogy $k \geq n - 1$.

Megjegyzés: $n - 1$ teljes páros gráf éldisjunkt uniójára valóban felbontható K_n .

3.3. (a) Tegyük fel, hogy az $N = \{1, 2, \dots, n\}$ csúcshalmazon teljes r -uniform hipergráf felbomlott $q = f_r(n)$ darab r -osztályú r -uniform hipergráf $H^1, \dots, H^q$ éldisjunkt uniójára. Legyen $E_i = E(H^i)$ és $\bar{E}_i = \{e - \{n\} \mid e \in E_i, n \in e\}$. Ekkor $\bar{E}_i$ $r - 1$ -osztályú $r - 1$ -uniform hipergráf $(n - 1)$ csúcson. Továbbá $\cup \bar{E}_i = K_{r-1}^{n-1}$, így $q \geq f_{r-1}(n - 1)$.

(b) A 3.2 feladat szerint $f_2(n) = n - 1$, és az (a) rész szerint $f_3(n) \geq f_2(n - 1) = n - 2$. Meg kell mutatni még, hogy $f_3(n) \leq n - 2$. Ezt az olvasóra bízunk.

(c) Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ és $\mathcal{K} = \{K \subset N \mid |K| = k\}$ a k -csúcsú halmazok halmaza. $K \in \mathcal{K}$ -hoz rendeljük az x_K változót. Legyen H egy $2k$ -osztályú $2k$ -gráf $V_1, \dots, V_{2k}$ páronként diszjunkt osztályokkal. Ekkor $e \in H$ pontosan akkor, ha $|e \cap V_i| = 1$ minden $i \in \{1, 2, \dots, 2k\}$ esetén.

Minden H -hoz hozzárendelünk egy $Q(H)$ kvadratikus formát a következőképpen:

$$Q(H) = \sum_{\substack{A, B \subseteq \{1, 2, \dots, 2k\} \\ |A|=|B|=k, A \cap B = \emptyset}} L_A(H) L_B(H),$$

ahol $C \subseteq \{1, 2, \dots, 2k\}$, $|C| = k$ esetén

$$L_C(H) = \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ |K \cap V_c| = 1 \forall c \in C}} x_K.$$

Tehát $Q(H) \frac{1}{2} \binom{2k}{k}$ darab $L_A(H) L_B(H)$ alakú kifejezés összege, minden $L_A(H)$ néhány x_K összege.

Legyen $q = f_{2k}(n)$, és tegyük fel, hogy $E(K_n^r) = \cup_{i=1}^q E(H^i)$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^q E(H^i) = \sum_{\substack{K, L \in \mathcal{K} \\ K \cap L = \emptyset}} x_K x_L.$$

Valóban, ha $K, L \in \mathcal{K}$, $K \cap L = \emptyset$, akkor $x_K x_L$ megjelenik abban a $Q(H')$ -ben, amelyik tartalmazza a $K \cup L$ élet. Ha $K \cap L \neq \emptyset$, akkor nem jelenik meg egyetlen kvadratikus formában sem.

Tekintsük a következő azonosságot:

$$\sum_{\substack{K, L \in \mathcal{K} \\ K \cap L = \emptyset}} x_K x_L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{\substack{A \subseteq N \\ |A|=i}} \left(\sum_{K \in \mathcal{K}, A \subseteq K} x_K \right)^2.$$

Valóban, ha $K, L \in \mathcal{K}$, $|K \cap L| = j$ ($0 \leq j < k$), akkor $x_K x_L$ éppen $\sum_{\ell=0}^j (-1)^\ell \binom{j}{\ell}$ szerepel. Ez pedig 1, ha $j = 0$, és 0, ha $j > 0$. Ha $K = L$, akkor x_K^2 éppen $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{k}{i} = 0$ szerepel. Tehát

$$\sum_{i=1}^q \sum_{\substack{A, B \subseteq \{1, 2, \dots, 2k\} \\ |A|=|B|=k, A \cap B = \emptyset}} L_A(H) L_B(H) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{\substack{A \subseteq N \\ |A|=i}} \left(\sum_{K \in \mathcal{K}, A \subseteq K} x_K \right)^2.$$

Legyen V az x_K -k által meghatározott $\binom{n}{k}$ -dimenziós térnek az az altere, amelyet a következő

$$\frac{1}{2} \binom{2k}{k} q + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-3} + \cdots + \binom{n}{k+1-2\lceil k/2 \rceil}$$

darab lineáris egyenlet határoz meg:

$$(i) \quad L_A(H^i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq q, \quad A \subset \{1, 2, \dots, 2k\}, |A| = k, 1 \in A$$

$$(ii) \quad \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ A \subset K}} x_k = 0 \quad \forall A \subset N, |A| \in \{k-1, k-3, \dots, k+1-2\lceil k/2 \rceil\}.$$

Vegyük észre, hogy $V = \{0\}$, ugyanis $\underline{y} \in V$ esetén

$$0 = \frac{1}{2} (-1)^k \left(\sum_{K \in \mathcal{K}} y_K^2 + \sum_{A \subset N, |A|=k-2} \left(\sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ A \subset K}} y_K \right)^2 + \dots \right).$$

Tehát

$$f_{2k}(n) = q \geq 2 \frac{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-3} - \cdots - \binom{n}{k+1-2\lceil k/2 \rceil}}{\binom{2k}{k}}.$$

(d) Az előző részből triviálisan következik, hogy $r \geq 1$ esetén $f_r(n) \geq c_r n^{\lfloor r/2 \rfloor} (1 + o(1))$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol

$$c_r = \frac{2\lfloor r/2 \rfloor!}{(2\lfloor r/2 \rfloor)!}.$$

9.2. Polinom módszer

3.4. Megmutatjuk, hogy a gráfnak legfeljebb $(n-s+1)(m-t+1)$ neméle van, vagyis legalább $nm - (n-s+1)(m-t+1)$ éle van. Minden $u_i \in A$ csúcshoz rendeljünk egy $a_i \in \mathbb{R}$ számot és minden $v_j \in B$ csúcshoz is rendeljünk egy $b_j \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy ezek mind különbözőek legyenek. Egy $e = (u, v) \notin E(G)$ élet behúzza keletkezik egy teljes (S_e, T_e) páros gráf. Legyen

$$p_e(x, y) = \prod_{u_i \notin S_e} (x - a_i) \prod_{v_j \notin T_e} (y - b_j).$$

Vegyük észre, hogy p_e x -beli foka $n-s$, y -beli foka $m-t$, így minden p_e polinom benne van egy $(n-s+1)(m-t+1)$ dimenziós térben. Megmutatjuk, hogy a p_e polinomok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{e \notin E(G)} \alpha_e p_e(x, y) = 0.$$

Helyettesítsünk be (a_u, b_v) -t, ahol $e = (u, v)$. Ekkor $p_e(a_u, b_v) \neq 0$, mert $(u, v) \in S_e \times T_e$ definíció szerint, így az $x = a_u$ és $y = b_v$ helyettesítés a $p_e(x, y)$ -t definiáló szorzat egyik tényezőjét sem teszi nullává. Másrészt ha $f \neq e$, akkor $p_f(a_u, b_v) = 0$, mert csak akkor lehetne nem 0, ha $(u, v) \in S_f \times T_f$, de $S_f \times T_f$ minden nem f -beli éle G -ben van, míg $e \notin E(G)$. Tehát (a_u, b_v) -t behelyettesítve kapjuk, hogy $\alpha_e = 0$. Mivel ez tetszőleges $e \notin E(G)$ élre elmondható, így a $p_e(x, y)$ polinomok lineárisan függetlenek. Tehát legfeljebb $(n - s + 1)(m - t + 1)$ ilyen él lehet, mert a p_e polinomok benne vannak egy $(n - s + 1)(m - t + 1)$ dimenziós térben.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés: Ennyi él lehet is a gráfnak: legyen G azon $A \times B$ -beli élek halmaza, amelyek nincsenek benne egy adott $K_{n-s+1, m-t+1}$ teljes páros gráfban. Ez könnyen ellenőrizhetően teljesíti a feltételt.

3.5. Legyen $S = \{P_1, \dots, P_m\}$ és legyenek P_i koordinátái $(a_{i1}, \dots, a_{in})$. Tekintsük a következő $Q_i(x_1, \dots, x_n)$ polinomokat:

$$Q_i(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_{ij})^2 - d_1^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_{ij})^2 - d_2^2 \right).$$

Vegyük észre, hogy ha Q_i -be a P_j ($j \neq i$) pont koordinátáit helyettesítjük akkor 0-t kapunk, míg P_i koordinátáit helyettesítve $d_1^2 d_2^2 \neq 0$ -t kapunk. Ebből következik, hogy a Q_i polinomok lineárisan függetlenek: ha $\sum \alpha_i Q_i = 0$ lenne, akkor P_i pont koordinátáit behelyettesítve kapnánk, hogy $\alpha_i = 0$. Másrészt a Q_i polinomok mind benne vannak abban a vektortérben, amit a következő polinomok generálnak:

$$1, x_i, x_i x_j, \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) x_j, \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2.$$

Ez pedig egy $1 + n + n(n+1)/2 + n + 1 = (n+1)(n+4)/2$ dimenziós tér. Tehát legfeljebb ekkora lehet a pontrendszer.

3.6. Legyen $S = \{P_1, \dots, P_m\}$ és legyenek P_i koordinátái $(a_{i1}, \dots, a_{id})$. Tekintsük a következő $Q_i(x_1, \dots, x_d)$ polinomokat:

$$Q_i(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_{ij})^2 - 1.$$

A Q_i polinomok mind benne vannak abban a vektortérben, amit a következő polinomok generálnak: $1, x_1, x_2, \dots, x_d, \sum_{i=1}^d x_i^2$. A $(v_1, \dots, v_k) \in G^{\times k}$ -hoz

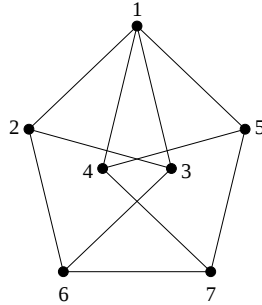
rendeljük azt a $k \times d$ változós polinomot, hogy

$$Q_{(v_1, \dots, v_k)}(\underline{x}) = Q_{v_1}(x_1)Q_{v_2}(x_2) \dots Q_{v_k}(x_k),$$

ahol $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ összesen $k \times d$ változó d -esével csoportosítva. Legyen $T \subset V(G)^{\times k}$ egy $\omega(G^{\times k})$ méretű teljes részgráfja $G^{\times k}$ -nak. Ekkor a $Q_{\underline{v}}(\underline{x})$ ($\underline{v} \in T$) lineárisan független polinomok, ugyanis beleírva az $\underline{u}$ vektorhoz tartozó $k \times d$ koordinátát 0-t kapunk, ha $\underline{u} \neq \underline{v}$, és 1-et, ha $\underline{u} = \underline{v}$. Ugyanakkor minden $Q_{\underline{v}}(\underline{x})$ polinom benne van abban a $(d+2)^k$ dimenziós térben, amit a fent megnevezett $d+2$ polinom különböző koordinátákban vett szorzata generál. Tehát $|T| \leq (d+2)^k$. Így

$$\Theta_\omega(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(G^{\times k})^{1/k} \leq d+2.$$

(b)



Az ábrán látható gráf négyzetében a következő csúcsok egy 10 csúcsú klikket alkotnak: $(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 7), (6, 6), (7, 1)$. Tehát

$$\Theta_\omega(G) \geq \sqrt{10} > 3.$$

(Felhasználtuk azt a könnyen igazolható tényt, hogy

$$\Theta_\omega(H) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(H^{\times k})^{1/k} = \sup_k \omega(H^{\times k})^{1/k}.)$$

3.7. Rendeljünk minden v csúcshoz egy $a_v \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy ezek a számok mind különbözőek legyenek. Egy v csúcshoz rendeljük a következőképpen definiált $Q_v(x)$ polinomot:

$$Q_v(x) = \prod_{u \in N^+(v)} (x - a_u),$$

ahol $N^+(v)$ a v csúcs kiszomszédainak a halmaza. Egy $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ csúcshoz pedig rendeljük a

$$Q_{\underline{v}}(x_1, \dots, x_n) = Q_{v_1}(x_1) \dots Q_{v_n}(x_n)$$

polinomot.

Legyen $S \subseteq V^n$ egy $\omega(G^n)$ méretű halmaz, melyre minden $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in S$ rendezett párra létezik i , hogy $(u_i, v_i) \in E(G)$. Ekkor a $Q_{\underline{v}}(\underline{x})$ ($\underline{v} \in S$) lineárisan független polinomok, ugyanis beleírva a $\underline{u}$ -hoz tartozó $(a_{u_1}, \dots, a_{u_d})$ vektort 0-t kapunk, ha $\underline{u} \neq \underline{v}$, és nem 0-t, ha $\underline{u} = \underline{v}$. Mivel minden $Q_{\underline{v}}(\underline{x})$ polinom benne van egy $(d^+(G) + 1)^n$ dimenziós térben, így $|S| \leq (d^+(G) + 1)^n$. Tehát

$$C(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(G^n)^{1/n} \leq d^+(G) + 1.$$

9.3. A kombinatorikus Nullstellensatz alkalmazásai

3.8. Tegyük fel, hogy

$$|\{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n); \ h(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}| \leq K.$$

Legyen S egy olyan K elemű halmaz, melyre

$$\{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n); \ h(a_1, \dots, a_n) \neq 0\} \subseteq S.$$

Tekintsük a következő polinomot:

$$P(t_1, \dots, t_n) = h(t_1, \dots, t_n) \prod_{s \in S} (t_1 + \dots + t_n - s).$$

Ekkor $\deg P = \deg h + K = \sum_{i=1}^n (|A_i| - 1)$. Másrészt P ugyanannyiadfokú, mint a

$$h(t_1, \dots, t_n)(t_1 + \dots + t_n)^K$$

polinom, és minden $\deg P$ -fokú tagban meg kell egyezniük, mert P -ben levő szorzatokból nem kerülhet konstans egy legnagyobb fokú tagba. Tehát P -ben a $t_1^{|A_1|-1} \dots t_n^{|A_n|-1}$ egy legnagyobb fokú tag, aminek az együtthatója nem 0. Így a kombinatorikus Nullstellensatz szerint léteznek olyan $a_i \in A_i$ elemek, hogy $P(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, ez azonban ellentmond P definíciójának. Tehát

$$|\{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n); \ h(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}| \geq K + 1.$$

3.9. Tegyük fel, hogy $cx_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ az f polinom egy monomja. Ekkor

$$\sum_{\underline{a} \in \mathbb{F}_p^n} ca_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = c \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p j^{k_i} \right).$$

Legyen $0 \leq t \leq p-1$. Ekkor $\sum_{j=1}^p j^t \equiv 0 \pmod{p}$, ha $0 \leq t \leq p-2$, és $\sum_{j=1}^p j^{p-1} \equiv p-1 \pmod{p}$. Valóban, ha $0 \leq t \leq p-2$, akkor létezik $c \neq 0$, melyre $c^t \not\equiv 1 \pmod{p}$, mert az $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ egyenletnek legfeljebb t gyöke van. Így

$$(c^t - 1) \sum_{j=1}^p j^t = \sum_{j=1}^p (cj)^t - \sum_{j=1}^p j^t = 0 \pmod{p},$$

mivel cj ($j = 1, \dots, p$) megegyezik az összes maradékosztállyal. Mivel $c^t \not\equiv 1 \pmod{p}$, így $\sum_{j=1}^p j^t \equiv 0 \pmod{p}$. A $p-1$ -re vonatkozó állítás következik a kis Fermat-tételből.

Tehát ha egy monomban van $p-1$ -nél kisebb kitevő, akkor annak az „integrálja” automatikusan 0. Mivel n tag van és az összefokszám $n(p-1)$, így csak annak az egy tagnak az integrálja számít, amelyben minden kitevő pontosan $p-1$.

3.10. Legyenek $x_1, \dots, x_k$ változók. Minden számolás $\mathbb{F}_p$ testben történik. Tekintsük a következő polinomot:

$$P(\underline{x}) = \left(\prod_{i < j} (x_i - x_j) \right) \left(\prod_{i \neq j} (x_i + d_i - x_j) \right) \\ \left(\prod_{i < j} (x_i - d_i - x_j + d_j) \right) \left(\prod_i x_i \right) \left(\prod_i (x_i - d_i) \right).$$

Ha van egy $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$, melyre $P(\underline{a}) \neq 0$ akkor az éppen azt jelenti, hogy a $b_i = a_i - d_i$ számokkal együtt az $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ számok mind különbözőek és egyikük sem 0, ez éppen azt jelenti, hogy az $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ számsorozat valóban egy permutáció, az $a_i - b_i = d_i$ feltétel pedig automatikusan adódik b_i definíciójából minden i -re. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy létezik ilyen $\underline{a}$, elég megmutatni, hogy

$$\int P = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{F}_p^n} P(\underline{a}) \neq 0,$$

mert ekkor biztosan van egy nem 0 tag.

Használjuk a 3.9 feladat állítását. Vegyük észre, hogy

$$\deg P = k(k-1)/2 + k(k-1) + k(k-1)/2 + 2k = 2k^2 = k(p-1).$$

Ezek szerint az integrál csak az $x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}$ tag együtthatójától függ, vagyis nem függ a d_i számoktól. Legyen P' az a polinom, ahol P -ben minden $d_i = 1$. Ekkor viszont könnyű meggondolni, hogy mi az $\int P'$, mert csak azon a_i vektorok szerepelhetnek benne, amiben az a_i -k az $S = \{2, 4, 6, \dots, p-1\}$ halmaz elemei. Rádaásul bármely permutációra ugyanazt a nem 0 számot kapjuk:

$$r = \left(\prod_{i \neq j \in S} (i-j)^2 \right) \left(\prod_{i, j \in S} (i+1-j) \right) \left(\prod_{i \in S} i \right) \left(\prod_{i \in S} (i+1) \right).$$

Így $\int P = \int P' = k!r \neq 0$, vagyis létezik $\underline{a}$, melyre $P(\underline{a}) \neq 0$.

3.11. Alkalmazzuk a 3.8 feladatot a $h(x, y) = x - y$ polinomra és az $A_1 = A, A_2 = B$ halmazokra. Legyen $|A| = n, |B| = m$. Először tekintsük azt az esetet, amikor $n \neq m$, ekkor legyen $K = n + m - 3$. Az $(x - y)(x + y)^{n+m-3}$ polinomban $x^{n-1}y^{m-1}$ együtthatója:

$$\binom{n+m-3}{n-2} - \binom{n+m-3}{n-1} = (n-m) \frac{(n+m-3)!}{(n-1)!(m-1)!}.$$

Ha $n + m - 3 < p$, akkor a fenti kifejezés nem 0 $\mathbb{F}_p$ -ben, így

$$|A \overset{*}{+} B| \geq K + 1 = n + m - 2.$$

Ha $n + m - 3 \geq p$, akkor a következőképpen járhatunk el: tegyük fel, hogy az A a kisebbik halmaz, és vegyünk egy $A' \subseteq A$ halmazt n' elemszámmal, melyre $K' = n' + m - 3 = p - 1$. Ekkor $|A'| = |B|$, mert a kisebbik halmazban vettük az A' részhalmazt. Az előzőek szerint $|A' \overset{*}{+} B| \geq K' + 1 = p$, másrészt $|A \overset{*}{+} B| \geq |A' \overset{*}{+} B|$, tehát ebben az esetben is kész vagyunk. Tehát

$$|A \overset{*}{+} B| \geq \min(|A| + |B| - 2, p).$$

Ha $|A| = |B|$, akkor hagyjunk el egy elemet A -ból, így már nem ugyanakora a két halmaz, és alkalmazhatjuk az előbbi becslést. Így kapjuk, hogy

$$|A \overset{*}{+} B| \geq \min((|A| - 1) + |B| - 2, p) = \min(|A| + |B| - 3, p).$$

3.12. Legyen $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Tekintsük a következő n változós polinomot:

$$P(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i).$$

Ebben az $x_1 \dots x_n$ egy maximális fokú tag, amelynek az együtthatója éppen $\text{Per}(A)$, ami a feltétel szerint nem 0. Ekkor a kombinatorikus Nullstellensatz szerint tetszőleges $S_1, S_2, \dots, S_n \subset \mathbb{F}$ halmazokra, melyre $|S_i| = 2$ minden i -re, létezik egy $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ vektor, hogy $P(\underline{x}) \neq 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $A\underline{x}$ minden koordinátája különbözik $\underline{b}$ megfelelő koordinátájától.

3.13. Tekintsük a következő polinomot:

$$F(\underline{x}) = \prod_{i=1}^m (1 - P_i(\underline{x})^{p-1}) - \delta \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq c_i} (x_i - j),$$

ahol δ -t úgy választjuk, hogy $P(c_1, \dots, c_n) = 0$ legyen. Tudjuk így választani δ -t, mert

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j \neq c_i} (c_i - j) \neq 0.$$

Másrészt $\delta \neq 0$, mert az első tagba $\underline{c}$ -t helyettesítve 1-et kapunk. A

$$\prod_{i=1}^m (1 - P_i(\underline{x})^{p-1})$$

foka $(p-1) \sum_i \deg P_i < (p-1)n$, míg

$$\delta \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq c_i} (x_i - j)$$

foka éppen $(p-1)n$, tehát F foka is $(p-1)n$. Tehát létezik egy $\underline{a}$, melyre $F(\underline{a}) \neq 0$. Vegyük észre, hogy a második tag minden nem $\underline{c}$ -re eltűnik. Másrészt az első tag csak akkor nem 0, ha $\underline{a}$ közös gyöke az összes P_i -nek. Tehát $\underline{a}$ egy másik közös gyöke az összes P_i -nek.

3.14. Tekintsük a következő két polinomot:

$$P_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i x_i^{p-1} \quad P_2(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1}.$$

P_1 és P_2 -nek közös gyöke a $\underline{0}$ vektor, és $\deg P_1 + \deg P_2 = 2(p-1) < 2p-1 = n$, így a 3.13 feladat szerint a két polinomnak van egy másik közös $\underline{y}$ gyökük. Legyen

$$S = \{i \mid y_i \neq 0\}.$$

Mivel $P_2(\underline{y}) = 0$ és $P_2(\underline{y}) = |S|$ a kis Fermat-tétel szerint, ezért $p \mid |S|$. Mivel $|S|$ nem lehet 0, és legfeljebb $2p-1$, így $|S| = p$. Mivel $P_1(\underline{y}) = 0$, így $\sum_{i \in S} a_i = 0$ megint csak a kis Fermat-tétel miatt.

3.15. Legyenek a hipersíkok $H_i = \{\underline{x} \mid (h_i, \underline{x}) = r_i\}$, ahol $1 \leq i \leq k$. Tekintsük a következő polinomot:

$$F(\underline{x}) = \prod_{i=1}^k ((h_i, \underline{x}) - r_i) - \delta \prod_{i=1}^n (1 - x_i),$$

ahol δ úgy van választva, hogy $F(\underline{0}) = 0$ legyen, vagyis $\delta = (-1)^k \prod_{i=1}^k r_i$. Mivel a hipersíkok nem fedik az $\underline{0}$ csúcsot, így $\delta \neq 0$. Ha $k < n$ lenne, akkor az F főtagját a második tag adná: $(-1)^n \prod_{i=1}^n x_i$. Tehát $S_1 = \dots = S_n = \{0, 1\}$ választással a kombinatorikus Nullstellensatz azt adná, hogy létezik egy $\underline{a} \in S_1 \times \dots \times S_n$, melyre $F(\underline{a}) \neq 0$. De ez lehetetlen, mert $F(\underline{0}) = 0$ és $\underline{a} \neq \underline{0}$ esetén pedig F mindkét tagja 0: utóbbi esetben a polinom második tagja automatikusan 0, míg az első tag éppen amiatt 0, mert minden $\underline{0}$ -tól különböző rácsponton átmegy valamelyik hipersík. Az ellentmondás mutatja, hogy $k \geq n$.

3.16. Legyenek a síkok

$$H_i = \{(x, y, z) \mid a_i x + b_i y + c_i z = d_i\}.$$

Tekintsük a következő polinomot:

$$F(x, y, z) = \prod_{i=1}^k (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) - \delta \prod_{i=1}^n (x - i)(y - i)(z - i),$$

ahol δ úgy van választva, hogy $F(\underline{0}) = 0$ legyen. Mivel a hipersíkok nem fedik az $(0, 0, 0)$ csúcsot, így $\delta \neq 0$. Ha $k < 3n$ lenne, akkor az F főtagját a második tag adná: $x^n y^n z^n$. Tehát $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ választással a kombinatorikus Nullstellensatz azt adná, hogy létezik egy $(u, v, w) \in S_1 \times S_2 \times S_3$, melyre $F(u, v, w) \neq 0$. De ez lehetetlen, mert $F(\underline{0}) = 0$ és $(u, v, w) \neq \underline{0}$ esetén pedig F mindkét tagja 0. Utóbbi esetben a polinom második tagja automatikusan 0, míg az első tag éppen amiatt 0, mert minden $\underline{0}$ -tól különböző rácsponton átmegy valamelyik sík. Az ellentmondás mutatja, hogy $k \geq 3n$.

3.17. Minden $e \in E(G)$ élhez rendeljünk egy x_e változót. Minden $v \in V(G)$ csúcsra tekintsük a következő polinomokat:

$$P_v(\underline{x}) = \sum_{e:v \in e} x_e^2 \quad (v \in V(G)).$$

Nézzük az $\mathbb{F}_3$ testben a $(P_v)_{v \in V(G)}$ polinomrendszer közös gyökeit. A $\underline{0}$ közös gyök, másrészt $\sum_{v \in V} \deg P_v = 2n < |E(G)| = 2n + 1$. Így a Chevalley-tétel (3.13 feladat) szerint a polinomrendszernek van még egy közös gyöke, legyen $(c_e)_{e \in E(G)}$ ez a közös gyök. Legyen

$$H = \{e \in E(G) \mid c_e \neq 0\} = \{e \in E(G) \mid c_e = \pm 1\}.$$

Ekkor minden v csúcsra 3-mal osztható számú H -beli él illeszkedik, ugyanis $\sum_{e:v \in e} c_e^2 = 0$ csak akkor lehet $\mathbb{F}_3$ testben, ha 3-mal osztható számú 1-es van az összegben. Mivel a legnagyobb fokszám legfeljebb 5, így ez a fokszám 0 vagy 3. Tehát a H -beli élek által feszített gráf egy 3-reguláris részgráfját adja G -nek.

3.18. Minden $e \in E(G)$ élhez rendeljünk egy x_e változót. Tekintsük a következő polinomot:

$$F(\underline{x}) = \prod_{v \in V(G)} \left(1 - \left(\sum_{e:v \in e} x_e \right)^{p-1} \right) - \prod_{e \in E(G)} (1 - x_e).$$

Vegyük észre, hogy F -beli első tag foka $n(p-1)$, míg a második tag foka $|E(G)| > n(p-1)$, mert az átlagfokszám nagyobb, mint $2p-2$. Tehát egy legnagyobb fokú tag $(-1)^{|E(G)|+1} \prod_{e \in E(G)} x_e$. Így a kombinatorikus Nullstellensatzot alkalmazhatjuk az $S_e = \{0, 1\}$ ($e \in E(G)$) halmazokra. Ekkor létezik $\underline{a} \in \{0, 1\}^{E(G)}$, melyre $F(\underline{a}) \neq 0$. Vegyük észre, hogy $\underline{a} \neq \underline{0}$, mert $F(\underline{0}) = 0$. Mivel $\underline{a} \neq \underline{0}$, az F második tagja automatikusan 0. Így az első tag nem 0, hiszen $F(\underline{a}) \neq 0$. Ez azonban azt jelenti, hogy minden csúcsra p -vel osztható olyan f él illeszkedik, amelyre $a_f = 1$, különben a kis Fermat-tétel szerint a szorzat adott csúcshoz tartozó tagja 0 lenne, így persze az egész szorzat is. Legyen az ilyen élek halmaza H . Mivel a legnagyobb fokszám $2p-1$, ezért ez csak úgy lehet ha minden csúcsra 0 vagy p darab H -beli él illeszkedik. Mivel $\underline{a} \neq \underline{0}$, ez megad egy p -reguláris részgráfot: H -beli élek által feszített részgráf megfelel (azon csúcsokat nem vesszük be, melyekre nem illeszkedik H -beli él).

10. fejezet

Spektrálgráfelméleti feladatok – megoldások

10.1. Bevezető feladatok

4.1. Először a (b) részre válaszolunk, az (a) rész ennek könnyű következménye lesz.

Mivel

$$(A^k)_{ij} = \sum a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} i_k},$$

ahol $i_0 = i, i_k = j$, ezért $(A^k)_{ij}$ éppen azon k hosszú séták száma, melyek i -ben kezdődnek és j -ben végződnek. Speciálisan $(A^2)_{ij}$ egyenlő i és j közös szomszédainak számával, ha $i \neq j$, és megegyezik i csúcs fokával, ha $i = j$.

4.2. A (c) feladatra válaszolunk először, az (a) és (b) részek könnyen adódnak utána.

Minden mátrixra $Tr A = \sum \lambda_i$, ahol λ_i -k az A sajátértékei. (A sajátértékek valósak, mert A valós szimmetrikus mátrix.) Másrészt λ_i^k éppen A^k sajátértékei. Így $\sum \lambda_i^k = Tr A^k$. Az előző feladat szerint $Tr A^k$ az olyan k hosszú sétákat számolja meg, amelyek visszatérnek. $k = 1$ esetén hurok-él nélküli gráfban ilyen nincs. $k = 2$ esetén ez $2e(G)$, egy élet kiválasztva oda-vissza lépünk valamelyik végpontjából. $k = 3$ esetén éppen hatszor a háromszögek számát kapjuk.

4.3. (a) Mivel $A(K_n) = J - I$, ahol J a csupa 1 mátrix. J -nek az $\underline{1}$ vektor sajátvektora n sajátértékkel, így $J - I$ -nek is sajátvektora $n - 1$ sajátértékkel. Továbbá $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_i x_i = 0\}$ egy 0 sajátértékhez tartozó $n - 1$ dimenziós sajátaltér J -nek. Ezért K_n sajátértékei: $n - 1$ 1-szeres multiplicitással és -1 sajátérték $n - 1$ -szeres multiplicitással.

(b) Legyenek $K_{n,m}$ két osztályában a csúcsok $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$. Ekkor $A(K_{n,m})$ -nek $\{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mid \sum_i x_i = 0, \sum_j y_j = 0\}$ $n + m - 2$ dimenziós altere a 0 sajátértékhez. A maradék két sajátértéke $\pm\sqrt{nm}$, melyekhez tartozó sajátvektorok $(\pm\sqrt{m}, \dots, \pm\sqrt{m}, \sqrt{n}, \dots, \sqrt{n})$.

4.4. Egyszerűen egyesítjük a két gráf sajátértékeinek (multi)halmazát.

4.5. Legyen λ a G gráf egy sajátértéke és $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ a hozzá tartozó sajátvektor. Ekkor tetszőleges i -re

$$\sum_{j \in N(i)} v_j = \lambda v_i.$$

Legyen k az a csúcs, melyre $|v_k|$ maximális. Ekkor

$$|\lambda v_k| = \left| \sum_{j \in N(k)} v_j \right| \leq \sum_{j \in N(k)} |v_j| \leq d |v_k|.$$

Így $|\lambda| \leq d$. Egyenlőség esetén $v_k = v_j = v$, ha $j \in N(k)$. Ha k helyett j -vel vesszük végig ugyanezt, akkor kapjuk, hogy az $\bar{o}$ szomszédain is v a sajátvektor koordinátájának értéke. Ezt folytatva kapjuk, hogy egy összefüggő komponensen a sajátvektor konstans. Továbbá minden ilyen vektor d -hez tartozó sajátvektora G -nek. Így kapunk egy d -hez tartozó $c(G)$ -dimeziós alteret, ahol $c(G)$ a G összefüggő komponenseinek a száma.

4.6. Ez következik abból, hogy $\text{Tr} A^k = \sum_i \lambda_i^k$ nemnegatív minden k -ra. Valóban,

$$0 \leq \text{Tr} A^k = \sum_i \lambda_i^k \leq (n-1)\lambda_1^k + (-1)^k |\lambda_n|^k.$$

Legyen $k = 2r + 1$. Ekkor $|\lambda_n| \leq (n-1)^{1/k} \lambda_1$. Ezután r -rel tartva a végtelenbe kapjuk az állítást.

4.7. Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ az A mátrix egy ortonormált vektorokból álló sajátbázisa: $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$. Legyen $\underline{x}$ egy tetszőleges egység hosszú vektor. Írjuk fel $\underline{x}$ -et a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ bázisban:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i.$$

Mivel $\underline{v}_i$ -k ortonormáltak, így $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_i \alpha_i^2$. Továbbá

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \underline{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

Tehát $\underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_1 \sum \alpha_i^2 = \lambda_1$ és $\underline{x} = \underline{v}_1$ -re egyenlőség van. Hasonlóan $\underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_n \sum \alpha_i^2 = \lambda_n$ és $\underline{x} = \underline{v}_n$ -re egyenlőség áll fenn. Ha $(\underline{x}, \underline{v}_1) = 0$, akkor $\alpha_1 = 0$ és $\underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_2 \sum \alpha_i^2 = \lambda_2$ és $\underline{x} = \underline{v}_2$ -re egyenlőség van. Általában pedig, ha V_k a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ által feszített vektortér, akkor

$$\max_{\|\underline{x}\|=1, \underline{x} \perp V_k} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_{k+1}$$

az előzőekhez hasonló megfontolások alapján.

4.8. Csak az (a) részt bizonyítjuk, a (b) rész ugyanúgy megy. Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ az A mátrix egy ortonormált vektorokból álló sajátbázisa: $A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$. Ha $U_k = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$, akkor

$$\min_{\substack{\underline{v} \in U_k \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v} = \underline{v}_k^T A \underline{v}_k = \lambda_k$$

a 4.7 feladat megoldásában látott gondolatmenet szerint. Tehát

$$\lambda_k = \min_{\substack{\underline{v} \in U_k \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v} \leq \max_{U: \dim U = k} \min_{\substack{\underline{v} \in U \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v}.$$

Másrészt, ha U tetszőleges k dimenziós altér, akkor nemtriviálisan belemetsz a $V_k = \text{span}(\underline{v}_k, \dots, \underline{v}_n)$ $(n-k+1)$ -dimenziós vektortérbe. Legyen $\underline{w} \in V_k \cap U$, melyre $\|\underline{w}\| = 1$. Mivel $\underline{w} \in V_k$, ezért

$$\underline{w}^T A \underline{w} \leq \lambda_k$$

a 4.7 feladat megoldásában látott gondolatmenet szerint. Tehát

$$\lambda_k \geq \max_{U: \dim U = k} \min_{\substack{\underline{v} \in U \\ \|\underline{v}\|=1}} \underline{v}^T A \underline{v}.$$

Ezzel készen vagyunk.

4.9. Legyen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ az A mátrix ortonormált bázisa. Írjunk fel minden $\underline{u}_i$ vektort ebben a bázisban:

$$\underline{u}_i = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \underline{v}_r.$$

Mivel az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ vektorok 1-hosszúak, így minden i -re

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{ir}^2 = 1.$$

Továbbá

$$\sum_{i=1}^k \underline{u}_i^T A \underline{u}_i = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^n \lambda_r \alpha_{ir}^2 = \sum_{r=1}^n \lambda_r \gamma_r,$$

ahol

$$\gamma_r = \sum_{i=1}^k \alpha_{ir}^2.$$

Ekkor $\sum_r \gamma_r = k$. Másrészt $\gamma_r \leq 1$ minden $1 \leq r \leq n$ esetén. Ugyanis, ha kiegészítjük az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ vektorrendszert $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ ortonormált bázissá és ebben felírjuk a v_r vektort, akkor

$$\underline{v}_r = \sum_{i=1}^n (\underline{u}_i, \underline{v}_r) \underline{u}_i$$

miatt

$$1 = \sum_{i=1}^n (\underline{u}_i, \underline{v}_r)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_{ir}^2 \geq \sum_{i=1}^k \alpha_{ir}^2 = \gamma_r.$$

Másrészt $\sum_{r=1}^n \lambda_r \gamma_r$ maximuma $\sum_r \gamma_r = k$ és $\gamma_r \leq 1$ feltételek mellett éppen $\sum_{i=1}^k \lambda_i$.

4.10. Legyen $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$. Mivel a v_i vektorok ortonormált vektorrendszert alkotnak, így $B v_i = \lambda v_i = A v_i$. Tekintsük azt a V mátrixot, melynek oszlopai a v_i -vektorok. Az előzőek szerint $BV = AV$. Másrészt V oszlopai lineárisan függetlenek, mert ortonormált vektorrendszert alkotnak. Így V invertálható, ebből pedig következik, hogy $A = B$.

$$A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i v_i^T$$

következik az előző állításból és abból, hogy v_i -k ortonormáltak.

4.11. (a) Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, és legyen λ egy sajátértéke, és egy hozzá tartozó sajátvektor $\underline{x}$. Ekkor tetszőleges v csúcsra $\lambda x_v = \sum_{u \in N(v)} x_u$. Tekintsük azt az $\underline{y}$ vektort, melyre $y_v = x_v$, ha $v \in A$, és $y_v = -x_v$, ha $v \in B$. Ekkor könnyen láthatóan $-\lambda y_v = \sum_{u \in N(v)} y_u$ minden v csúcsra. Tehát $\underline{y}$ egy $-\lambda$ -hoz tartozó sajátvektor. Valójában a leképezésünk egy lineáris bijekció a λ -hoz tartozó sajátaltér és a $-\lambda$ -hoz tartozó sajátaltér között, így λ és $-\lambda$ multiplicitása megegyezik.

(b) Legyen $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ a λ_n -hez tartozó egység hosszú sajátvektor. Legyen $\underline{v}^* = (|v_1|, \dots, |v_n|)$. Ekkor

$$\lambda_1 = |\lambda_n| = \underline{v}^T A \underline{v} = \left| \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j \right| \leq \sum_{i,j} a_{ij} |v_i| |v_j| = \underline{v}^{*T} A \underline{v}^* \leq \lambda_1.$$

Ebből következik, hogy mindenhol egyenlőség kell álljon a becslésben, és $\underline{v}^*$ a λ_1 -hez tartozó sajátvektor (lásd a 4.7 feladat megoldását). Mivel G összefüggő, ebből következik, hogy $\underline{v}^*$ -nak nincs 0 eleme, így persze $\underline{v}$ -nek sem. Abból, hogy egyenlőség áll az első becslésben következik, hogy minden $a_{ij}v_i v_j$ elemnek az előjele negatív, melyre $a_{ij} \neq 0$. Így az

$$A = \{i \in V(G) \mid v_i > 0\} \text{ és } B = \{i \in V(G) \mid v_i < 0\}$$

halmazokon belül nem fut él, vagyis ez megadja a gráf egy 2-színezését.

(c) Tekintsük a $G = K_{3,3} \cup K_4$ gráfot. Ekkor G spektruma $\{3^2, 0^4, -1^3, -3\}$ (a kitevők a multiplicitások), de nem páros gráf.

4.12. Legyenek $A(G)$ sajátvektorai $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ úgy megválasztva, hogy ortogonálisak, és $\underline{v}_1 = \underline{1}$. Ekkor $A(\overline{G})\underline{1} = (n-d-1)\underline{1}$, vagyis $n-d-1$ sajátérték. Továbbá $A(G) + A(\overline{G}) = I - J$, így $i \geq 2$ -re $(A(G) + A(\overline{G}))\underline{v}_i = (I - J)\underline{v}_i = -\underline{v}_i$, mert $\underline{v}_i$ és $\underline{1}$ ortogonálisak. Tehát $A(\overline{G})\underline{v}_i = -\underline{v}_i - A(G)\underline{v}_i = (-1 - \lambda_i)\underline{v}_i$. Tehát $\underline{v}_i$ a $\overline{G}$ -nek is sajátvektora, mivel ez n darab ortogonális vektor, így megtaláltuk az összeset. Tehát $\overline{G}$ sajátértékei $n-d-1, -1-\lambda_2, \dots, -1-\lambda_n$.

4.13. Tekintsük $\det(xI - A)$ -t és ebben a nem 0 kifejtési tagokat. Minden egyes kifejtési tagot megfeleltethetünk egy permutációnak. Ebben a permutációban a fixpontoknál x -et választunk ki az átlóból. Tekintsük a permutáció többi ciklusát, ez megad egy $(-1)^k a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$ alakú szorzatot, ahol $i_1, \dots, i_k$ mind különböző. Egy ilyen szorzat azonban majdnem mindig 0, mert egy fában nincsen kör. Csak az lehet, hogy $k = 2$ és $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1}$ szorzatot választottunk ki, ami nem 0, ha i_1 és i_2 szomszédos. Tehát $\det(xI - A)$ nem 0 kifejtési tagjai úgy néznek ki, hogy néhány független élet, mint 2-hosszú ciklust választunk és a többi elem x a főátlóból. Minden egyes 2-hosszú ciklus a permutáció előjelét (-1) -gyel szorozza, így

$$\det(xI - A) = \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j m_j(T) x^{n-2j}.$$

4.14. (a) Legyen $G_1 = K_{1,4}$, $G_2 = K_{2,2} \cup K_1$. Ekkor G_1 és G_2 spektruma is $\{2, 0^3, -2\}$ a 4.3 feladat (b) része szerint.

(b)

Az ábrán látható fák megfelelnek: a karakterisztikus polinomja mindkettőnek $x^8 - 7x^6 + 9x^4$. Valóban, a 4.13 feladat szerint elég ellenőrizni, hogy $m_1(T_i) = 7$ ($i = 1, 2$) és $m_2(T_i) = 9$ ($i = 1, 2$), m_3 -tól meg minden 0.



4.15. Legyen M_G a G gráf csúcs-él incidenciamátrixa. Vegyük észre, hogy ekkor az L_G gráf adjacenciamátrixára teljesül, hogy

$$A(L_G) = M_G^T M_G - 2I_m.$$

Tehát $A(L_G) + 2I_m$ mátrix pozitív szemidefinit, így $\lambda_m(L_G) \geq -2$. Ha $m > n$ akkor $rk(M_G^T M_G) \leq rk(M_G) \leq n < m$, így $A(L_G)$ -nek sajátértéke a -2 .

10.2. Gráfszorzatok, gráftranszformációk

4.16. (a) Megmutatjuk, hogy $G(k)$ spektruma $\{k\mu_1, k\mu_2, \dots, k\mu_n, 0^{(k-1)n}\}$. Legyen $\underline{x}$ egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor minden v csúcsra $\lambda x_v = \sum_{u \in N_G(v)} x_u$. Tekintsük azt az $\underline{\tilde{x}}$ vektort $G(k)$ -hoz, melyre $\tilde{x}_{u'} = x_u$, ha $u' \in K(u)$, ahol $K(u)$ az u csúcsához tartozó független halmaz. Ekkor

$$k\lambda \tilde{x}_{v'} = \sum_{u \in N_{G(k)}(v)} x_{u'},$$

hiszen minden csúcsot k -szorosára fűjtünk. Legyen V azon vektorok altere, melyeknek minden kupacon a koordináták összege 0. Ekkor V a 0 sajátértékhez tartozó $n(k-1)$ dimenziós altér, hiszen $\underline{y} \in V$ esetén minden $v' \in K(v)$ csúcsra

$$\sum_{u \in N_{G(k)}(v)} y_{u'} = \sum_{u \in N_G(v)} \sum_{u' \in K(u)} y_{u'} = \sum_{u \in N_G(v)} 0 = 0 = 0 \cdot y_{v'}.$$

Vegyük észre, hogy ha $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ ortogonális sajátbázisa a G -hez tartozó adjacenciamátrixnak, akkor $\underline{\tilde{v}_1}, \dots, \underline{\tilde{v}_n}, V$ páronként ortogonálisak. Mivel összdimenziójuk nk , így megtaláltuk $G(k)$ minden sajátértékét.

(b) Ugyanezen sajátalterek megfelelnek, a hozzájuk tartozó sajátértékek ezúttal

$$\{k\mu_1 + k - 1, k\mu_2 + k - 1, \dots, k\mu_n + k - 1, (-1)^{(k-1)n}\}.$$

4.17. (a) Megoldás:

$$\{k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n, kd_1^{(k-1)}, kd_2^{(k-1)}, \dots, kd_n^{(k-1)}\}.$$

(b) Megoldás:

$\{k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n, kd_1 + 1^{(k-1)}, kd_2 + 1^{(k-1)}, \dots, kd_n + 1^{(k-1)}\}$. Ez már következik az (a) részből a 4.39 feladat miatt.

4.18. Megmutatjuk, hogy a sajátértékek $\lambda_i \mu_j$, ahol λ_i végigfut G_1 sajátértékein, μ_j pedig végigfut G_2 sajátértékein. Legyen λ egy G_1 -hez tartozó sajátérték $\underline{x}$ sajátvektorral, μ pedig G_2 -hez tartozó sajátérték $\underline{y}$ sajátvektorral. Ekkor

$$\lambda x_u = \sum_{w \in N_{G_1}(u)} x_w \quad \text{és} \quad \mu y_v = \sum_{z \in N_{G_2}(v)} y_z.$$

Legyen $\underline{x} \otimes \underline{y}$ az a vektor, melyre $\underline{x} \otimes \underline{y}(u, v) = x_u y_v$ minden $(u, v) \in V(G_1 \times G_2)$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{(w,z) \in N_{G_1 \times G_2}((u,v))} \underline{x} \otimes \underline{y}(w, z) &= \sum_{(w,z) \in N_{G_1 \times G_2}((u,v))} x_w y_z = \\ &= \left(\sum_{w \in N_{G_1}(u)} x_w \right) \left(\sum_{z \in N_{G_2}(v)} y_z \right) = \lambda x_u \mu y_v = \lambda \mu \underline{x} \otimes \underline{y}(u, v). \end{aligned}$$

Tehát $\underline{x} \otimes \underline{y}$ egy $\lambda \mu$ -hoz tartozó sajátvektora $G_1 \times G_2$ -nek. Ha $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ ortogonális sajátvektorai G_1 adjacenciamátrixának $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékekhez és $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_m$ ortogonális sajátvektorai G_2 adjacenciamátrixának $\mu_1, \dots, \mu_m$ sajátértékekhez, akkor $\underline{x}_i \otimes \underline{y}_j$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) könnyen ellenőrizhetően páronként ortogonális, $\lambda_i \mu_j$ -hez tartozó sajátvektorok. Így megtaláltuk az összes sajátértéket.

4.19. Az előző feladat megoldásához hasonlóan az $\underline{x}_i \otimes \underline{y}_j$ vektorok lesznek $G_1 \star G_2$ sajátvektorai. Ezúttal azonban $\lambda_i \mu_j + \lambda_i + \mu_j$ lesznek a hozzá tartozó sajátértékek.

4.20. Az előző két feladat megoldásához hasonlóan az $\underline{x}_i \otimes \underline{y}_j$ vektorok lesznek $G_1 \square G_2$ sajátvektorai. Ezúttal azonban $\lambda_i + \mu_j$ lesznek a hozzá tartozó sajátértékek.

10.3. Spektrálsugár-becslések

4.21. Ez az egyenlőtlenség triviálisan adódik abból, hogy

$$\lambda(G) = \max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \max_{\|\underline{x}\|=1} 2 \sum_{i < j, (i,j) \in E(G)} x_i x_j.$$

4.22. (a) Az első egyenlőtlenség következik abból, hogy $K_{1,D}$ részgráfja G -nek, így $\sqrt{D} = \lambda(K_{1,D}) \leq \lambda(G)$ a 4.3(b) és 4.21 feladat megoldását felhasználva.

Legyen $\underline{x}$ a $\lambda = \lambda(G)$ -hez tartozó egyik sajátvektor. Legyen v egy olyan csúcs, melyre x_v maximális. Ekkor

$$\lambda x_v = \sum_{u \in N(v)} x_u \leq d(v)x_v \leq Dx_v.$$

Tehát $\lambda \leq D$.

(b) Legyen $\underline{v}$ az a vektor, mely minden koordinátában $1/\sqrt{n}$. Ekkor $\|\underline{v}\| = 1$, így

$$\frac{2e(G)}{n} = \underline{v}^T A \underline{v} \leq \max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda(G).$$

A felső becslés a következőképpen adódik: legyen $\lambda(G) = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ az összes sajátérték. Ekkor

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \left(-\sum_{i=2}^n \lambda_i \right)^2 = \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 = \\ &= (n-1)(2e(G) - \lambda_1^2). \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy $\sum_i \lambda_i = 0$ és $\sum_i \lambda_i^2 = 2e(G)$, lásd az 4.2 feladatot.) Átrendezés után kapjuk az állítást.

4.23. Legyen $\underline{v}$ az a vektor, mely minden koordinátában $1/\sqrt{n}$. Ekkor $\|\underline{v}\| = 1$, így

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2 = \underline{v}^T A^2 \underline{v} \leq \max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A^2 \underline{x} = \lambda(G)^2.$$

4.24. Legyen $\underline{x}$ a G gráf legnagyobb sajátértékéhez tartozó egység hosszú nemnegatív sajátvektor. Ekkor

$$\lambda(G) = \underline{x}^T A(G) \underline{x},$$

ahol $A(G)$ a G gráf adjacenciamátrixa. Hasonlóan, legyen $A(G_i)$ a G_i gráf adjacenciamátrixa. Ekkor $A(G) = A(G_1) + A(G_2)$. (Ha az uniót nem multigráfként értelmezzük, akkor $A(G) \leq A(G_1) + A(G_2)$, ahol az egyenlőtlenséget elemenként értelmezzük.)

$$\lambda(G) = \underline{x}^T A(G) \underline{x} \leq \underline{x}^T A(G_1) \underline{x} + \underline{x}^T A(G_2) \underline{x} \leq$$

$$\leq \max_{\|\underline{y}\|=1} \underline{y}^T A(G_1) \underline{y} + \max_{\|\underline{z}\|=1} \underline{z}^T A(G_2) \underline{z} = \lambda(G_1) + \lambda(G_2).$$

Felhasználtuk a 4.7 feladat állítását.

4.25. Legyenek a T fa sajátértékei $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Mivel T egy páros gráf, így $\lambda_n = -\lambda_1$ a 4.11 feladat szerint. Felhasználva a 4.2 feladat állítását kapjuk, hogy

$$2(n-1) = 2e(G) = \sum_i \lambda_i^2 \geq 2\lambda_1^2.$$

Így $\lambda_1 \leq \sqrt{n-1}$. Egyenlőség fennállhat: $K_{1,n-1}$ csillag legnagyobb sajátértéke $\sqrt{n-1}$ a 4.3(b) feladat megoldása szerint.

10.4. Gráfparaméterek becslései

4.26. Legyen X és Y karakterisztikus vektora $\underline{x}$, illetve $\underline{y}$. Ekkor $e(X, Y) = \underline{x}^T A \underline{y}$. Írjuk fel $\underline{x}$ -et és $\underline{y}$ -t az A mátrix egy ortonormált sajátbázisában:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \quad \text{és} \quad \underline{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i,$$

ahol $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}$. Ekkor $|X| = (\underline{x}, \underline{x}) = \sum_i \alpha_i^2$, $|Y| = (\underline{y}, \underline{y}) = \sum_i \beta_i^2$, továbbá $\alpha_1 = (\underline{x}, \underline{v}_1) = |X|/\sqrt{n}$ és $\beta_1 = |Y|/\sqrt{n}$. Végül

$$e(X, Y) = \underline{x}^T A \underline{y} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i \right) = \sum_i \lambda_i \alpha_i \beta_i.$$

Vegyük észre, hogy $\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 = \frac{d|X||Y|}{n}$. Így

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - \frac{d|X||Y|}{n} \right| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \leq \lambda \sum_{i=2}^n |\alpha_i| |\beta_i| \leq \\ &\lambda \left(\sum_{i=2}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=2}^n |\beta_i|^2 \right)^{1/2} \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \lambda |X|^{1/2} |Y|^{1/2}. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ugyanez a bizonyítás azt is mutatja, hogy

$$\left| e(X, Y) - \frac{d|X||Y|}{n} \right| \leq \lambda \left(|X| - \frac{|X|^2}{n} \right)^{1/2} \left(|Y| - \frac{|Y|^2}{n} \right)^{1/2}$$

is teljesül.

4.27. (a) Alkalmazzuk a 4.7 feladat állítását a Laplace-mátrixra. (A feladat állítása az adjacenciamátrixra vonatkozott, de a feladat megoldása mutatja, hogy valójában tetszőleges valós, szimmetrikus mátrixra igaz a feladat állítása.)

$$\mu_1 = \max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T L(G) \underline{x} = \max_{\|\underline{x}\|=1} \sum_{(i,j) \in E(G)} (x_i - x_j)^2.$$

Tekintsük azt az $\underline{u}$ vektort, melyre $u_v = -b$, ha $v \in A$, és $u_v = a$, ha $v \in V \setminus A$. Ekkor

$$\sum_{(i,j) \in E(G)} (x_i - x_j)^2 = e(A, V \setminus A)(a + b)^2 = e(A, V \setminus A)n^2$$

Továbbá $\|\underline{u}\|^2 = ab^2 + ba^2 = nab$. Így

$$e(A, V \setminus A)n^2 = \underline{u}^T L(G) \underline{u} \leq \mu_1 \|\underline{u}\|^2 = \mu_1 nab.$$

Ebből adódik az (a) rész állítása.

(b) Mivel a G gráf d -reguláris, így $\mu_1 = d - \lambda_n$. Így az (a) rész eredményéből kapjuk, hogy

$$e(A, V \setminus A) \leq (d - \lambda_n) \frac{ab}{n} \leq (d - \lambda_n) \frac{n}{4}.$$

Megjegyzés: Erdős Pál nevezetes észrevétele, hogy egy gráfnak mindig van olyan vágása, amely az éleknek legalább a felét tartalmazza.

4.28. Alkalmazzuk a 4.27 feladat (a) részének eredményét arra a vágásra, ami egy $\alpha(G)$ méretű független halmaz és a többi csúcs között megy. Ekkor $e(A, V \setminus A) = d\alpha(G)$. Másrészt $\mu_1 = d - \lambda_n$. Így

$$d\alpha(G) = e(A, V \setminus A) \leq (d - \lambda_n) \frac{\alpha(G)(n - \alpha(G))}{n}.$$

Ebből átrendezés után kapjuk, hogy

$$\alpha(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{d - \lambda_n}.$$

4.29. Legyen S egy $\alpha(G)$ méretű független részgráf G -ben. Legyen V_α azon vektorok halmaza $\mathbb{R}^n$ -ben, melyek tartója S . Ekkor $\dim V_\alpha = |S| = \alpha(G)$. Legyen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ ortonormált vektorokból álló sajátbázisa $A = A(G)$ -nek és legyenek $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ a hozzátartozó sajátértékek: $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$. Legyenek $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ azon vektorok, melyre $\lambda_i > 0$. Legyen $V_+ = \langle \underline{v}_i \mid i = 1, \dots, k \rangle$. Ekkor $\dim V_+ = n - n_-$. Ha $\alpha(G) > n_-$ lenne akkor lenne $0 \neq \underline{u} \in V_\alpha \cap V_+$. Legyen $\underline{u} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$. Ekkor $\underline{u}^T A \underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i^2 > 0$. Másrészt $\underline{u} \in S$ miatt $\underline{u}^T A \underline{u} = 2 \sum_{(i,j) \in E(G)} u_i u_j = 0$ ellentmondás mutatja, hogy $\alpha(G) \leq n_-$. Hasonlóan adódik, hogy $\alpha(G) \leq n_+$.

10.5. Erősen reguláris gráfok

4.30. Az $A^2 + (\mu - \lambda)A - (k - \mu)I = \mu J$ azonosság adódik abból, hogy A^2 -ben az átlóban a foksámok vannak, két különböző csúcsnál pedig a közös szomszédok száma, amely most λ vagy μ attól függően, hogy össze vannak-e kötve vagy sem. Legyen $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ egy sajátvektora A -nak: $A\underline{v} = \vartheta \underline{v}$. Ekkor

$$(\vartheta^2 + (\mu - \lambda)\vartheta - (k - \mu))\underline{v} = \mu J\underline{v}.$$

Az i -edik koordinátákat összehasonlítva kapjuk, hogy

$$(\vartheta^2 + (\mu - \lambda)\vartheta - (k - \mu))v_i = \mu \sum_{i=1}^n v_i.$$

Ha $\vartheta^2 + (\mu - \lambda)\vartheta - (k - \mu) \neq 0$, akkor minden v_i megegyezik, így $\underline{v} = c \cdot \underline{1}$ vektor. Ez valóban sajátvektor, még hozzá a k sajátértékhez tartozik. Ha $\vartheta^2 + (\mu - \lambda)\vartheta - (k - \mu) = 0$, akkor megoldva a másodfokú egyenletet kapjuk, hogy

$$\vartheta_{1,2} = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}{2}.$$

Legyen f és g a ϑ_1 és ϑ_2 sajátértékek multiplicitása. Ekkor

$$1 + f + g = n,$$

mert összesen n sajátérték van és

$$k + f\vartheta_1 + g\vartheta_2 = 0,$$

mert a sajátértékek összege 0. Ebből kapjuk, hogy

$$f, g = \frac{1}{2} \left(v - 1 \mp \frac{2k + (v - 1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right).$$

Megjegyzés: mivel f, g multiplicitások, ezért nemnegatív egész számok. Ez nagyon erős feltétel az (n, k, λ, μ) számokra. Ez az ún. *integralitási* feltétel.

4.31. (a) A Petersen-gráf erősen reguláris gráf $(10, 3, 0, 1)$ paraméterekkel. A 4.30 feladatot alkalmazva kapjuk, hogy a spektruma $\{3, 1^5, -2^4\}$.

(b) A Paley-gráf erősen reguláris gráf $(p, \frac{p-1}{2}, \frac{p-5}{4}, \frac{p-1}{4})$ paraméterekkel. Eből kapjuk, hogy a sajátértékei $\frac{p-1}{2}$ 1-szeres multiplicitással és $\frac{-1 \pm \sqrt{p}}{2}$ pedig $(p-1)/2$ multiplicitással.

4.32. Felhasználjuk a 4.30 feladat állítását, mely szerint $A^2 + (\mu - \lambda)A - (k - \mu)I = \mu J$. Másrészt $x^2 + (\mu - \lambda)x - (k - \mu) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2)$, hiszen $\vartheta_{1,2}$ éppen ezen másodfokú egyenlet két gyöke volt. Tehát

$$(A - \vartheta_1 I)(A - \vartheta_2 I) = \mu J.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt az $\underline{1}$ vektorral. Ekkor kapjuk, hogy

$$(A - \vartheta_1 I)(A - \vartheta_2 I)\underline{1} = (A - \vartheta_1 I)(k - \vartheta_2)\underline{1} = (k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2)\underline{1},$$

illetve

$$\mu J \underline{1} = \mu n \underline{1}.$$

Így

$$(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = n\mu.$$

4.33. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}$ racionális, azaz egész. Ekkor

$$\vartheta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right)$$

racionálisak, és mivel egy 1 főegyütthatós egész együtthatós polinom gyökei, ezért egészek.

Ha $\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}$ nem racionális, akkor az

$$f, g = \frac{1}{2} \left(v - 1 \mp \frac{2k + (v - 1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right)$$

csak akkor lehet egész, speciálisan racionális, ha $2k + (v - 1)(\lambda - \mu) = 0$. Mivel $0 \leq k \leq v - 1$, ezért csak három lehetőség van: $k = 0, \frac{1}{2}(v - 1), v - 1$. Az első és utolsó esetben G üres, vagy a teljes gráf, ekkor azonban egészek a sajátértékei. Ha $k = \frac{1}{2}(v - 1)$, akkor $\mu - \lambda = 1$. Használjuk fel még, hogy

$(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$. Most $v - k - 1 = k$, így $\mu = k - \lambda - 1$. Így $2\mu = (\lambda + 1) + (k - \lambda - 1) = k$, azaz $\mu = \frac{1}{4}(v - 1)$ és $\lambda = \frac{1}{4}(v - 5)$. Tehát ekkor G konferenciagráf.

4.34. Legyen G egy (p, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf, ahol p prím. Ha nem minden sajátérték egész, akkor az előző feladat szerint G konferenciagráf, és készen vagyunk. Megmutatjuk, hogy ha G -nek minden sajátértéke egész, akkor üres vagy teljes gráf, amit a feladat feltevése kizár.

Mivel egy erősen reguláris gráf komplementere is erősen reguláris, elég belátni, hogy ha $k \leq (p - 1)/2$, akkor G üres gráf. (Egy reguláris egész spektrumú gráf komplementerének is egészek a sajátértékei.) Használjuk fel a 4.32 feladat állítását: $(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = p\mu$. Mivel minden szám egész, ezért

$$p \mid (k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2).$$

Másképp $|k - \vartheta_1|, |k - \vartheta_2| \leq 2k \leq (p - 1)$. Így csak az lehet, hogy $(k - \vartheta_1), (k - \vartheta_2)$ valamelyike 0. Ekkor $(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = p\mu$ miatt $\mu = 0$. Ez csak akkor lehet, ha G néhány ugyanakkora méretű teljes gráf uniója. Mivel p prím, ez csak K_p vagy pK_1 lehet. Előbbiben viszont a foksám $p - 1 > (p - 1)/2$. Így csak az utóbbi lehet, vagyis G az üres gráf, vagyis ellentmondásra jutottunk.

4.35. (a) A $(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$ összefüggésbe helyettesítve $\lambda = 0, \mu = 1$ értékeket kapjuk, hogy $v = k^2 + 1$.

(b) Ha G konferenciagráf, akkor $\mu = 1$ miatt $v = 5, k = 2$. Ezeknek a paramétereknek az 5 hosszú kör meg is felel. Ha G nem konferenciagráf, akkor a sajátértékei egészek, vagyis

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4k - 3})$$

egész, azaz $4k - 3 = s^2$ valamilyen s egész számra. Ekkor $k = \frac{1}{4}(s^2 + 3)$. Továbbá az

$$f, g = \frac{1}{2} \left(v - 1 \mp \frac{2k + (v - 1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right)$$

képletbe előbb k -t beírva majd k -t kifejezve s -sel kapjuk, hogy

$$f, g = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{s^2 + 3}{4} \right)^2 \pm 2 \frac{\frac{s^2 + 3}{4} - \left(\frac{s^2 + 3}{4} \right)^2}{s} \right).$$

Tehát

$$f = \frac{s^5 + 6s^3 + 9s + 8(s^2 + 3) - (s + 3)^2}{32s}$$

egész. Mivel $32f$ is egész, így $(8 \cdot 3 - 3^2)/s$ is egész, azaz $s \mid 15$. Az $s = 1, 3, 5, 15$ értékekre kapjuk, hogy $k = 1, 3, 7, 57$. Tehát k az $1, 2, 3, 7, 57$ értékek valamelyike.

(c) Az első négy értékre létezik megfelelő gráf, sőt egyértelműek: K_2 , C_5 öthosszú kör, Petersen-gráf és az ún. Hoffman–Singleton-gráf. Nyitott, hogy létezik-e $(3250, 57, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf. (Természetesen a feladat kérdésére mindenki a saját tudásának megfelelően válaszol.)

4.36. A $(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$ összefüggésbe helyettesítve $\lambda = 0, \mu = 2$ értékeket kapjuk, hogy $v = \frac{1}{2}k(k + 1) + 1$. A keresett gráf nem lehet konferenciagráf, mert $\lambda - \mu = -2$, nem pedig -1 . Így a sajátértékei egészek, vagyis $\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} = \sqrt{4(k - 1)}$ egész szám. Így $k = r^2 + 1$.

Megjegyzés: $r = 1, 2, 3$ esetén létezik ilyen gráf: C_4 $(4, 2, 0, 2)$ paraméterű, a Clebsch-gráf $(16, 5, 0, 2)$ paraméterű, a Gewirtz-gráf $(56, 10, 0, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráfok.

4.37. Tegyük fel, hogy sikerült K_{10} -et felbontani három éldiszjunkt Petersen-gráf uniójára. Legyen az adjacenciamátrixuk A, B, C . Ekkor $J - I = A + B + C$. Az $\underline{1}$ vektor mindegyiknek sajátvektora: $A\underline{1} = B\underline{1} = C\underline{1} = 3 \cdot \underline{1}$. Minden más sajátvektor merőleges $\underline{1}$ -re. A Petersen-gráf sajátértékei $\{3, 1^5, -2^4\}$. Tekintsük az A -nak és a B -nek $\underline{1}$ sajátértékhez tartozó 5-dimenziós V_A , illetve V_B sajátalterét. Ezek merőlegesek $\underline{1}$ -re, így egy 9-dimenziós térben vannak. Mivel $\dim V_A + \dim V_B = 10$, így van nem triviális metszetük: $0 \neq \underline{u} \in V_A \cap V_B$. Ekkor

$$Cu = (J - I)\underline{u} - A\underline{u} - B\underline{u} = -\underline{u} - \underline{u} - \underline{u} = (-3)\underline{u},$$

vagyis a -3 sajátértéke C -nek. Másrészt -3 nem sajátértéke a Petersen-gráfnak, így C nem lehet egy Petersen-gráf adjacenciamátrixa, ellentmondás.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy felbontottuk a K_{10} -et két Petersen-gráf és egy G gráf éldiszjunkt uniójára. Ekkor az előző megoldás szerint G -nek -3 sajátértéke. Megmutatható, hogy G összefüggő, ami azzal ekvivalens, hogy G nem $K_4 \cup K_{3,3}$. Ekkor G páros gráf, mivel 3-reguláris (vagyis a 3 a legnagyobb sajátértéke) és -3 sajátértéke.

10.6. Laplace-sajátértékek

4.38. Legyen $\underline{1}$ a csupa 1 vektor. Ekkor $L(G)\underline{1} = 0$, így a 0 sajátértéke $L(G)$ -nek. Megmutatjuk, hogy minden más sajátértéke nemnegatív, vagyis

$L(G)$ pozitív szemidefinit, tehát 0 a legkisebb sajátérték. Ez valóban teljesül, mert tetszőleges $\underline{x}$ vektorra

$$\underline{x}^T L(G) \underline{x} = \sum_{(i,j) \in E(G)} (x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

4.39. Vegyük észre, hogy $L(G) + L(\overline{G}) = nI - J$. Legyen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ ortonormált sajátbázisa $L(G)$ -nek, ahol $\underline{v}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{1}$. Nyilván $L(\overline{G})\underline{v}_n = 0$, így a 0 marad a sajátértéke. Ha $i \neq n$ akkor $\underline{v}_i$ ortogonális $\underline{v}_n$ -re azaz $\underline{1}$ -re, így

$$L(\overline{G})\underline{v}_i = (nI - J - L(G))\underline{v}_i = n\underline{v}_i - 0 - \mu_i \underline{v}_i = (n - \mu_i) \underline{v}_i.$$

Tehát $L(\overline{G})$ sajátértékei $n - \mu_1, \dots, n - \mu_{n-1}, 0$.

4.40. Az üres gráf Laplace-spektruma $\{0^n\}$, így a 4.39 feladat szerint $L(K_n)$ spektruma $\{n^{n-1}, 0\}$. (A kitevők a megfelelő sajátértékek multiplicitása.)

A $K_{n,m}$ komplementere $K_n \cup K_m$, aminek a Laplace-spektruma a fentiek szerint $\{n^{n-1}, 0\} \cup \{m^{m-1}, 0\}$. Így a 4.39 feladat szerint $K_{n,m}$ spektruma $\{n + m, n^{n-1}, m^{m-1}, 0\}$. (A kitevők a megfelelő sajátértékek multiplicitása.)

4.41. Az (a) állítás egyszerűen következik abból, hogy G azon feszítőfái, melyek nem tartalmazzák az e élt, megfelelnek $G - e$ feszítőfáinak, míg azon feszítőfák, amelyek tartalmazzák az e élet, kölcsönösen egyértelműen megfelelnek G/e feszítőfáinak mégpedig úgy, hogy minden egyes ilyen feszítőfában az e élet összehúzva éppen G/e egy feszítőfáját kapjuk, és ez visszafelé is igaz.

A (b) állítást tetszőleges G multigráfra bizonyítjuk az élek számára való indukcióval. Az üres gráfra az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy az n -edik csúcsnak megfelelő oszlopot és sort töröljük. Két esetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy v_n izolált pont vagy sem.

1. eset. Tegyük fel, hogy v_n izolált csúcs G -ben. Ekkor $\tau(G) = 0$. Másrészt $\det(L(G)_n) = 0$ szintén teljesül, mert az $L(G)_n$ oszlopainak az összege a $\underline{0}$ vektor, így a determináns 0. Tehát ebben az esetben készen vagyunk.

2. eset. Tegyük fel, hogy v_n nem izolált csúcs, feltehető, hogy $e = (v_{n-1}, v_n) \in E(G)$ (az is lehet, hogy több ilyen él van, mert G multigráf). Legyen $\underline{l}_{n-1}$ az $(n-1)$ -edik sorvektora $L(G)_n$ -nek, és legyen $\underline{s} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ az a vektor, amely $(n-2)$ darab 0-ból és egy darab 1-esből áll. Tekintsük az A_{n-1} és B_{n-1} mátrixokat, amelyeket úgy kapunk $L(G)_n$ -ből, hogy utolsó sorvektorát lecseréljük az $\underline{l}_{n-1} - \underline{s}$, illetve $\underline{s}$ vektorokra. Ekkor

$$\det L(G)_n = \det A_{n-1} + \det B_{n-1}.$$

Vegyük észre, hogy $A_{n-1} = L(G-e)_n$, mivel $G-e$ gráfnak 1-gyel kevesebb éle van, mint G -nek, így indukcióval kapjuk, hogy $\det A_{n-1} = \det L(G-e)_n = \tau(G-e)$.

Másrészt, $\det B_{n-1} = \det A_{n-2}$, ahol $A_{n-2} = L(G)_{\{n-1,n\}}$. Vegyük ugyanis észre, hogy A_{n-2} semmi más, mint $L(G/e)_u$, ahol u az $n-1$ -edik és n -edik csúcs összehúzásával kapott csúcs. Mivel G/e -nek 1-gyel kevesebb éle van, mint G -nek, így indukcióból kapjuk, hogy $\det A_{n-2} = \det L(G/e)_u = \tau(G-e)$. Tehát

$$\det L(G)_n = \tau(G-e) + \tau(G/e) = \tau(G).$$

4.42. Legyen $\det(xI - L(G)) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}a_1x + (-1)^na_0$. Másrészt a karakterisztikus polinom gyökei éppen a sajátértékek, így $\det(xI - L(G)) = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_{n-1})(x - \mu_n) = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_{n-1})x$, mivel $\mu_n = 0$. Tehát $a_0 = 0$ és $a_1 = \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i$. Másrészt a mátrixos alakot használva közvetlenül látjuk, hogy

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \det L(G)_i,$$

hiszen a főátlóból egy x -et választhatunk és a maradék $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát. A 4.41 feladat szerint ez tetszőleges i -re éppen $\tau(G)$. Így $a_1 = n\tau(G)$. Tehát $n\tau(G) = a_1 = \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i$.

4.43. (a) A 4.40 feladat szerint $L(K_n)$ spektruma $\{n^{n-1}, 0\}$. A 4.42 feladat szerint

$$\tau(K_n) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i = \frac{1}{n} n^{n-1} = n^{n-2}.$$

(b) A 4.40 feladat szerint $K_{n,m}$ Laplace-spektruma $\{n+m, n^{m-1}, m^{n-1}, 0\}$. Tehát az 4.42 feladat szerint

$$\tau(K_{n,m}) = \frac{1}{n+m} \prod_{i=1}^{n+m-1} \mu_i = n^{m-1}m^{n-1}.$$

4.44. Először tekintsük a gráf komplementerét, ez nem más, mint $K_{a_1} \cup K_{a_2} \cup \dots \cup K_{a_k}$. A 4.40 feladat szerint ennek a spektruma $\{a_1^{a_1-1}, a_2^{a_2-1}, \dots, a_k^{a_k-1}, 0^k\}$. (A kitevők a megfelelő sajátértékek multiplicitása.) Tehát a 4.39 feladat szerint a feladatban szereplő gráf Laplace-spektruma $\{(n-a_1)^{a_1-1}, (n-a_2)^{a_2-1}, \dots, (n-a_k)^{a_k-1}, n^{k-1}, 0\}$. Így a 4.42 feladat szerint a gráf feszítőfáinak száma $\prod_{i=1}^k (n-a_i)^{a_i-1} \cdot n^{k-2}$.

4.45. Valójában ez a 4.44 feladat speciális esete $n-k$ darab 1 elemű és egy darab k elemű osztállyal, így csak be kell helyettesíteni az ott adódó képletbe: $(n-k)^{k-1}n^{n-k-1}$.

4.46. Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_k$ a feladatban szereplő k független él. Legyen S a K_n összes feszítőfájának halmaza. Legyen A_i azon feszítőfák halmaza, melyek nem tartalmazzák az e_i élet. Ekkor mi éppen $S \setminus \cup_{i=1}^k A_i$ halmaz elemszámát szeretnénk meghatározni. A logikai szita szerint

$$|S \setminus \cup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j_1 < \dots < j_i} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}|,$$

ahol az $i = 0$ -hoz tartozó tag $|S|$. Vegyük észre, hogy $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}$ éppen a $K_n \setminus \{e_{j_1}, \dots, e_{j_i}\}$ feszítőfájának halmaza. Erre alkalmazható a 4.44 feladat eredménye i darab 2 és egy $n - 2i$ darab 1 elemű osztállyal:

$$|A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}| = (n - 2)^i n^{n-i-2}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} |S \setminus \cup_{i=1}^k A_i| &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (n - 2)^i n^{n-i-2} = \\ &= (n - (n - 2))^k n^{n-k-2} = 2^k n^{n-k-2}. \end{aligned}$$

Tehát a keresett szám $2^k n^{n-k-2}$.

4.47. A 4.46 feladat gondolatmenetét fogjuk követni. Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_k$ a feladatban szereplő csillag élei. Legyen S a K_n összes feszítőfájának halmaza. Legyen A_i azon feszítőfák halmaza, melyek nem tartalmazzák az e_i élet. Ekkor mi éppen $S \setminus \cup_{i=1}^k A_i$ halmaz elemszámát szeretnénk meghatározni. A logikai szita szerint

$$|S \setminus \cup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j_1 < \dots < j_i} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}|,$$

ahol az $i = 0$ -hoz tartozó tag $|S|$. Vegyük észre, hogy $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}$ éppen a $K_n \setminus \{e_{j_1}, \dots, e_{j_i}\}$ feszítőfájának halmaza. Ennek a gráfnak a komplementere $K_{1,i} \cup (n - i + 1)K_1$, így a 4.40 feladat szerint a Laplace-spektruma $\{i + 1, 1^{i-1}, 0^{n-i}\}$. Tehát 4.39 szerint $K_n \setminus \{e_{j_1}, \dots, e_{j_i}\}$ Laplace-spektruma $\{n - i - 1, n - 1^{i-1}, n^{n-i-1}, 0\}$, így a 4.42 feladat szerint

$$|A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}| = (n - i - 1)(n - 1)^{i-1} n^{n-i-2}.$$

Tehát

$$|S \setminus \cup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (n - i - 1)(n - 1)^{i-1} n^{n-i-2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (n-1)(n-1)^{i-1} n^{n-i-2} - \\
&\quad - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} i (n-1)^{i-1} n^{n-i-2} = \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (n-1)^i n^{n-i-2} - \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} i (n-1)^{i-1} n^{n-i-2} = \\
&= (n - (n-1))^k n^{n-k-2} - \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{k}{i} \binom{k-1}{i-1} i (n-1)^{i-1} n^{n-i-2} = \\
&= n^{n-k-2} - k \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k-1}{i-1} (n-1)^{i-1} n^{n-i-2} = \\
&= n^{n-k-2} + k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k-1}{j} (n-1)^j n^{n-j-3} = \\
&= n^{n-k-2} + k(n - (n-1))^{k-1} n^{n-k-2} = (k+1)n^{n-k-2}.
\end{aligned}$$

Tehát a keresett szám $(k+1)n^{n-k-2}$.

4.48. A 4.31(a) feladat szerint a Petersen-gráf adjacenciamátrixának spektruma $\{3, 1^5, -2^4\}$, így a Laplace-spektruma $\{0, 2^5, 5^4\}$, hiszen $L(G) = 3I - A(G)$. Tehát a 4.42 feladat szerint a Petersen-gráf feszítőfáinak száma $\frac{1}{10} 2^5 5^4 = 2^4 5^3 = 2000$.

4.49. A 4.31(b) feladat szerint a Petersen-gráf adjacenciamátrixának spektruma $\{\frac{p-1}{2}, \frac{-1+\sqrt{p}}{2}^{(p-1)/2}, \frac{-1-\sqrt{p}}{2}^{(p-1)/2}\}$, így a Laplace-spektruma $\{0, \frac{p-\sqrt{p}}{2}^{(p-1)/2}, \frac{p+\sqrt{p}}{2}^{(p-1)/2}\}$, hiszen $L(G) = \frac{p-1}{2}I - A(G)$. Tehát a 4.42 feladat szerint a Paley-gráf feszítőfáinak száma

$$\frac{1}{p} \left(\frac{p-\sqrt{p}}{2} \right)^{(p-1)/2} \left(\frac{p+\sqrt{p}}{2} \right)^{(p-1)/2} = \frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{4} \right)^{(p-1)/2}.$$

4.50. Legyenek $\overline{G}$ Laplace-mátrixának sajátértékei $\mu_1(\overline{G}), \dots, \mu_{n-1}(\overline{G}), \mu_n(\overline{G}) = 0$. Ekkor a 4.39 feladat szerint G Laplace-mátrixának sajátértékei $n - \mu_1(\overline{G}), \dots, n - \mu_{n-1}(\overline{G}), 0$. A 4.42 feladat szerint $\overline{G}$ feszítőfáinak számára fennáll, hogy

$$\tau(\overline{G}) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i(\overline{G}).$$

Tehát

$$\tau(\overline{G}) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i(\overline{G}) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} (n - \mu_i(G)) = \frac{1}{n^2} L(G, n).$$

4.51. Legyenek $L(G)$ sajátértékei $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0$. Ekkor az $L(G) + xJ$ sajátértékei $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, nx$, mert ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ ortogonális sajátbázisa $L(G)$ -nek, ahol $\underline{v}_n = \underline{1}$, akkor

$$(L(G) + xJ)\underline{v}_i = L(G)\underline{v}_i = \mu_i \underline{v}_i,$$

ha $1 \leq i \leq n-1$ és $(L(G) + xJ)\underline{v}_n = xn\underline{v}_n$. Így

$$\det(L(G) + xJ) = \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i \cdot nx = n^2 \tau(G)x.$$

11. fejezet

Valószínűségszámítási módszerek a kombinatorikában – megoldások

11.1. Várható érték és változtatott véletlen

5.1. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. Legyen A és B két diszjunkt halmaz, és tegyük minden $v \in V(G)$ csúcsot $1/2 - 1/2$ valószínűséggel A -ba vagy B -be. Így (A, B) megadja a G gráfnak egy véletlen vágását. Legyen X a keresztbe menő élek száma. Egy $f \in E(G)$ él esetén legyen I_f annak az eseménynek az indikátor valószínűségi változója, hogy az f él két végpontja különböző halmazokban van, vagyis I_f pontosan akkor 1, ha f benne van a vágásban. Tehát $X = \sum_{f \in E(G)} I_f$. Egy adott f él esetén annak a valószínűsége, hogy keresztbe megy, $1/2$. Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{f \in E(G)} I_f \right) = \sum_{f \in E(G)} \mathbb{E}I_f = \\ &= \sum_{f \in E(G)} \Pr(f \text{ keresztbe megy}) = \sum_{f \in E(G)} \frac{1}{2} = \frac{e(G)}{2}.\end{aligned}$$

Tehát X várható értéke $e(G)/2$, így pozitív valószínűséggel X értéke legalább ennyi. Tehát van olyan vágása G -nek, ami legalább az élek felét tartalmazza.

5.2. Az előző megoldást módosítsuk úgy, hogy A -nak a $V(G)$ egy véletlen $\lceil n/2 \rceil$ méretű halmazát választjuk, és $B = V \setminus A$. Legyen $f \in E(G)$ tetszőleges él. Ha $n = 2k$, akkor

$$\mathbb{P}r(f \text{ keresztbe megy}) = \frac{2 \binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{k}{2k-1}.$$

Ha $n = 2k - 1$, akkor

$$\mathbb{P}r(f \text{ keresztbe megy}) = \frac{2 \binom{2k-3}{k-1}}{\binom{2k-1}{k}} = \frac{k}{2k-1}.$$

Innen a bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előző feladatnál, és kapjuk, hogy G -nek van olyan vágása, amely az éleknek legalább $k/(2k-1)$ részét tartalmazza.

5.3. Legyenek a G és H gráf csúcsai az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemei. Legyen $\pi \in S_n$ egy véletlen permutáció, és $\pi(H)$ az a gráf, melynek élei $\{\pi(i)\pi(j) \mid (i, j) \in E(H)\}$. Legyen X a G és $\pi(H)$ közös éleinek a száma. Legyen I_f ($f \in E(G)$) annak az indikátor valószínűségi változója, hogy $e \in \pi(H)$ vagy sem. Ekkor $\mathbb{P}r(f \in \pi(H)) = \frac{e(H)}{\binom{n}{2}}$. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{f \in E(G)} I_f \right) = \sum_{f \in E(G)} \mathbb{E}I_f = \\ &= \sum_{f \in E(G)} \mathbb{P}r(f \in \pi(H)) = \sum_{f \in E(G)} \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} = \frac{e(G)e(H)}{\binom{n}{2}}. \end{aligned}$$

Tehát pozitív valószínűséggel létezik π permutáció, melyre $G \cap \pi(H)$ éleinek száma legalább $\frac{e(G)e(H)}{\binom{n}{2}}$, így ez a gráf megfelel a feltételeknek.

5.4. (a) Színezzük K_n éleit $1/2 - 1/2$ valószínűséggel kékre, illetve pirosra. Megmutatjuk, hogy pozitív valószínűséggel nincs benne k olyan csúcs, ami egyszínű részgráfot feszít. Így definíció szerint $R(k, k) \geq n$. Legyen S egy k elemű halmaz. Ekkor

$$\mathbb{P}r(S \text{ egyszínű}) = 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy egy véletlen színezés nem jó:

$$\mathbb{P}r(\text{létezik } S \text{ egyszínű, } |S| = k) \leq$$

$$\leq \sum_{|S|=k} \mathbb{P}r(S \text{ egyszínű}) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

A feladat feltételei szerint ez kisebb mint 1, így pozitív valószínűséggel egy véletlen színezés jó lesz.

(b) Most egy kicsit másképp járunk el, először kiszínezzük K_n éleit $1/2 - 1/2$ valószínűséggel kékre, illetve pirosra, majd úgy javítjuk meg a színezést, hogy minden egyszínű k -asból kidobunk egy pontot. Legyen S egy k elemű halmaz, és I_S az az indikátor változó, ami 1, ha S egyszínű részgráfot feszít és 0 egyébként. Legyen X az egyszínű k -asok száma. Ekkor $X = \sum_{|S|=k} I_S$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{|S|=k} I_S \right) = \sum_{|S|=k} \mathbb{E}I_S = \\ &= \sum_{|S|=k} \mathbb{P}r(S \text{ egyszínű}) = \sum_{|S|=k} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

Tehát pozitív valószínűséggel legfeljebb $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ egyszínű k -as lesz. Vegyünk egy olyan színezést, ahol legfeljebb ennyi egyszínű k -as van, és dobjunk ki mindegyikről egy pontot. Ekkor nem maradt egyszínű k -as. Tehát $R(k, k) \geq n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$.

Az (a) részből azt a becslést kapjuk, hogy

$$R(k, k) > \frac{1}{e\sqrt{2}}(1 + o(1))k2^{k/2}.$$

A (b) részből azt kapjuk, hogy

$$R(k, k) > \frac{1}{e}(1 + o(1))k2^{k/2}.$$

Nem meglepő, hogy a (b) részben szereplő gondolatmenet erősebb eredményt ad, mivel ez lényegében általánosítása az (a) részben szereplő gondolatmenetnek.

(c) Legyen $k \approx 2 \log_2 n$ úgy, hogy $n > 2^{k/2}$, és vegyük K_n egy olyan színezését kék és piros színekkel, amely nem tartalmaz egyszínű k -ast. Vegyük a kék élek által feszített részgráfot. Ekkor a feltételek szerint a legnagyobb üres és a legnagyobb teljes részgráf is legfeljebb $k - 1$ méretű: $\alpha(G), \omega(G) \leq k - 1$. Így

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} > \frac{n}{C \log n}$$

és $\omega(G) < C \log n$ alkalmas C -re.

5.5. Tetszőleges játékospárra döntsük el véletlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel, hogy melyik nyert. Megmutatjuk, hogy ha n elég nagy, akkor pozitív valószínűséggel k -jós lesz a verseny végeredménye. Adott k versenyző esetén annak a valószínűsége, hogy egy adott ember legyőzte mindegyiket, $1/2^k$. Tehát annak a valószínűsége, hogy a maradék $n - k$ emberből egyik sem győzte le mind a k embert, $(1 - 1/2^k)^{n-k}$. Így annak a valószínűsége, hogy a végeredmény nem k -jós, legfeljebb

$$\binom{n}{k} (1 - 1/2^k)^{n-k}.$$

Kis számolás után kapjuk, hogy ez kisebb mint 1, ha $n > k^2 \cdot 2^k$.

5.6. Irányítsunk minden élel véletlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel. Legyen X valószínűségi változó a Hamilton-utak száma. A csúcsok egy adott $\pi \in S_n$ permutációjára legyen I_π annak az indikátor valószínűségi változója, hogy $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ Hamilton-utat határoz meg. Ekkor $X = \sum_{\pi \in S_n} I_\pi$ és $\mathbb{P}r(I_\pi = 1) = 1/2^{n-1}$, hiszen $n - 1$ élnek kell a megfelelő irányba mutatnia. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{\pi \in S_n} I_\pi \right) = \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{E}I_\pi = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{P}r(I_\pi = 1) = \sum_{\pi \in S_n} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n!}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Tehát pozitív valószínűséggel van olyan irányítás, melyben legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-út van.

5.7. Vegyük a csúcsoknak egy véletlen $\pi \in S_n$ sorrendjét, és karikázzunk be egy csúcsot, ha az összes szomszédja hátrébb van a sorrendben, mint az adott csúcs. Legyen X a bekarikázott csúcsok száma. Legyen I_v annak az indikátor valószínűségi változója, hogy a v csúcs be van karikázva. Ekkor $X = \sum_{v \in V(G)} I_v$ és $\mathbb{P}r(I_v = 1) = 1/(d(v)+1)$, hiszen a v csúcs és a szomszédai együtt $d(v) + 1$ elemet határoznak meg, és az összes sorrend $1/(d(v) + 1)$ -ed részében lesz v az első csúcs ezen elemek között. Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in V(G)} I_v \right) = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}I_v = \\ &= \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}r(I_v = 1) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v) + 1}. \end{aligned}$$

Tehát van olyan sorrendje a csúcsoknak, amelyben legalább

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v) + 1}$$

bekarikázott csúcs van. De ők egy független halmazt alkotnak, mert ha két csúcs össze van kötve, akkor a sorrendben hátrébb levőt biztosan nem karikázzuk be. Tehát

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

5.8. A megoldás teljesen hasonlóan megy az előző feladat bizonyításához, csak ezúttal azon csúcsokat karikázzuk be egy véletlen sorrendben, amelyeket legfeljebb 1 szomszédjuk előz meg a sorrendben. Könnyen meggondolható, hogy tetszőleges sorrendre a bekarikázott elemek körmentes részgráfot feszítenek.

5.9. Legyen az n elemű halmaz $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Válasszunk egy véletlen $\alpha \in [0, 1]$ számot, és legyen

$$B(\alpha) = \{b_i \in B \mid \{\alpha b_i\} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\},$$

ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli. Vegyük észre, hogy $a_1, a_2, a_3 \in B(\alpha)$ esetén nem lehet $a_1 + a_2 = a_3$, mert akkor $\{\alpha a_1\} + \{\alpha a_2\} \equiv \{\alpha a_3\}$, de ez nem állhat fenn három $1/3$ és $2/3$ közötti számra. Legyen I_j annak az indikátor valószínűségi változója, hogy $b_j \in B(\alpha)$. Ekkor $|B(\alpha)| = \sum_j I_j$ és $\Pr(I_j = 1) = 1/3$. Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_j I_j \right) = \sum_j \mathbb{E}I_j = \\ &= \sum_j \Pr(I_j = 1) = \sum_j \frac{1}{3} = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

Tehát pozitív valószínűséggel van olyan halmaz, mely legalább $n/3$ méretű, és az $a_1 + a_2 = a_3$ egyenletnek nincs megoldása benne.

5.10. A taktika a következő: választunk egy véletlen S halmazt, és legyen $T = T(S)$ azon csúcsok halmaza, amelyekre sem ők, sem szomszédjaik nincsenek benne S -ben. Ekkor $S \cup T$ egy domináló halmaz. Az S -t úgy választjuk, hogy minden csúcsot p valószínűséggel beválasztunk S -be. Ekkor egy adott v csúcs esetén $\Pr(v \in T) = (1-p)^{1+d(v)} \leq (1-p)^{1+\delta} \leq e^{-p(\delta+1)}$, hiszen sem v , sem a szomszédjai nincsenek kiválasztva. Így

$$\mathbb{E}(|S| + |T|) = \mathbb{E}|S| + \mathbb{E}|T| \leq n(p + e^{-p(\delta+1)}).$$

Legyen

$$p = \frac{\ln(\delta + 1)}{\delta + 1}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(|S| + |T|) \leq n(p + e^{-p(\delta+1)}) = \frac{n(1 + \ln(\delta + 1))}{(\delta + 1)}.$$

Tehát pozitív valószínűséggel van egy legfeljebb ekkora méretű domináló halmaz.

5.11. Legyen $G(n, p)$ az a véletlen gráf, amelynek n csúcsa van, és minden csúcspárt egymástól függetlenül $p = p(n)$ valószínűséggel beválasztunk a gráf élei közé, és $1 - p$ valószínűséggel nem. Ebben a bizonyításban legyen $p = n^{-\alpha}$, ahol $\alpha \geq 0$ később megválasztandó paraméter. Először is becsüljük az ℓ -nél rövidebb körök számát. Egy adott $v_1 v_2 \dots v_r$ csúcsok akkor alkotnak kört, ha $v_i v_{i+1}$ ($r + 1 = 1$) mindegyike él, ennek a valószínűsége p^r . Nyilván a $v_1 v_2 \dots v_r$ csúcssorozatot $n(n - 1) \dots (n - r + 1)$ -féleképpen választhatjuk ki, csak arra kell figyelni, hogy ugyanezt a kört megszámláltuk $2r$ -szer (elforgatva és tükrözve). Legyen X a legfeljebb ℓ hosszú körök száma egy véletlen gráfban, és $X(v_1 \dots v_r)$ ($r \leq \ell$) az az indikátor valószínűségi változó, hogy $v_1 \dots v_r$ egy kört alkot vagy sem. Így

$$X = \sum_{r, v_1 \dots v_r} X(v_1 \dots v_r).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{r, v_1 \dots v_r} \mathbb{E}X(v_1 \dots v_r) = \\ &= \sum_{r=3}^{\ell} \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{2r} p^r \leq \sum_{r=3}^{\ell} \frac{(np)^r}{2r}. \end{aligned}$$

Legyen $M = \sum_{r=3}^{\ell} \frac{(np)^r}{2r}$. Tegyük fel, hogy p megfelelő megválasztásával M -et kicsinek tudjuk választani, ekkor pozitív valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legfeljebb M lesz, így mindegyik ilyen körről kidobva egy csúcsot kapunk egy legalább $n - M$ csúcsú gráfot, amiben nincs legfeljebb ℓ hosszú kör. Valójában nekünk egy kicsit ügyesebbnek kell lenni: az kell nekünk, hogy nagy valószínűsége legyen annak, hogy kevés legfeljebb ℓ hosszú kör legyen. Szerencsére ezt azonnal megkapjuk: legalább $1/2$ valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legfeljebb $2M$. (Persze, ha több, mint $1/2$ valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legalább $2M$, akkor a várható érték nagyobb lenne M -nél.)

Mielőtt rátérnénk p megválasztására, nézzük meg, hogyan becsülhető a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma. Itt azt az egyszerű észrevételt tesszük, hogy

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)},$$

ugyanis minden színosztály független halmazt feszít, így méretük legfeljebb $\alpha(G)$. Tehát ahhoz, hogy $\chi(G)$ nagy legyen, elég biztosítani, hogy $\alpha(G)$ kicsi legyen. Becsüljük annak a valószínűségét, hogy $\alpha(G) \geq s$. Egy s méretű S halmazra legyen A_S az az esemény, hogy S nem feszít élet. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r(\alpha(G) \geq s) &\leq \sum_{|S|=s} \mathbb{P}r(A_S) = \binom{n}{s} (1-p)^{\binom{s}{2}} \leq \\ &\leq n^s (1-p)^{\binom{s}{2}} \leq (ne^{-p(s-1)/2})^s. \end{aligned}$$

(Az utolsó lépésben azt használtuk, hogy $1+x \leq e^x$ teljesül minden x valós számra, ez egy meglehetősen standard becslés, ami nem is rossz, ha x kicsi.) Most már látható, hogy mit kell szem előtt tartanunk: legyen M kicsi (konkrétan $o(n)$), amihez az kell, hogy p kicsi legyen, másrészt legyen s nem túl nagy, de $ne^{p(s-1)/2} < 1$. Ezt könnyedén elérhetjük: legyen $p = n^{\theta-1}$ ahol $\theta = \frac{1}{2\ell}$ és $s = \lceil \frac{3}{p} \log n \rceil$. Ekkor

$$M = \sum_{r=3}^{\ell} \frac{(np)^r}{2r} \leq n^{\theta\ell} \sum_{r=3}^{\ell} \frac{1}{2r} \leq n^{1/2} \log n \leq \frac{n}{4},$$

ha n elég nagy. Míg

$$\mathbb{P}r(\alpha(G) \geq s) \leq (ne^{-p(s-1)/2})^s \leq 1/4,$$

ha n elég nagy. Mivel $\mathbb{P}r(X \geq 2M) \leq 1/2$ és $\mathbb{P}r(\alpha(G) \geq s) \leq 1/4$, ezért pozitív valószínűséggel létezik egy gráf, melyben a legfeljebb ℓ hosszú körök száma kevesebb mint $n/2$, és $\alpha(G) \leq s$. Most dobjunk ki minden legfeljebb ℓ hosszú körből 1 pontot, és legyen G^* a kapott gráf. Ekkor a G^* gráfnak legalább $n/2$ csúcsa van, és nincs benne legfeljebb ℓ hosszú kör. Továbbá, mivel $\alpha(G^*) \leq \alpha(G)$ (hiszen G^* feszített részgráfja G -nek), így

$$\chi(G^*) \geq \frac{|V(G^*)|}{\alpha(G^*)} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\theta} \log n} = \frac{n^{\theta}}{6 \log n}.$$

Ha n elég nagy, akkor ez nagyobb mint k . Ezzel készen vagyunk.

5.12. Legyen p később megválasztandó valószínűség. Vegyünk minden A_i halmazt p valószínűséggel a kiválasztandó halmazok közé. Legyen X a kiválasztott halmazok száma, Y pedig azon A_i, A_j, A_k „rossz” hármasok száma,

melyek mindegyike ki van választva, $A_i \cup A_j = A_k$ és a három halmaz különböző. Legyen az ilyen hármasok száma M az eredeti halmazcsaládban. Ekkor $M \leq \binom{m}{2} \leq m^2/2$, mert A_i, A_j már meghatározza A_k -t. Ekkor $\mathbb{E}X = mp$ és $\mathbb{E}Y = Mp^3$. Így

$$\mathbb{E}(X - Y) = mp - Mp^3 \geq np - \frac{m^2}{2}p^3.$$

Ha $p = m^{-1/2}$ akkor $\mathbb{E}(X - Y) \geq \frac{1}{2}m^{1/2}$. Így pozitív valószínűséggel van olyan halmaz, melyben $X - Y$ legalább $\frac{1}{2}m^{1/2}$, vagyis ha minden rossz hármasból törölünk egy elemet, akkor kaptunk egy legalább $\frac{1}{2}m^{1/2}$ méretű halmazt, melyben nincs megoldása a $B_1 \cup B_2 = B_3$ halmazegyenletnek.

Megjegyzés: Dilworth tételéből könnyen látható, hogy egy halmazcsalád tartalmaz $\sqrt{m}$ méretű láncot vagy antiláncot. Így $f(m) \geq \sqrt{m}$.

5.13. Egy egyszerű n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle van. Így egy n csúcsú e élű gráfnak legalább $e - (3n - 6)$ élpárja keresztezi egymást (miért?). Tehát

$$X(G) \geq e(G) - 3v(G).$$

(Itt a $+6$ nem lesz fontos számunkra.)

A trükk az, hogy ezt az egyenlőtlenséget nem az eredeti gráfra használjuk, hanem egy véletlen feszített részgráfjára. Legyen $0 \leq p \leq 1$, és tekintsük azt a G_p véletlen gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát p valószínűséggel megtartjuk és $1 - p$ valószínűséggel kitöröljük. Az élek természetesen a megtartott csúcsok között mennek. Nézzük meg, hogy G_p -nek várhatóan hány csúcsa, éle és keresztezése lesz. Nyilván

$$\mathbb{E}v(G_p) = pv(G) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}e(G_p) = p^2e(G),$$

hiszen annak a valószínűsége, hogy egy csúcs megmarad az p , annak a valószínűsége, hogy egy él megmarad (vagyis egyik végpontját sem töröljük ki) p^2 . Kicsit óvatosabbnak kell lennünk $\mathbb{E}X(G_p)$ kiszámolásával, valójában ezt csak becsülni fogjuk. Kiindulva G egy optimális lerajzolásából minden keresztezés p^4 eséllyel marad meg, ennyi a valószínűsége annak, hogy a keresztemetsző élpár egyetlen csúcsát sem töröltük ki. Tehát G optimális lerajzolásából kiindulva $p^4X(G)$ lesz a keresztemetszések számának várható értéke. Viszont lehet, hogy G_p -nek van egy jobb lerajzolása, mint amit G -ből kapnánk, így mi a következő egyenlőtlenséget állíthatjuk:

$$\mathbb{E}X(G_p) \leq p^4X(G).$$

Tehát

$$p^4X(G) - p^2e(G) + 3pv(G) \geq \mathbb{E}X(G_p) - \mathbb{E}e(G_p) + 3\mathbb{E}v(G_p) =$$

$$= \mathbb{E}(X(G_p) - e(G_p) + 3v(G_p)) \geq 0.$$

Tehát $p^4 X(G) - p^2 e(G) + 3pv(G) \geq 0$ minden $0 \leq p \leq 1$ esetén. Válasszuk p -t $\frac{4v(G)}{e(G)}$ -nek, ez a feltételek szerint legfeljebb 1. Ekkor

$$X(G) \geq p^{-2}e(G) - 3p^{-3}v(G) = \frac{e(G)^3}{64v(G)^2}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

5.14. A taktika a következő: választunk egy véletlen S halmazt, és legyen T azon hiperélek halmaza, melyeknek egyetlen eleme sincs kiválasztva. Ekkor minden T -beli élből kiválasztva egy-egy csúcsot, az S -sel együtt kapunk egy $|S| + |T|$ méretű lefogó halmazt. Az S -et úgy választjuk, hogy minden csúcsot p valószínűséggel választunk S -be. Ekkor egy $e \in E(H)$ hiperélre $\mathbb{P}r(e \in T) = (1 - p)^k \leq e^{-pk}$. Így

$$\mathbb{E}(|S| + |T|) = \mathbb{E}|S| + \mathbb{E}|T| \leq np + me^{-pk}.$$

Vegyük észre, hogy ha $\frac{\alpha \log k}{k} > 1$, akkor nincs mit bizonyítanunk, kiválaszthatjuk az összes csúcsot. Tehát feltehető, hogy $\frac{\alpha \log k}{k} \leq 1$. Ekkor legyen

$$p = \frac{\alpha \log k}{k}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(|S| + |T|) = \mathbb{E}|S| + \mathbb{E}|T| \leq n \frac{\alpha \log k}{k} + \frac{m}{k^\alpha}.$$

Tehát pozitív valószínűséggel van egy legfeljebb ekkora méretű lefogó halmaz.

5.15. Legyen

$$h(k, s) = (k-1) \left\lceil \frac{s-1}{k} \right\rceil \left(\frac{k-1}{k} (s-1) \right)^{k-1}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $G = (V, E)$ k -uniform hipergráf legfeljebb $h(k, s)$ éllel, akkor $(s-1)$ -színezhető. Színezzük V -t véletlen választással

$$t = \left\lfloor \frac{k-1}{k} (s-1) \right\rfloor$$

színnel. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy él monokromatikus, $t/t^k = 1/t^{k-1}$, így a monokromatikus élek számának várható értéke:

$$\frac{|E|}{t^{k-1}} \leq \frac{|E|}{\left(\frac{k-1}{k} (s-1) \right)^{k-1}} \leq (k-1) \left\lceil \frac{s-1}{k} \right\rceil.$$

Tehát létezik színezés, melyben a monokromatikus élek száma legfeljebb $(k-1)\lceil \frac{s-1}{k} \rceil$. Vegyünk $(k-1)\lceil \frac{s-1}{k} \rceil$ pontot, melyek lefedik ezeket az éleket, és színezzük újra ezeket a pontokat a megmaradt $\lceil \frac{s-1}{k} \rceil$ színnel úgy, hogy minden színt legfeljebb $k-1$ -szer használunk. Ez egy jó $(s-1)$ -színezés lesz.

5.16. Válasszunk minden élet p valószínűséggel a $G' = (A, B, E)$ gráfba, és legyen $X = X(G')$ az élek száma és $Y = Y(G')$ a $K_{s,t}$ -k száma. Ekkor $\mathbb{E}X = n^2 p$. Másrészt

$$\mathbb{E}Y = 2 \binom{n}{s} \binom{n}{t} p^{st} \leq \frac{2n^{s+t}}{s!t!} p^{st}.$$

Legyen

$$p = n^{-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(X - Y) \geq \left(1 - \frac{2}{s!t!}\right) n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Tehát pozitív valószínűséggel van egy G' gráf, melyben $X(G') - Y(G')$ legalább ekkora. Most töröljük ki G' minden $K_{s,t}$ példányából egy élet. A kapott G gráfban nincs $K_{s,t}$, és

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{2}{s!t!}\right) n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

5.17. Legyen $c(H)$ a körök száma a H gráfban. Tetszőleges H gráfban a körök száma legalább $e(H) - v(H) + 1$, azaz $c(H) - e(H) + v(H) \geq 0$ minden H gráfra. Legyen G_p a G gráf egy véletlen részgráfja, amit úgy kapunk, hogy G minden csúcsát p valószínűséggel beválasztjuk G_p -be. Ekkor $\mathbb{E}v(G_p) = pv(G)$ és $\mathbb{E}e(G_p) = p^2 e(G)$. Mivel minden kör legalább 3-hosszú, így

$$\mathbb{E}c(G_p) \leq c(G)p^3.$$

Tehát

$$0 \leq \mathbb{E}(c(G_p) - e(G_p) + v(G_p)) \leq c(G)p^3 - e(G)p^2 + v(G)p.$$

Legyen $p = 2v(G)/e(G)$. Ekkor kapjuk, hogy

$$c(G) \geq e(G)p^{-1} - v(G)p^{-2} = \frac{e(G)^2}{4v(G)}.$$

Ezzel készen vagyunk.

5.18. (a) Legyen $T(m, r)$ Turán-gráf, melynek k -adik osztálya ($1 \leq k \leq r$) a_k méretű. Ekkor $a_k = \lfloor m/r \rfloor$ vagy $\lceil m/r \rceil$. Legyenek G egy m színnel való színezésének színosztályai $S_1, \dots, S_m$. Tekintsük $V(G)$ azon partícióit r osztályra, ahol egy osztály éppen a_k darab S_i osztály egyesítéséből áll. Ekkor egy $e \in E(G)$ él $\frac{t(m, r)}{\binom{m}{2}}$ valószínűséggel megy keresztbe, így a keresztbe menő élek számának várható értéke $e \frac{t(m, r)}{\binom{m}{2}}$, tehát pozitív valószínűséggel van olyan r -partíció, amely legalább ennyi élt tartalmaz.

(b) Ez az előző rész speciális esete $r = 2, m = 2s$ -re:

$$\frac{t(2s, 2)}{\binom{2s}{2}} = \frac{s}{2s-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4s-2}.$$

(c) Mivel $e(G) \geq \binom{n}{2}$, mert bármely két színosztály között kell mennie élnek (különben össze lehetne őket vonni egyetlen színosztályba), így $\chi(G) \leq rn$. Tehát az (a) rész szerint tartalmaz egy r -kromatikus gráfot legalább

$$e(G) \frac{t(rn, r)}{\binom{rn}{2}} = e(G) \frac{\binom{r}{2} n^2}{\binom{rn}{2}} = \binom{r}{2} n^2$$

éllel.

5.19. Vegyünk egy T_{n-1} tournamentet $n-1$ ponton, melynek $P(n-1)$ Hamilton-útja van. Vegyünk fel egy új pontot, és minden élet közte és az eredeti $n-1$ pont között irányítsunk $1/2 - 1/2$ valószínűséggel az egyik, illetve másik irányba. Annak a valószínűsége, hogy T_{n-1} egy Hamilton-útja bezárható egy körre a véletlen n csúcsú tournamentben, $1/4$. Így a Hamilton-körök számának várható értéke $P(n-1)/4$. Tehát van olyan irányítás, amelyben legalább ennyi Hamilton-kör van.

5.20. Legyen T egy véletlen halmaz, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsot p valószínűséggel beválasztunk T -be. Ekkor $\mathbb{E}|T| = pn$ és a T által feszített élek várható értékének száma $\mathbb{E}(e(T)) = p^r e(H)$. Ekkor

$$\mathbb{E}(|T| - e(T)) = pn - p^r e(H).$$

Legyen

$$p = p_0 = \left(\frac{n}{2e(H)} \right)^{1/(r-1)}.$$

Ekkor $p_0 n - p_0^r e(H) = p_0 n/2$. Így

$$\mathbb{E}(|T| - e(T)) = \frac{1}{2} p_0 n.$$

Tehát van olyan T halmaz, melyre $|T| - e(T) \geq \frac{1}{2}p_0n$. Legyen $S \subseteq T$ halmaz olyan, amit úgy kapunk T -ből, hogy a T halmaz által feszített minden élből elhagyunk egy pontot. Ekkor S halmaz nem feszít élet és

$$|S| \geq |T| - e(T) \geq \frac{1}{2}p_0n = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2e} \right)^{1/(r-1)} n.$$

5.21. Válasszunk minden kupacból egyenletes valószínűséggel 1 pontot. Legyen X az így kiválasztott csúcsok által meghatározott élek száma. Legyen I_{ij} az az indikátor valószínűségi változó, hogy a V_i és V_j kupacokból kiválasztott csúcsok között megy-e él. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E} \left(\sum_{(i,j) \in E(H)} I_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in E(H)} \mathbb{E}I_{ij} = \\ &= \sum_{(i,j) \in E(H)} \frac{e(V_i, V_j)}{N^2} = \frac{e(G)}{N^2} > e - 1. \end{aligned}$$

Tehát van olyan választása a csúcsoknak, hogy több, mint $e - 1$ vagyis e él megy közöttük. Így ők éppen H egy példányát feszítik ki.

11.2. Második momentum módszer

5.22. (a)

$$\mathbb{E}X = \int X dP \geq \int_{\{X \geq \lambda\}} X dP \geq \int_{\{X \geq \lambda\}} \lambda dP = \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda).$$

(b) Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget $Y = (X - \mu)^2$ -re. Ekkor $\mathbb{E}Y = \text{Var}(X) = \sigma^2$ definíció szerint.

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) = \mathbb{P}(Y \geq \lambda^2\sigma^2) \leq \frac{\mathbb{E}Y}{\lambda^2\sigma^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5.23. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r(X = 0) + \mathbb{E}X &= \mathbb{P}r(X = 0) + \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}r(X = k) \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}r(X = k) = 1. \end{aligned}$$

Tehát ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n = 0$, akkor $1 \geq \mathbb{P}(X_n = 0) \geq 1 - \mathbb{E}X_n$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1.$$

(b) Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \mathbb{E}X) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}X^2}.$$

Ebből valóban azonnal következik, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{(\mathbb{E}X_n)^2} = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0.$$

5.24. Először legyen $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ahol X_i az A_i esemény indikátor valószínűségi változója.

Ha $\mathbb{P}(A_i) = p_i$, akkor

$$\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 = p_i - p_i^2 \leq p_i = \mathbb{E}X_i.$$

Továbbá

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}X_i \cdot \mathbb{E}X_j \leq \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i + \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j). \end{aligned}$$

Tehát

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}X + \Delta.$$

Így az állítás következik a 5.23 feladat (b) részéből, illetve a Csebisev-egyenlőtlenségből (5.22 feladat).

5.25. Vegyük észre, hogy

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) \sum_{j \sim i} \mathbb{P}(A_j | A_i).$$

A belső összeg a szimmetria miatt független i -től:

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} \mathbb{P}(A_j \mid A_i).$$

Tehát

$$\Delta = \sum_i \mathbb{P}(A_i) \Delta^* = \Delta^* \sum_i \mathbb{P}(A_i) = \Delta^* \mathbb{E}X.$$

Így az állítás következik a 5.24 feladat állításából.

5.26. Legyen S egy 4 elemű részhalmaza $V(G)$ -nek, ahol $G = G(n, p)$ véletlen gráf. Az A_S az az esemény, hogy S klikket feszít G -ben. Legyen X_S az A_S esemény indikátorfüggvénye. Legyen X a K_4 -ek száma G -ben. Ekkor

$$X = \sum_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S|=4}} X_S.$$

Így

$$\mathbb{E}X = \sum_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S|=4}} \mathbb{E}X_S = \binom{n}{4} p^6 \leq \frac{(pn^{2/3})^6}{24}.$$

Ha $p(n)n^{2/3} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, akkor $\mathbb{E}X \rightarrow 0$, ahogy n tart a végtelenbe. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\omega(G) \geq 4) = 0.$$

Most tegyük fel, hogy $p(n)n^{2/3} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$. Ekkor $\mathbb{E}X \rightarrow \infty$, ahogy n tart a végtelenbe. Az 5.25 feladatot fogjuk használni: minden 4-elemű halmaz ugyanúgy néz ki, így az X_S valószínűségi változók szimmetrikusak. Az $S \sim T$, ha $|S \cap T| \geq 2$, különben A_S és A_T események függetlenek lennének, mivel nem lenne közös élük. Rögzítsünk egy S halmazt. Ekkor $6\binom{n-2}{2} = O(n^2)$ darab T halmaz metszi két csúcsban S -t és $4\binom{n-3}{1} = O(n)$ darab T halmaz metszi 3 elembe S -t. Az előbbi esetben $\mathbb{P}(A_T | A_S) = p^5$, míg az utóbbi esetben $\mathbb{P}(A_T | A_S) = p^3$. Ekkor

$$\Delta^* = O(n^2 p^5) + O(np^3) = o(n^4 p^6) = o(\mathbb{E}X),$$

mivel $p(n)n^{-2/3} \rightarrow \infty$. Így az 5.25 feladat szerint K_4 majdnem biztosan megjelenik a gráfban.

5.27. (a) Kicsit általánosabb eredményt bizonyítunk.

Legyen H egy gráf v csúcson és e éllel. A $\rho(H) = \frac{e}{v}$ mennyiséget a H sűrűségének hívjuk. A H gráfot *kiegyensúlyozottnak* hívjuk, ha minden H' részgráfjára $\rho(H') \leq \rho(H)$. A H gráfot *szigorúan kiegyensúlyozottnak* hívjuk ha minden valódi H' részgráfjára $\rho(H') < \rho(H)$.

Vegyük észre, hogy K_4^- és K_4 is szigorúan kiegyensúlyozott gráfok. Mi az alábbi állítást látjuk be.

Legyen H egy kiegyensúlyozott gráf v csúcson és e élen. Legyen $A(G)$ az az esemény, hogy H (nem feltétlenül feszített) részgráfja G -nek. Ekkor az A küszöbfüggvénye $p = n^{-v/e}$.

Minden v elemű S halmazra legyen A_S az az esemény, hogy $G[S]$ -nek H részgráfja. Ekkor

$$p^e \leq \mathbb{P}(A_S) \leq v!p^e.$$

Legyen X_S az A_S esemény indikátor valószínűségi változója. Legyen továbbá

$$X = \sum_{|S|=v} X_S.$$

Tehát A pontosan akkor teljesül, ha $X > 0$. A várható érték linearitása miatt

$$\mathbb{E}X = \sum_{|S|=v} \mathbb{E}X_S = \binom{n}{v} \mathbb{P}(A_S) = \Theta(n^v p^e).$$

Tehát, ha $p(n)n^{e/v} \rightarrow 0$, akkor $\mathbb{E}X = o(1)$, így $X = 0$ majdnem mindig.

Most tegyük fel, hogy $p(n)n^{e/v} \rightarrow \infty$. Ekkor $\mathbb{E}X \rightarrow \infty$. Vizsgáljuk megint Δ^* -t (lásd az 5.25 feladatot). Az 5.25 feladat eredményét fogjuk használni, ezt megtehetjük, mert az A_S események valóban szimmetrikusak. Az $S \sim T$, ha $S \neq T$ és van közös éle az általuk feszített teljes részgráfnak, vagyis ha $2 \leq |S \cap T| \leq v-1$. Ekkor

$$\Delta^* = \sum_{T \sim S} \mathbb{P}(A_T | A_S) = \sum_{i=2}^v \sum_{|T \cap S|=i} \mathbb{P}(A_T | A_S).$$

Legyen i rögzített. Ekkor $\binom{v}{i} \binom{n-v}{v-i} = O(n^{v-i})$ -féleképpen választhatjuk a T halmazt. Az $S \cap T$ által feszített részgráfnak i csúcsa van, és mivel ez részgráfja H -nak és H kiegyensúlyozott volt, így a metszetben legfeljebb $i \frac{e}{v}$ él van. Így legalább $e - i \frac{e}{v}$ él nincs S -ben. Tehát

$$\mathbb{P}(A_T | A_S) = O(p^{e - i \frac{e}{v}}).$$

Így

$$\Delta^* = \sum_{i=2}^{v-1} O(n^{v-i} p^{e - i \frac{e}{v}}) = \sum_{i=2}^{v-1} O((n^v p^e)^{1-i/v}) =$$

$$= \sum_{i=2}^{v-1} o(n^v p^e) = o(\mathbb{E}X),$$

mivel $n^v p^e \rightarrow \infty$. Így az 5.25 feladat szerint H majdnem biztosan megjelenik a gráfban.

5.28. Valójában csak azt kell bizonyítani, hogy $G(n, p_a(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan tartalmaz izolált pontot, míg $G(n, p_f(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan összefüggő. A másik két állítás következik ebből.

Először bebizonyítjuk, hogy $G(n, p_a(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan tartalmaz izolált pontot. Továbbiakban legyen $p = p_a(n)$. Legyen X az izolált pontok száma. Legyen X_v az az indikátor valószínűségi változó, hogy X_v izolált pont vagy sem. Ekkor

$$X = \sum_{v \in V} X_v.$$

Vegyük észre, hogy $\mathbb{P}(X_v = 1) = (1 - p)^{n-1}$. Tehát

$$\mathbb{E}X = \sum_{v \in V} \mathbb{E}X_v = n(1 - p)^{n-1} \sim n e^{-\log n + \omega(n)} \rightarrow \infty.$$

Számoljuk ki $\mathbb{E}X^2$ -t is.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \sum_{v \in V} \mathbb{E}X_v^2 + 2 \sum_{u, v \in V} \mathbb{E}X_u X_v = \\ &= n(1 - p)^{n-1} + n(n-1)(1 - p)^{2n-3}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \\ &= n(1 - p)^{n-1} + n(n-1)(1 - p)^{2n-3} - n^2(1 - p)^{2(n-1)} \leq \\ &\leq n(1 - p)^{n-1} + pn^2(1 - p)^{2n-3} \leq \\ &\leq \mathbb{E}X + p(1 - p)^{-3}n^2 \exp\left(-2n \left(\frac{\log n - \omega(n)}{n}\right)\right) = \\ &= \mathbb{E}X + p(1 - p)^{-3}e^{2\omega(n)}. \end{aligned}$$

Feltehetjük, hogy $\omega(n) \leq \log \log n$, mert ha ekkor is majdnem biztosan van izolált pont, akkor nagyobb $\omega(n)$ függvényre is. Ekkor

$$p(1 - p)^{-3}e^{2\omega(n)} \leq 2 \frac{\log^3 n}{n} \leq 1$$

elég nagy n -re. (Felhasználtuk, hogy $(1-p)^{-3} \leq 2$ nagy n -re.) Tehát

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}X + 1.$$

Így

$$\mathbb{P}r(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}X} + \frac{1}{(\mathbb{E}X)^2} \rightarrow 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $G(n, p_a(n))$ majdnem biztosan tartalmaz izolált csúcsot.

Most belátjuk, hogy $G(n, p_f(n))$ aszimptotikusan majdnem biztosan összefüggő. Legyen $p = p_f(n)$, és jelölje X_k a k csúcsú komponensek számát. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r(G(n, p) \text{ nem összefüggő}) &= \mathbb{P}r\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k \geq 1\right) \leq \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{E}X_k \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}, \end{aligned}$$

ugyanis $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatjuk a komponens k csúcsát, és ezen k csúcs valamint a többi $n-k$ csúcs között nincs él. (Valójában még az is feltétel, hogy a k csúcs összefüggő komponenst alkot, de ezt nem használjuk.) Becsüljük ezt az összeget az

$$1 - t \leq e^{-t} \quad \text{és} \quad k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

becslések felhasználásával:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pk(n-k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{en}{k} e^{pk} e^{-pn}\right)^k = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(e^{1-\omega(n)} \frac{e^{pk}}{k}\right)^k. \end{aligned}$$

Az e^{px}/x függvény konvex a $[0, \infty)$ intervallumon tetszőleges p esetén. Speciálisan az $[1, n/2]$ intervallumon a maximumát valamelyik végpontjában veszi fel. Az 1-ben ez a függvény legfeljebb e . Az $n/2$ -ben – felhasználva, hogy $\omega(n) \leq \log n$ feltehető – kapjuk, hogy a függvény értéke legfeljebb 2. Tehát az egész intervallumon legfeljebb e az értéke. Így

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(e^{1-\omega(n)} \frac{e^{pk}}{k}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(e^{2-\omega(n)}\right)^k \leq \frac{e^{2-\omega(n)}}{1 - e^{2-\omega(n)}} \rightarrow 0.$$

Tehát

$$\mathbb{P}r(G(n, p) \text{ nem összefüggő}) \rightarrow 0.$$

Ezzel készen vagyunk.

11.3. A Lovász-féle lokál-lemma alkalmazásai

5.29. Legyen $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|S| = s$. Először s -re menő indukcióval bizonyítjuk, hogy tetszőleges $i \notin S$ esetén

$$\mathbb{P}r \left(A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j} \right) \leq x_i.$$

Ez $s = 0$ -ra triviális. Tegyük fel, hogy az állítást már igaz minden $s' < s$ esetén, megmutatjuk, hogy s -re is teljesül az állítás. Legyen $S_1 = \{j \in S \mid (i, j) \in E\}$ és $S_2 = \{j \in S \mid (i, j) \notin E\}$. Ekkor

$$\mathbb{P}r \left(A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j} \right) = \frac{\mathbb{P}r \left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \right) \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right)}{\mathbb{P}r \left(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right)}.$$

Először becsljük a tört számlálóját felhasználva, hogy A_i teljesen független az $\{A_t \mid t \in S_2\}$ eseményektől.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r \left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \right) \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) &\leq \mathbb{P}r \left(A_i \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) = \\ &= \mathbb{P}r(A_i) \leq x_i \prod_{(i, j) \in E} (1 - x_j). \end{aligned}$$

A nevező becsléséhez használjuk az indukciót. Legyen $S_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$. Ha $r = 0$, akkor a nevező 1, és az állítás azonnal következik. Ha $r \geq 1$ akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r \left(\overline{A_{j_1}} \cap \overline{A_{j_2}} \cap \dots \cap \overline{A_{j_r}} \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) &= \\ &= \left(1 - \mathbb{P}r \left(\overline{A_{j_1}} \mid \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) \right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}r \left(\overline{A_{j_2}} \mid \overline{A_{j_1}} \cap \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) \right) \cdot \dots \\ &\quad \left(1 - \mathbb{P}r \left(\overline{A_{j_r}} \mid \overline{A_{j_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{j_{r-1}}} \cap \bigcap_{t \in S_2} \overline{A_t} \right) \right) \geq \end{aligned}$$

$$\geq (1 - x_{j_1})(1 - x_{j_2}) \dots (1 - x_{j_r}).$$

A számláló és a nevező becslését összerakva kapjuk az állítást. Innen már kapjuk a feladat állítását.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}r\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) &= (1 - \mathbb{P}r(A_1))(1 - \mathbb{P}r(A_2 \mid \overline{A_1})) \dots \\ &\dots (1 - \mathbb{P}r(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i})) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

5.30. Ha $d = 0$ akkor az állítás triviális. Ha $d \geq 1$, akkor alkalmazhatjuk az előző feladat eredményét $D = (V, E)$ függőségi irányított gráfra, $A_1, \dots, A_n$ eseményekre, ahol minden i -re $|\{j \mid (i, j) \in E\}| \leq d$. Legyen $x_i = \frac{1}{d+1} < 1$. Ekkor

$$\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \geq \frac{1}{e}$$

miatt teljesül, hogy

$$\mathbb{P}r(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j).$$

Így

$$\mathbb{P}r\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

5.31. Színezzünk minden csúcsot $1/2 - 1/2$ valószínűséggel pirosra vagy kékre. Ekkor annak az A_f eseménynek a valószínűsége, hogy az $f \in E$ él monokromatikus, $2/2^k = 1/2^{k-1}$. Minden A_f esemény teljesen független mindazon $A_{f'}$ eseményektől, ahol f' nem metszi f -et. Így minden esemény teljesen független legfeljebb d esemény kivételével az összestől. Így

$$\mathbb{P}r(A_f) = \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{e(d+1)}$$

miatt

$$\mathbb{P}r\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0,$$

vagyis pozitív valószínűséggel nem lesz monokromatikus él, azaz 2-színezhető a hipergráf.

5.32. Színezzük K_n minden élét $1/2 - 1/2$ valószínűséggel pirosra vagy kékre. Legyen $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$, melyre $|S| = k$. Annak az A_S eseménynek a valószínűsége, hogy az S által feszített összes él egyszínű:

$$\mathbb{P}r(A_S) = \frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}}.$$

Az A_S esemény teljesen független minden olyan $A_{S'}$ eseménytől, amelyekkel metszete legfeljebb 1 elemű, vagyis S -nek és S' -nek nincsen közös éle. Így A_S foka a függőségi gráfban legfeljebb

$$\binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2},$$

sőt $k \geq 4$ esetén többször számoltuk azt az S' halmazt, amelynek legalább 3 közös csúcsa van S -sel. Ha $k = 3$, akkor az állítás feltétele csak $n \leq 2$ esetén teljesülhet. Mivel $R(3, 3) = 6 > 2$, így itt triviális az állítás. Így feltehető, hogy $k \geq 4$. Ekkor a fentiek szerint

$$d + 1 \leq \binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2}.$$

A feladat feltételei szerint

$$\mathbb{P}r(A_S) \geq \frac{1}{e(d+1)},$$

így

$$\mathbb{P}r\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0,$$

vagyis pozitív valószínűséggel nem lesz k elemű csúcshalmaz, mely monokromatikus gráfot feszít. Így $R(k, k) > n$.

(b) Legyen

$$s(k) = \left(\frac{(k-2)!}{\binom{k}{2}} \left(\frac{2^{\binom{k}{2}-1}}{e} - 1 \right) \right)^{1/(k-2)}.$$

Ha n -et $s(k)$ egész részének választjuk, akkor az

$$\binom{n}{k-2} < \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}$$

egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

így $R(k, k) > s(k)$. A Stirling-formulát és a $k(k-1) = (k+1)(k-2) + 2$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$s(k) = \frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1))k2^{k/2}.$$

5.33. Feltehetjük, hogy minden kifok pontosan δ , különben egy megfelelő részgráfot tekintünk.

Legyen $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ egy véletlen színezése a csúcsoknak, ahol minden $f(v)$ egymástól függetlenül egyenletesen van választva. Minden $v \in V$ esetén legyen A_v az az esemény, hogy nem létezik $u \in V$, melyre $(v, u) \in E$ és $f(u) \equiv f(v) + 1 \pmod{k}$. Ekkor $\Pr(A_v) = (1 - 1/k)^\delta$. Vegyük észre, hogy A_v teljesen független minden A_u eseménytől, kivéve azon u -kat, melyekre

$$N^+(v) \cap (\{u\} \cup N^+(u)) \neq \emptyset,$$

ahol $N^+(u) = \{w \in V \mid (u, w) \in E\}$. Az ilyen u -k száma legfeljebb $\Delta\delta$. Így teljesülnek a Lovász-féle lokál-lemma feltételei, így $\Pr(\cap_{v \in V} \overline{A_v}) > 0$. Tehát van olyan $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ színezés, hogy minden $v \in V$ esetén létezik u , melyre $(v, u) \in E$ és $f(u) \equiv f(v) + 1 \pmod{k}$.

Ekkor induljunk ki egy tetszőleges csúcsból, és mindig olyan csúcsba lépünk tovább, melynek 1-gyel nagyobb az f -értéke modulo k . Előbb-utóbb egy már meglátogatott csúcsba lépünk vissza. Az első ilyen alkalommal találtunk egy k -val osztható hosszúságú kört.

12. fejezet

Algoritmuselmélet – megoldások

Nagyságrendek

6.24. Igen, ez következik például a 6.23 feladatból.

6.25. Nem, például $f(n) = 2 \log n$ és $g(n) = \log n$ ellenpélda.

6.26. Nem, például $f(n) = \frac{1}{n}$ és $g(n) = n$ ellenpélda.

6.27. Ha $f(n)$ és $g(n)$ is ≥ 1 , akkor igen, sőt, még $\log(f(n)) = \log(g(n)) + O(1)$ is igaz. Viszont mivel 1-nél kisebb számokon a log negatív értéket vesz fel, ezért lehet csinálni ellenpéldát, bár megjegyezzük, hogy akár eltérő módon is definiálhattuk volna az $O(\cdot)$ -t. Így viszont ellenpélda, ha $f(n) = 2^{(-1)^n n - n}$ és $g(n) = 2^n$.

6.28. Nem, mivel h -ről semmilyen monotonitási feltétel nincs, például $f(n) = 2n$, $g(n) = 2n + 1$ és $h(2k) = 2k$, de $h(2k + 1) = 1$.

12.1. Rekurziók

6.29. Az állításokat indukcióval bizonyíthatjuk.

- Tegyük fel, hogy $f(n) < C (n^{\log_b a - \epsilon}) / (a - 1)$.

Az indukciós feltétel legyen

$$c_1 n^{\log_b a} < T(n) < c_2 n^{\log_b a} - C(n^{\log_b a - \epsilon}) / (a - 1),$$

ami nyilván teljesül $0 < x \leq 1$ -re, ha c_1 -et elég kicsinek és c_2 -t elég nagyra választjuk. Eszerint

$$\begin{aligned} c_1 (n/b)^{\log_b a} &< T(n/b) < \\ &< c_2 (n/b)^{\log_b a} - C((n/b)^{\log_b a - \epsilon}) / (a - 1), \end{aligned}$$

amiből rekurzióból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ac_1 (n/b)^{\log_b a} + f(n) &< T(n) < \\ &< ac_2 (n/b)^{\log_b a} + f(n) - C((n/b)^{\log_b a - \epsilon}) a / (a - 1). \end{aligned}$$

Szerencsére $b^{\log_b a} = a$, ezért ennek a bal oldala pont az, amit akartunk, ha elfelejtjük $f(n)$ -et (ami pozitív). A jobb oldalon pedig több, mint $f(n) - C((n/b)^{\log_b a - \epsilon}) / (a - 1)$ többlet van (mert $b^{\log_b a - \epsilon} < a$), de a feltétel szerint ez negatív.

- Tegyük fel, hogy $C_1(n^{\log_b a} \log^k n) < f(n) < C_2(n^{\log_b a} \log^k n)$. Az indukciós feltétel legyen

$$c_1 n^{\log_b a} \log^{k+1} n < T(n) < c_2 n^{\log_b a} \log^{k+1} n,$$

ami nyilván teljesül $0 < x \leq 1$ -re, ha c_1 -et elég kicsinek és c_2 -t elég nagyra választjuk. Eszerint

$$c_1 (n/b)^{\log_b a} \log^{k+1} (n/b) < T(n/b) < c_2 (n/b)^{\log_b a} \log^{k+1} (n/b),$$

amiből rekurzióból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ac_1 (n/b)^{\log_b a} \log^{k+1} (n/b) + f(n) &< T(n) < \\ &< ac_2 (n/b)^{\log_b a} \log^{k+1} (n/b) + f(n). \end{aligned}$$

Mivel $a(n/b)^{\log_b a} \log^{k+1} (n/b) = n^{\log_b a} (\log n - \log b)^{k+1} = n^{\log_b a} (\log n)^{k+1} - \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$, ezért a bal oldal stimmel, hiszen $c_1 O(n^{\log_b a} \log^k b) < f(n)$, ha c_1 -et elég kicsinek választottuk. Hasonlóan a jobb oldal is kész, ha c_2 elég nagy, mert arra van szükségünk, hogy $c_2 \Omega(n^{\log_b a} \log^k b) > f(n)$.

- Az indukciós feltétel legyen

$$c_1 f(n) < T(n) < c_2 f(n),$$

ami nyilván teljesül $0 < x \leq 1$ -re, ha c_1 -et elég kicsinek és c_2 -t elég nagyra választjuk (és f -et megfelelően értelmezzük). Eszerint

$$c_1 f(n/b) < T(n/b) < c_2 f(n/b),$$

amiből rekurzióból kapjuk, hogy

$$ac_1 f(n/b) + f(n) < T(n) < ac_2 f(n/b) + f(n).$$

A bal oldal triviálisan teljesül, ha $c_1 \leq 1$. Mivel a feladat feltétele szerint $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ valamilyen $c < 1$ konstansra, ha n nagy, ezért a jobb oldal $ac_2 f(n/b) + f(n) < (cc_2 + 1)f(n) < c_2 f(n)$, ha c_2 elég nagy, tehát rendben van.

6.30. Megoldva a feladatot $d = 1, 2, 3$ -ra hamar megfigyelhetjük, hogy a megoldás az alábbi binomiális összeg lesz.

$$n(m, d) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{d},$$

ahol $n(m, d)$ az emeletek száma $+1$ -et jelöli. Ennek helyességét indukcióval könnyen igazolhatjuk. Hiszen ha még m mérésünk és d tojásunk van, akkor a legjobb, ha az $n(m-1, d-1)$ -edik szintről dobjuk le a tojásunkat, ugyanis ha szétörlik, akkor még pont ennyi -1 alsóbb szintet tudunk ellenőrizni a maradék $m-1$ mérésünkkel és $d-1$ tojásunkkal. Ha nem törük szét, akkor viszont még $n(m-1, d)-1$ (felsőbb) szintet tesztelhetünk. Mivel $n(m-1, d-1) + n(m-1, d) - 1 = n(m, d) - 1$, készen vagyunk.

6.31. $\Theta(n \log n)$.

A három vermet jelölje X, Y, Z és tegyük fel, hogy a zoknik be vannak sorszámozva 1-től n -ig (minden szám kétszer szerepel, a pár két felén).

Először azt mutatjuk meg, hogy $O(n \log n)$ lépés elég. Rakjuk át az összes zoknit az X veremből az Y és a Z verembe, méghozzá az $n/2$ -nél kisebb sorszámuakat az Y-ba, a többi a Z-be. Ezután először oldjuk meg a feladatot az Y-beli $n/2$ pár zoknira (egyszerűen rápakolva a Z-beli nagy sorszámu zoknikra), majd miután mindet kivettük, nekiláthatunk a nagyobb sorszámuaknak. Ebből a rekurzió $T(n) \leq 2T(n/2) + 2n$, amiből a Mester-tétel (6.29) alapján $T(n) = O(n \log n)$.

Megmutatjuk, hogy akkor is kell ennyi lépés, ha a felső n zokniban nincs egy pár sem. Az alsó n zokni sorrendje $n!$ -féle lehet aszerint, hogy melyik

hányadik felsőnek a párja. Tegyük fel, hogy T lépés elég. Minden egyes lépésben legfeljebb 9 lehetőségünk van arra, hogy mit csinálunk: vagy egyik veremről egy másikra pakolunk ($6 = 3 \cdot 2$), vagy kiveszünk két felsőt ($3 = \binom{3}{2}$). Ha valaki megadja nekünk, hogy a T lépés melyikében mit csinálunk, akkor abból vissza tudjuk fejteni az alsó n zokni sorrendjét. Tehát $9^T \geq n!$, azaz $T(n) = \Omega(n \log n)$.

12.2. Rendezés

6.32. $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ mérés szükséges és elégséges. Az algoritmus először készíti egy teljes párosítást az elemeken, és elvégzi ezeket a méréseket (ez $\lfloor n/2 \rfloor$ összehasonlítás). Ezután a nagyobb (plusz páratlan n esetén a kimaradó) $\lceil n/2 \rceil$ elemből kiválasztjuk a legnagyobbat (ez $\lceil n/2 \rceil - 1$ összehasonlítás) és a kisebb (plusz páratlan n esetén a kimaradó) elemekből kiválasztjuk a legnagyobbat (ez is $\lceil n/2 \rceil - 1$ összehasonlítás). Ez összesen pont $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ mérés.

A szükségességhez adjunk minden elemnek két kavicsot, egy narancssárgát és egy kéket. Akiről kiderül, hogy nem ő a legnagyobb, attól elveszük a narancssárgát, akiről pedig kiderül, hogy nem ő a legkisebb, attól elveszük a kéket. Kezdetben $2n$ kavics van, és könnyen meggondolható, hogy ha megvan a legnagyobb és legkisebb elem, akkor csak nekik lesz egy-egy kavicsuk, tehát összesen csak 2. Most megmutatjuk, hogy tudunk konzisztens válaszokat adni bármilyen algoritmusnak úgy, hogy minden mérés után csak eggyel csökkenjen a kavicsok száma, kivéve legfeljebb $\lfloor n/2 \rfloor$ mérést, amikor kettővel. Ebből következik majd, hogy legalább $2n - 2 - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil 3n/2 \rceil - 2$ mérés szükséges.

A válaszoláshoz először azt kell meggondolnunk, hogy két elem mérése nem okozhatja egy harmadik elem kavicsvesztését, bármi is a kimenetel. Ha mindkét elemet most mérjük először, akkor elkerülhetetlen, hogy mindkettő veszítsen egy kavicsot, ez azonban legfeljebb $\lfloor n/2 \rfloor$ -szer fordulhat elő. Az összes többi esetben, ha valamelyiknek egy kavicsa van, aszerint válaszolunk, hogy ezt ne veszítse el, a másik is legfeljebb egyet veszthet. Ez valóban konzisztens válasz lesz minden esetben. Ha pedig egyiknek sincs egy kavicsa sem, akkor csak arra vigyázunk, hogy konzisztensen válaszoljunk, amit nyilván mindig lehet.

6.33. $\binom{n}{2}$, ez akkor fordul elő, ha a kiválasztott elem mindig a még ki nem választottak közül a legnagyobb vagy a legkisebb.

6.34. Több jó megoldás is van, de rossz is sok van, gondoljuk meg rendesen a sajátunkat! Egy lehetőség egy kiválasztott elem szerinti kisebb-nagyobb elemekre osztásra, hogy a rendezendő tömb elejére gyűjtjük a nála kisebb, a

végére a nála nagyobb elemeket az alábbi algoritmussal. A tömb elejéről, ill. végéről is indítunk egy-egy pointert, melyekkel addig lépkedünk, amíg el nem érünk egy olyan elemet, ami nagyobb, ill. kisebb mint a kiválasztott. Amikor mindkét pointer leállt, kicseréljük az elemeket és folytatjuk az algoritmust, amíg össze nem találkoznak. A találkozási pont vagy valamelyik szomszédja lesz a határ a kisebb és a nagyobb elemek között, ide még be kell cserélnünk a kiválasztott elemet.

6.35. Számtalan megoldás létezik. Például először az n -edik helyen álló elemet hasonlítsuk össze az összes többivel, így biztosan oda kerül a legnagyobb. Ezután az $n - 1$ -edik helyen állót stb. Persze vannak hatékonyabb eljárások is, például lásd 6.38.

6.36. Tegyük fel, hogy van egy számsorozat, amit rosszul rendez a hálózat. Megmutatjuk, hogy akkor van egy 0-1 sorozat is, amit rosszul rendez. A rosszul rendezett sorozatnak van két eleme, a és b , amikre $a < b$, és mégis b felett lesz a . Ekkor az inputunkból készítsünk 0-1 sorozatot úgy, hogy minden számot, ami legalább b , helyettesítsünk 1-gyel, a kisebbeket pedig 0-val. Az így kapott 0-1 sorozatban pont ugyanazok a cserék történnek, mint az eredeti számsorozatban (néha képzeletben felcserélve két 1-est, ill. 0-ást is), tehát a kimenet is ugyanaz lesz.

6.37. Tegyük fel, hogy az input már sorban van, kivéve két szomszédos elemet, amik fel vannak cserélve. Ekkor egyik összehasonlításakor sem történik változás, hacsak nem hasonlítjuk össze valamikor ezt a két szomszédot.

6.38. Több módszer is létezik, az itt leírt algoritmus Batchertől származik és Odd-Even Mergesortnak is hívják. A megoldás az alábbi szubrutinon alapul.

ODD-EVEN MERGE($a_1, \dots, a_n$):
 If $n = 2$, Compare(a_1, a_2).
 If $n > 2$, ODD-EVEN MERGE(páratlan indexű elemek) and ODD-EVEN MERGE(páros indexű elemek).
 For $i = 1 \dots n/2$ Compare(a_{2i}, a_{2i+1}).

Ez a szubrutin sorbarendezi n elemet, ha az első és a második $n/2$ már helyesen sorba volt rendezve a bemenetben is. Ennek a bizonyítása indukcióval történik és felhasználjuk hozzá 6.36-ot, ami alapján elég az állítást 0-1 sorozatokra bizonyítanunk. Mivel az első és a második fél eleve sorban volt, ezért a páratlan és a páros indexű elemek között vagy ugyanannyi 0-ás van, vagy a páratlan indexűek között eggyel vagy kettővel több van. Az indukció miatt az azonos paritású részekre működik az algoritmus, ezt a legfeljebb kettő el-

térést pedig az utolsó For ciklus egyenlíti ki. Az algoritmus $\log n$ párhuzamos lépést végez.

Ezután a sorbarendező algoritmus.

$\text{SORT}(a_1, \dots, a_n)$:
 $\text{SORT}(a_1, a_{n/2})$ and $\text{SORT}(a_{n/2+1}, a_n)$.
 $\text{ODD-EVEN MERGE}(a_1, \dots, a_n)$.

A szubrutin helyességéből indukcióval következik, hogy ez valóban megrendezi a bemenetét $\log^2 n$ párhuzamos lépésben.

6.39. Abból, hogy mely helyeken történik csere, ki tudjuk találni a bemenetbeli elemek sorrendjét. Mivel $n!$ -féle sorrend van, legalább $\log(n!) = \Omega(n \log n)$ összehasonlítás kell, hiszen mindegyik bemenet lehetséges. Ezt a gondolatmenetet információelméleti alsó korlátnak is szokták nevezni.

12.3. Számolás

6.40. Az alábbi feladatok megoldásának kulcsa az Euler–Fermat-tétel, mely szerint ha a és m relatív prímek, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, ahol φ az Euler-féle φ -függvény, azaz $\varphi(m)$ az m -nél kisebb, m -hez relatív prím egészek száma. Az alábbi feladatokban valóban mindig csak relatív prímekre kell alkalmaznunk a tételt.

(a) $\varphi(11) = 10$, ezért $11117^{24601} \equiv 11117^{24601 \bmod 10} \equiv 11117^1 \equiv 7 \pmod{11}$.

(b) $\varphi(6) = 2$, ezért

$$396396936966391^{36303065464} \equiv 396396936966391^0 \equiv 1 \pmod{6}.$$

(c) $\varphi(10) = 4$, ezért $36203843409^{24601} \equiv 36203843409^1 \equiv 9 \pmod{10}$.

(d) $\varphi(2^{12}) = 2^{11} = 2048$ és $\varphi(2^{11}) = 2^{10} = 1024$, ezért

$$3^{20483^{3073}} \equiv 3^{20483^{3073 \bmod 1024} \bmod 2048} \equiv 3^{20483^1 \bmod 2048} \equiv 3^3 \equiv 27 \pmod{2^{12}}.$$

6.41. (a) $2^{2n} \equiv (2^n)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{2^n + 1}$.

(b) $2^k \cdot 2^{n-k} \equiv -1 \pmod{2^n + 1}$, tehát 2^k inverze -2^{n-k} .

(c) $a \cdot b \equiv y - x \pmod{2^n + 1}$.

6.42. Az egyenletből kapott rekurzió $T(2n) = 3T(n) + O(1)$, ahol a konstans az összeadások és az eltolások (azaz 10-zel szorzások) költsége (ha n -ben lineáris költséget számolunk ezekre, akkor sem változik a végeredmény). Ebből a Mester-tétel (6.29) alapján $T(n) = \Theta(n^{\log 3}) \approx \Theta(n^{1.58})$, sokkal gyorsabb, mint az általános iskolában tanult n^2 idejű algoritmus. Ennél is gyorsabb azonban a diszkrét Fourier-transzformáció, ami kvázilineáris ($\Theta(n \log n \log \log n)$) futásidejű.

6.43. Az euklideszi algoritmus egy verziója legnagyobb közös osztó keresésére. Mivel minden második lépésben legalább az egyik szám feleződik, ezért a futásideje $O(\log \max(a, b))$, és ennyi lépés kell is, ha például mindkét szám ugyanaz a kettőhatvány.

6.44. Az egyenletekből kapott rekurzió $T(n) = 7T(n/2) + O(1)$, ahol a konstans az összeadások költsége (ha n -ben lineáris költséget számolunk ezekre, akkor sem változik a végeredmény). Ebből a Mester-tétel (6.29) alapján $T(n) = \Theta(n^{\log 7}) \approx \Theta(n^{2,81})$, gyorsabb, mint a tanult n^3 idejű algoritmus. Fontos kérdés, hogy $\Theta(n^{2+\epsilon})$ időben összeszorozható-e két mátrix, jelenleg a legjobb algoritmus futásideje $\Theta(n^{2,3727})$.

6.45. Több megoldás létezik, ezek közül egyet mutatunk meg. Számoljuk ki ac -t, bd -t és $(a+b)(c+d)$ -t. Ebből a valós rész $ac - bd$, a komplex rész pedig $(a+b)(c+d) - ac - bd$.

Megjegyzés: Ha a számok $re^{i\varphi}$ alakban vannak adva, akkor egy valós szorzás elég a szorzatuk kiszámításához, de az összeadás komplikálttá válik.

12.4. Diszkrét Fourier-transzformáció

6.46. $(x-1)(\sum_{i=0}^{k-1} x^i) = x^k - 1 = 0$, hiszen a tagok teleszkóposan kiesnek. Mivel $x-1 \neq 0$ és a gyűrű nullosztómentes, kész vagyunk. A $\text{mod } m$ gyűrűnél pedig arra kell figyelni, hogy $x-1$ ne legyen nullosztó, azaz $x-1$ legyen relatív prím m -hez, ekkor érvényes marad a formula. Egyébként baj lehet, pl. $1+3 \neq 0 \pmod{8}$.

6.47. Ha ω egy 1-es után $2n/K$ darab 0 és θ egy 1-es után n/K darab 0, akkor könnyű velük szorozni, csak eltolni kell a számot (és a túlsorduló részt kivonni, lásd 6.41).

6.48. Kell majd, hogy a primitív K -adik egységgyök hatványainak összege nulla, ekkor a megfelelő tagok pont kiesnek. Mivel mindre ugyanannyi lesz az összeg, elég az egyikre kiszámolni, például a 6.47 feladatbeli „szép” gyökre. Ekkor ω osztja $2^n - 1$ -et, tehát relatív prím $2^n + 1$ -hez, tehát a 6.46 feladat szerint készen vagyunk. Most a számolás:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i &= c'_i \frac{\theta^{-i}}{K} = \frac{\theta^{-i}}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \omega^{-ij} \hat{a}_j \hat{b}_j = \\ &= \frac{\theta^{-i}}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \omega^{-ij} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \omega^{jk} a'_k \right) \left(\sum_{l=0}^{K-1} \omega^{jl} b'_l \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{\theta^{-i}}{K} \sum_{j,k,l=0}^{K-1} \omega^{-ij} \omega^{jk} \theta^k a_k \omega^{jl} \theta^l b_l = \frac{\theta^{-i}}{K} \sum_{j,k,l=0}^{K-1} \omega^{(k+l-i)j} \theta^{k+l} a_k b_l,$$

ahol a $\sum_{j,k,l=0}^{K-1} \omega^{(k+l-i)j} = 0$, kivéve ha $k+l = i$ vagy $k+l = i+K$, ekkor K lesz az értéke. A θ^{k+l} pedig θ^i , illetve $-\theta^i$ lesz, így $k+l = i$ esetén $a_k b_l$, míg $k+l = i+K$ esetén $-a_k b_l$ lesz a hozzájárulás, pont amit akartunk.

6.49. Tehát mod 257 dolgozunk, $\omega = 16$ és $\theta = 4$ értékekkel a 6.47 feladat szerint. Mivel $A = B$, ezért elég lesz csak az $\hat{a}_i$ -ket kiszámolni. Kezdetben $a_0 = a_2 = 1$, ebből $a'_0 = 1$, $a'_2 = 16$, a többi pedig továbbra is nulla. Utána $\hat{a}_i = \sum_{j=0}^3 16^{ij} a'_j = 1 + (-1)^i 16$ -ból kapjuk, hogy $\hat{a}_0 = \hat{a}_2 = 17$ és $\hat{a}_1 = \hat{a}_3 = -15$. Innen $\hat{c}_i = \hat{a}_i \hat{b}_i = \hat{a}_i^2$ -ből $\hat{c}_0 = \hat{c}_2 = 32$ és $\hat{c}_1 = \hat{c}_3 = -32$. $c'_i = \sum_{j=0}^3 16^{-ij} \hat{c}_j$ -ből $c'_0 = 0$, $c'_1 = 0$, $c'_2 = -1$ és $c'_3 = 0$. Végül pedig $\bar{c}_2 = c'_2 4^{-2} / 4 = 4$ (használhatjuk a 6.41 feladatot).

12.5. Stabil párosítások

6.50. Igen, már 3-3-ra emberre is. A fiúk preferenciasorrendjei legyenek $a : \{A, B, C\}$, $b : \{B, C, A\}$, $c : \{C, A, B\}$, a lányoké pedig $A : \{b, c, a\}$, $B : \{c, a, b\}$, $C : \{a, b, c\}$. Ekkor stabil párosítás lesz $A - c$, $B - a$, $C - b$. Természetesen tetszőlegesen nagy számra is adható hasonló konstrukció.

6.51. Létezik, mert tetszőlegesen változathatjuk az egyenlő preferenciákat úgy, hogy ne maradjanak egyenlők. Ami itt stabil lesz, az az eredetiben is stabil.

6.52. Végig kell gondolni a tanult (lánykérős) algoritmust, ez fiúoptimális párosítást ad, azaz olyat, ahol minden fiú a számára legkedvesebb olyan lányt kapja, akit csak kaphat (stabil párosítás esetén). Tekintsük azt az első helyzetet, amikor az egyik fiú megkéri a legrosszabb párját. Ekkor már minden más lánynak van párja, tehát az algoritmus ezzel a lépéssel véget ér. Mivel ez volt az első ilyen helyzet, ezért a többi fiúnak jobb párja van.

6.53. Két stabil párosítás éleit egyberakva nem kaphatunk alternáló utat, csak kört, hiszen út esetén a második, ill. az utolsó előtti él nem lenne stabil, mert az első, ill. az utolsó él kedvezőbb a végpontjaiknak. Az állítás persze nem páros gráfokra is igaz marad.

6.54. Nem létezhet. Két stabil párosítás uniója izolált élekből és alternáló körökből áll (lásd az előző feladat megoldását). Minden körre igaz lesz, hogy

minden körbeli fiú az egyik párosításbeli párját kedveli jobban és minden lány a másikat. A rossz párt tartalmazó él emiatt nem lehet körben.

6.55. Annak a fiúnak, akinek az $(n + 1 - i)$ -edik oszlopában van a lány, a lánynál az i -edik helyen kell lennie a preferenciasorrendben. Ez a feltétel nyilván elégséges ahhoz, hogy minden oszlop stabil párosítást adjon. A szükségesség $i = 1$ -re abból adódik, hogy ha mindegyik fiú a számára legkevésbé kedves lányt kapja, akkor minden lánynak a számára legkedvesebb fiút kell kapnia. Nagyobb i -re hasonlóan okoskodhatunk indukciót használva.

6.56. $f(n)$ pontos nagyságrendje nem ismert, még azt sem tudjuk, hogy lehet-e szuperexponenciális, csak azt tudjuk, hogy n -ben legalább exponenciális. Ehhez tekintsük az alábbi konstrukciót (páros n -re). Az a_i , illetve az a'_i fiú listája kezdődjön A_i, A'_i -vel, illetve A'_i, A_i -vel, míg az A_i illetve az A'_i lány listája kezdődjön a'_i, a_i -vel illetve a_i, a'_i -vel, minden $i = 1, \dots, n/2$ -re. Ekkor minden i -re választhatjuk a lány- vagy a fiúoptimális párosítást, ez $2^{n/2}$ stabil párosítást ad.

12.6. Elemi gráfalgoritmusok

Minden feladatot minél gyorsabb (= élszámban lineáris) algoritmussal oldjunk meg!

6.57. Indítsunk két mutatót a lista elejétől, az egyiket egyesével léptessük, míg a másikat kettesével. Ha a lista digráfként elképzelve egy k hosszú útból és egy m hosszú körből áll, akkor ez a két mutató $k + (m - k \bmod m)$ lépés után fog újra találkozni, valahol a körön. Ekkor kezdjük el őket együtt léptetni (egyesével) és indítsunk egy új mutatót a lista elejéről is (egyesével). Ekkor k lépés után találkoznak annál az elemnél, amire az utolsó elem mutat, tehát az előző lépésben volt a két együtt mozgó mutató az utolsó elemen. (Az előző elemet is mindig jegyezzük fel.)

6.58. Ha mélységi kereséssel bejárjuk a gráfot, akkor a kapott fa minden élét pontosan kétszer használjuk. Euler-sétát kapunk, ha a többi élen (nem fabeli éleken, illetve fabeli élek további példányain) oda-vissza megyünk (párokat formálva). Ez lineáris algoritmussal ad, ha az éllistán egymás mellett szerepelnek az élek különböző példányai. Ha nem, akkor először ezt kell elérnünk, minden csúcsra fokszám időben. Ehhez vegyünk egy n méretű tömböt, melyben csupa pozitív szám van. (Ezt az első csúcsra ki kell töltenünk, pl. egyesekkel, később elég lesz a régit használni.) A csúcsunk szomszédaihoz írjunk először 0-t (egyszer végigmenve az éllistán), aztán számoljuk meg, hány

él megy a szomszédokba (még egyszer végigmenve az éllistán), végül csináljunk egy új listát, minden szomszédhoz annyi élet véve, amennyit kell (hogyan tudjuk, kik a szomszédok, ismét végig kell mennünk az éllistán).

6.59. Csináljunk egy mélységi keresést, és ábrázoljuk a fát úgy, hogy a gyökér van alul. Azok a v nem-gyökér csúcsok lesznek elvágóak, amelyeknek lesz egy olyan felfele induló ága, amibe nem vezet v alól él, míg a gyökér akkor lesz elvágó, ha nem egy a foka. A levelektől indulva mindenre kiszámíthatjuk, hogy milyen mélyre megy utódjából él. Akinek minden gyereke megy alá, az nem elvágó. Egy gráf pedig pontosan akkor 2-összefüggő, ha nincs elvágó csúcsa.

6.60. Először számoljuk ki az összes csúcs befokát, és ezt a számot tároljuk el minden csúcsra egy számlálóban. Akiknek nulla a számlálója, azokat tegyük be egy N listába. Ezután minden lépésben vegyük ki az N következő elemét, és minden kiszomszédjának csökkentjük eggyel a számlálóját. Akire nulla lesz, tegyük az N -be.

Megjegyzés: A mélységi keresésnél a fordított elhagyási sorrend is jó.

6.61. Építsünk mélységi fát egy tetszőleges gyökérből, majd irányítsuk a faéleket a gyökérből elfelé, az összes többi élet (amik tehát visszamutató élek lesznek) pedig a gyökér felé. Mivel nincsenek elvágócsúcsok, ezért a 6.59 feladat szerint mindenből lehet a gyökér fele menni.

6.62. Mélységi bejárást alkalmazunk (ha elakadunk, egy tetszőleges még nem érintett csúcsból folytatjuk), közben a csúcsokat elhagyási sorrendben beírjuk egy verembe. Ezután megfordítjuk a gráf éleit, és a veremből kiolvassuk a csúcsokat (azaz fordított elhagyási sorrendben vesszük őket), és mindegyikből mélységi bejárást indítunk. A bejárt csúcsok egy erősen összefüggő komponenst alkotnak, ezeket elhagyjuk, és folytatjuk a következő csúccsal a veremből.

Megjegyzés: A komponenseken melléktermékként közben egy topologikus sorrendet kapunk.

6.63. Az erősen összefüggő komponenseket egy-egy csúccsá összehúзва feltehető, hogy a gráf aciklikus. Ezután, ha a gráf topologikus sorrendjében minden csúcsból mutat él a következőbe, akkor igen, különben nem (ha többféle topologikus sorrend is van, akkor mindegy, hogy melyiket vesszük, egyikben sem lesz).

6.64. Bármilyen bejárással könnyen megkereshetjük a komponenseket, vagy csak megirányítva minden élet oda-vissza használhatjuk a 6.62 feladatot.

6.65. Futassunk szélességi keresést, ekkor bármely él végpontjai vagy azonos szintűek, vagy eggyel tér el a szintjük. Ha nincs azonos szintű csúcsok között él, akkor a szinteket felváltva színezve kapunk egy kétszínezést. Ha van, akkor a két szomszédos csúcsból lépegetünk visszafelé egy-egy tetszőleges ősrükre, amíg össze nem találkoznak.

6.66. Talán a legegyszerűbb, ha st hossza 1, sv hossza 2 és vt hossza -2 . Ekkor v -t nem fogjuk megvizsgálni.

6.67. Az $1, \dots, k$ értékekre egy-egy vödörben tartjuk azokat a csúcsokat, amiknek épp annyival több a távolságuk s -től, mint a legutóbb vizsgált csúcsnak. A Dijkstra mindig az 1-es vödörből vegye ki a csúcsokat (ha nem üres) és ezeket vizsgálja, azaz a szomszédait rakja át a megfelelő vödrökbe (ez minden csúcsra fokszámnyi lépés, összesen m). Mivel minden él legfeljebb k hosszú, minden szomszéd 2 -től $k + 1$ -es sorszámú vödörbe kerül. Ezután eggyel növekszik a legutóbb vizsgált csúcs s -től vett távolsága, az 1-es vödör kiürült, a többi vödör sorszámát pedig eggyel lecsökkentjük. (Ha az 1-es vödör kezdetben üres volt, akkor is úgy tekintjük, hogy eggyel nőtt a legutóbb vizsgált csúcs s -től vett távolsága, és eggyel arrébb toljuk a vödröket, ez legfeljebb nk -szor fordulhat elő.)

6.68. Nevezzük azt összeérésnek, amikor egy v csúcsot mindkét Dijkstra átvizsgál. Azok a csúcsok, amiket az összeérés pillanatában még egyik irányból sem vizsgáltunk át, nem lesznek benne legrövidebb útban, hiszen a távolságuk s -től és t -től is nagyobb, mint v -nek, ezért ezeket elhagyhatjuk (vagy csak nem foglalkozunk velük). Ezután elég, ha az s -ből átvizsgált és t -ből átvizsgált csúcsok közötti összes élre megnézzük, hogy nem ad-e rövidebb utat, mint a v -n át vezető. Erre a lépésre valóban szükség is van, ha például a gráf élei az alábbi hosszúságúak: $sv = 5$, $vt = 5$, $sa = 3$, $ab = 3$, $bt = 3$.

Ezzel a módszerrel sokat nyerhetünk a hagyományos Dijkstra-hoz képest expanderszerű gráfokra. Ha például minden él azonos hosszúságú és a gráfunk egy 3-reguláris fa, akkor a (nagyságrendileg) $3^{dist(st)}$ csúcs helyett elég kb. $2 \cdot 3^{dist(st)/2}$ csúcsot átvizsgálni.

Irányított gráfokra t -ből a visszaéleken csináljuk a Dijkstrát.

6.69. A szokásos módon konstruált minimális összsúlyú feszítőfa ilyen tulajdonságú is egyben (hiszen az csak a súlyok sorrendjétől függ, és ha eléggé „széthúzzuk” a súlyokat, pl. különböző kettőhatványokká, akkor ha az összeg minimális, akkor a maximum is).

6.70. Először az új csúcsból induló legolcsóbb élt vegyük hozzá a feszítőfához. Ezután az új csúcs többi élet egyesével behúzzuk, mindegyikre töröljük a bezárt kör legdrágább élet. Az ezeket egyesével megkereső (pl. mélységi

kereső) algoritmus összfutása dn . Ha d konstans, akkor ez jobb, mint újra futtatni valamelyik algoritmust, hiszen a legjobb ismert (determinisztikus) algoritmus futásideje $\omega(n)$.

Megjegyzés₁: Nem ismert, hogy létezik-e $O(n)$ futásidejű determinisztikus algoritmus, amely megtalálja a minimális összsúlyú feszítőfát.

Megjegyzés₂: Persze elég nagy pazarlás, hogy a legdrágább él keresésekor mindig bejárjuk a teljes kört, ehelyett minden keresés után építhetnénk a már bejárt élekből egy alkalmas adatstruktúrát, amiben könnyebb lenne két pont között legdrágább élet keresni, így nemkonstans d -re is jobb algoritmust kaphatnánk, mint a fa újbóli felépítése.

6.71. Igen, mind azt ad. Az (a) és (b) az előadáson szerepelt, a (c)-nél azt gondoljuk meg, hogy két, a vizsgált sorrendben szomszédos él cseréjénél nem változik a kimenet, és növekvő sorrendnél visszkapjuk a b)-t.

6.72. Ha G egy súlyozott irányított gráf, legyen az inicializálás pl. az alábbi:
 $M(i, i) = 0$;

$M(i, j) = n \cdot \text{MAX}$, ha ij nem él; (MAX a legnagyobb élsúly-abszolút-érték)

$M(i, j) = c(ij)$, ha ij él;

$P(i, j) = i$, ha ij él és 0 különben.

Ekkor, ha c konzervatív, akkor a végén $M(i, j)$ a legrövidebb ij út hossza, és az út visszakövethető: $j, p(i, j), p(i, p(i, j)), \dots, i$; ha pedig c nem konzervatív, akkor a végén létezik i , hogy $M(i, i) < 0$.

Ezt hívják Floyd-, vagy Floyd–Warshall-algoritmusnak. A helyességhez csak azt kell megfigyelni, hogy konzervatív c -re a k -adik for ciklus után $M(i, j)$ az i és j közti legrövidebb út hossza, ami csak az első k csúcsot használja.

12.7. Dinamikus programozás

6.73. Kiválasztunk egy gyökeret, ebből indítunk egy mélységi keresést. Ezután elhagyási sorrendben kiszámítjuk minden v csúcsra, hogy az alatta levő részben mekkora a legnagyobb független csúcshalmaz súlya, ha v -t kiválasztjuk, illetve nem választjuk ki. Ezeket a mennyiségeket $f(v)$ -vel illetve $g(v)$ -vel jelölve a következő képletekből tudjuk kiszámolni.

$$g(v) = \sum_{u \text{ gyereke } v\text{-nek}} \max(f(u), g(u))$$

$$f(v) = \sum_{u \text{ gyereke } v\text{-nek}} g(u)$$

Ez élszám idejű, ha két szám összeadása, ill. maximumának kiszámítása konstans időben megy, mert minden csúcsnál annyi összeadást végzünk, amennyi a foka.

6.74. Jelöljük a sorozat tagjait a_i -vel. Minden i -re kiszámoljuk a b_i segéd-sorozatot a következőképpen. Legyen $b_0 = 0$ és $b_i = \max(a_i, a_i + b_{i-1})$. Ekkor b_i fogja megadni a legnagyobb összegű, a_i -vel végződő sorozat összegét, tehát a legnagyobb b_i -nél végződik a keresett intervallum (egyenlőség esetén mind ugyanakkora megoldást ad). Innen visszafelé haladva megkereshetjük az intervallum elejét (utolsó pozitív b_i jó kezdésnek, ha nullák vannak, akkor több jó is van).

6.75. Kiszámoljuk minden i -re és j -re az első i , illetve j betűből álló rész-sorozat leghosszabb közös részsorozatának hosszát, ez legyen $f(i, j)$. Ha az i -edik és a j -edik betű ugyanaz, akkor ez $f(i-1, j-1) + 1$, ha nem, akkor $\max(f(i, j-1), f(i-1, j))$.

Megjegyzés: Ez k db sorozatra is megy, ahol a futásidő a hosszaik szorzata. Ha k a bemenet része, akkor NP -teljes a probléma.

6.76. Minden elemre kiszámoljuk a legnagyobb négyzetes összefüggő 1-blokkot, aminek ő a jobb alsó sarka, ezt jelöljük majd $f(i, j)$ -vel, a mátrix (i, j) -edik mezőjének értékét pedig $m(i, j)$ -vel. Ha $m(i, j) = 0$, akkor $f(i, j)$ is 0. Ha $m(i, j) = 1$ és $f(i-1, j) \neq f(i, j-1)$, akkor $f(i, j) = \min(f(i-1, j), f(i, j-1)) + 1$. Végül pedig ha $m(i, j) = 1$ és $f(i-1, j) = f(i, j-1) = k$, akkor $f(i, j) = k + m(i-k, j-k)$.

6.77. Jelöljük egy $a \times b$ -s és egy $b \times c$ -s mátrix összeszorzásának költségét $f(a, b, c)$ -vel (ez a valóságban kb. abc), az i -edik mátrix sorainak, ill. oszlopainak számát i_{bal} -lal, ill. i_{jobb} -bal, valamint az $A_i \dots A_j$ szorzat leggyorsabb kiszámításának idejét $F(i, j)$ -vel. Tehát $F(i, i) = 0$ és $F(i, i+1) = f(i_{bal}, i_{jobb}, (i+1)_{jobb})$ (persze $i_{jobb} = (i+1)_{bal}$). Ebből kiszámíthatjuk F -et minden i, j párra, hiszen

$$F(i, j) = \min_{i < k < j} F(i, k) + F(k+1, j) + f(i_{bal}, k_{jobb}, j_{jobb}),$$

és innen $F(1, r)$ adja a megoldást a feladatra. (Persze azt is mindig jegyezzük fel, hogy melyik k adta az optimumot $F(i, j)$ kiszámításakor, hogy tudjuk mi az optimális zárójelzés.)

6.78. Kiszámoljuk, hogy i -től j -ig mi a legjobb háromszögelése az ij átló alatti résznek (azaz az $\{i, \dots, j\}$ csúcsokat tartalmazó sokszögnek). Ezt úgy csináljuk, hogy minden közbülső k csúcsra megnézzük, hogy milyen lenne, ha ő lenne az ij átló háromszögének a harmadik csúcsa. Az előző feladat megoldásához hasonlóan itt is egyszerűen felírhatjuk a rekurziót, ha $f(i, j)$ az ij átló súlya (mivel az oldalakat nem kell behúzni, ezért ezekre úgy definiáljuk, hogy $f(i, i+1) = f(1, n) = 0$) és $F(i, j)$ jelöli az ij alatti rész legjobb

háromszögelését (azaz $F(i, i+1) = 0$ és $F(i, i+2) = f(i, i+2)$), akkor

$$F(i, j) = \min_{i < k < j} F(i, k) + F(k, j) + f(i, j),$$

és $F(1, n)$ adja a teljes sokszögre az optimumot. (Persze azt is mindig jegyezzük fel, hogy melyik k adta az optimumot $F(i, j)$ kiszámításakor, hogy tudjuk mi az optimális háromszögelés.)

6.79. Az első Dijkstra megtalálja az *sab*t utat. Miután csökkentjük az élek költségeit a távolságkülönbségekkel, és a faéleket berakjuk visszafelé, azt kapjuk, hogy $c'(sb) = c'(at) = 1$ és $c'(tb) = c'(ba) = c'(as) = 0$. Ebben a gráfban a Dijkstra megtalálja az *sba*t utat. Ezen két út szimmetrikus differenciája lesz a megoldás, azaz *sbt* és *sat* lesz a két út (milyen meglepő). Az összhosszuk $2 \cdot 3 + 2$, mert az első útrész hossza 3, a második részé pedig 2-vel több.

6.80. Csak szét kell húznunk a csúcsokat a szokásos módon és alkalmazhatjuk a Suurballe-algoritmust. Azaz minden v csúcsot helyettesítünk egy v_{be} és egy v_{ki} csúccsal, köztük egy nulla költségű éllel, és az összes eredetileg v -be menő él menjen v_{be} -be, és az összes eredetileg v -ből menő él menjen v_{ki} -ből.

6.81. Adjunk egy új csúcsot a gráfhoz az összes (t_1, t_2) pontpárra, csak velük összekötve, és aztán futtassuk a Suurballe–Tarjan-algoritmust. A futásidő így $m + n \log n$ -ről (ahol m az élek száma) $n^2 \log n$ -re nő.

Megjegyzés: Mivel az eredmény kiírása is már n^2 lépés, ezért ez biztos nem sokat javítható, a jelen feladatgyűjtemény összeállítói nem ismernek gyorsabb módszert.

6.82. (a) Az elvágóéleket meg tudjuk keresni mélységi kereséssel (hasonlóan a 6.59 feladat megoldásában leírtakhoz), amelyek egy ilyen éllel elvághatóak s -től, azokba nem megy két éldiszjunkt út.

(b) Először csinálunk egy topologikus sorrendet (lásd 6.60). Ezután eszerint sorban haladva indukcióval minden csúcsra könnyen meghatározhatjuk, hogy van-e két hozzá vezető éldiszjunkt út s -ből, és ha nincs, akkor az őt s -től elvágó legkorábbi élet.

Megjegyzés: Irányított gráfokra a jelen feladatgyűjtemény összeállítói nem ismernek gyorsabb módszert, mint futtatni a Suurballe–Tarjant.

12.8. Folyamok

6.83. (a) Hamis, ha például az élek st, ab, bc, ca , mind egységnyi kapacitással, akkor az abc -n folyhat körbe egy egységnyi folyam. Az viszont igaz, hogy az ilyen körök éldiszjunktak a minimális vágásoktól.

- (b) Igaz, mert amíg van ilyen kör, csökkenthetünk rajta úgy, hogy valamelyik élen nullázódjon a folyam, ezt a lépést pedig legfeljebb élszámnyiszor tehetjük meg.
- (c) Hamis.
- (d) Igaz.
- (e) Hamis.
- (f) Hamis.
- (g) Hamis.

6.84. A vágásfeltételt az esetek külön megvizsgálásával ellenőrizhetjük, ezt itt nem részletezzük. Ha lenne négy folyam, azok mindegyike legalább kettő élet használna, de ez lehetetlen, mert csak hat él van.

6.85. Először is vezessünk a nyelvből a forrásba egy élet, korlátlan kapacitással, így ezeknek a csúcsoknak eltűnik a kitüntetett szerepe. Ezután vegyünk hozzá a gráfhoz egy (új) s és t pontot, és osszunk fel minden e élet két csúcscsal, e_1 -gyel és e_2 -vel. Tehát az $e = uv$ élből ue_1, e_1e_2 és e_2v lesz. Mindhárom új élen a felső korlát maradjon változatlan, az alsó korlátot viszont töröljük el. Tehát ha $f(e)$ volt az alsó és $g(e)$ volt a felső korlát, akkor legyen mindegyiken a kapacitás $g(e)$. Ezen kívül adjuk hozzá a gráfhoz az e_1t és az se_2 éleket $f(e)$ kapacitással. Ebben a gráfban akkor és csak akkor van $\sum_e f(e)$ méretű st folyam, ha az eredetiben volt megengedett áram. Hiszen ha volt megengedett áram, akkor legyen minden ue_1 és e_2v élen ugyanannyi a folyam értéke, mint az e élen volt az áramé, míg az e_1e_2 élen pontosan $f(e)$ -vel kisebb, ennyi menjen az e_1t és az se_2 éleken, így pontosan $\sum_e f(e)$ a folyamérték. Másrészt ha van ekkora folyam, akkor minden e_1t és se_2 él telített, tehát az ue_1 és e_2v éleken folyó (egyenlő) mennyiség legalább $f(e)$, így visszaalakíthatunk egy maximális folyamot árammá.

A fenti konstrukció hátránya, hogy a csúcsok száma n -ről $2m + n$ -re nő (ahol m az élszám). Ezt kiküszöbölhetjük azzal, hogy az élek felosztása helyett minden v csúcsból megy t -be egy $\sum_{vu \in E} f(vu)$ kapacitású él, és minden v csúcsba megy s -ből egy $\sum_{uv \in E} f(uv)$ kapacitású él, csak ekkor az eredeti élek kapacitását le kell csökkentenünk $g(e) - f(e)$ -re.

Megjegyzés: A Hoffman-tétel szintén levezethető így a vágásfeltételből.

6.86. Jelöljük az s_i -ből t_i -be szállítandó mennyiséget f_i -vel. Először s_1, s_2 -be vezessünk élet egy új forrásból f_1 , illetve f_2 kapacitással és t_1, t_2 -ből pedig egy új nyelőbe f_1 , illetve f_2 kapacitással, a kapott (maximális) folyam pedig legyen u . Ezután s_1, t_2 -be vezessünk élet egy új forrásból f_1 , illetve f_2 kapacitással és t_1, s_2 -ből pedig egy új nyelőbe f_1 illetve f_2 kapacitással, a kapott (maximális) folyam pedig legyen v . Ekkor $(u + v)/2$ és $(u - v)/2$ egy s_1t_1 illetve egy s_2t_2 folyam. Ráadásul az összegük és a különbségük is eleget tesz minden élen a kapacitásfeltételeknek is, hiszen u -t illetve v -t kapjuk. Már

csak az egészértékűség kell. Mivel ekkor u -ról és v -ről is feltehetjük, hogy egészértékű, csak azt kell biztosítanunk, hogy minden élen megegyezzen a paritásuk. Ehhez mindkettőről megmutatjuk, hogy feltehető, hogy minden élen a kapacitásával megegyező paritású folyam folyik rajta mindkét folyam-ban. Ha nem így lenne valamelyik folyamra, akkor az Euler-feltétel miatt lenne eltérő folyamkapacitás paritású élekből kör. Egy ilyen körön azonban bármelyik irányban megnövelhetjük a folyam értékét eggyel. Miután u és v így egyezik minden élen a kapacitás paritásával, így egymással is, tehát készen vagyunk.

6.87. Feltehetjük, hogy a p_i -k csökkenő sorrendben vannak, azaz p_1 a leg-hasznosabb áru. Futtassunk $i = 1, \dots, k$ -ra sorban egy maximális st_i folyam-kereső algoritmust az aktuális segédgráfban. Így minden $t_1, \dots, t_i$ -re maximális hasznú lesz az s -ből $t_1, \dots, t_i$ -be menő folyam nagysága. (Ez látszik könnyen, ha a gráfhoz hozzáadjuk minden $i < j$ -re a $t_i t_j$ éleket korlátlan kapacitással, amiket persze sosem fogunk használni.) Természetesen az egészesség is teljesül, ha a kapacitások egészek.

6.88. Nincs ilyen p . Tegyük fel ugyanis, hogy a gráf egy hosszú, irányított út, melynek két utolsó csúcsa a két nyelő, és az út minden éle duplán szerepel (aki nem szereti a multigráfokat, az ossza fel mindegyik élet egy-egy pont-tal). Ekkor minden csúcsnál egy p -től függő pozitív konstans eséllyel egymás lineáris kombinációja lesz a két kimenő élen. Tehát, ahogy az út hossza tart a végtelenbe, úgy tart annak az esélye a nullához, hogy a nyelőkhöz eljutó jelek függetlenek maradnak.

6.89. Azokba a csúcsokba tudunk két $\mathbb{F}_p$ -beli jelet küldeni, amikbe megy két éldiszjunkt út. Az a network coding tétel, hogy ezekbe tényleg lehet szimultán két jelet küldeni. Ezeket a csúcsokat pedig a 6.82/b feladat alapján lineáris időben meg tudjuk keresni.

12.9. Approximáció

6.90. (a) Dinamikus programozással megnézzük, hogy mennyire lehetnek tele a ládák az első i elem berakása után. Ez mindig $n^{\#l\acute{a}da}$ lehetőség, tehát polinomiális lesz az algoritmus.

(b) 2-approximációt ad, mert bármely két szomszédos láda tartalma nagyobb, mint egy láda kapacitása. Ez pedig éles, ha a csomagok mérete felváltva $0,5$ és ϵ .

(c) Ez ekvivalens a partíciós problémával, ami **NP**-teljes.

6.91. (a) Jelöljük a legnagyobb független csúcshalmaz méretét $\alpha(G)$ -vel. Ekkor $\alpha(G) + \tau(G) = n$ (ez az ún. Gallai-azonosságok egyike), a független

csúcshalmaz pedig ekvivalens a klikkel a komplementergráfban, tehát ez is **NP**-nehéz.

(b) Mohón vegyük sorban minden eddig fedetlen él *mindkét* végpontját S -hez, amíg van fedetlen él. Az algoritmus közbeni élek párosítást alkotnak, tehát legalább $|S|/2$ csúcsra szükség van már csak az ő lefogásukhoz is.

Megjegyzés: Habár a klikkszám meghatározására nem létezik hatékony approximációs eljárás, erre a feladatra van.

6.92. (a) Készítsünk egy minimális feszítőfát, ennél nyilván nem lehet kisebb semmilyen összefüggő részgráf éleinek összege. Viszont legfeljebb kétszer ilyen hosszúságú Hamilton-kört gyárthatunk az alábbi algoritmussal. Először járjuk be a fát, minden élet kétszer érintve. Ebben a körsétában lecserélhetünk bármely utat a két végpontja közötti élre, a metrika miatt ettől nem nő a körséta hossza. Ilyen cserékkel könnyen Hamilton-körre alakíthatjuk a körsétát, ezzel megoldva a feladatot.

(b) Azt használjuk, hogy annak eldöntése, hogy van-e egy gráfban Hamilton-kör **NP**-teljes. A bemenetgráf éleinek hossza legyen 1, a nem-éleinek hossza pedig $ng(n)$. Ha az eredeti gráfban volt Hamilton-kör, akkor az újban van n hosszú Hamilton-kör, ha nem volt, akkor viszont legalább $ng(n)$ hosszúságú lesz minden Hamilton-kör.

12.10. Kódolás

6.93. Kezdeti ábécé: $1 - E$, $2 - M$, $3 - S$. Kód olvasása közben az alábbi betűket fejthetjük vissza és az alábbi kódokkal bővül az ábécé: $1 : E$, $2 : M(4-EM)$, $4 : EM(5-ME)$, $1 : E(6-EME)$, $3 : S(7-ES)$, $7 : ES(8-SE)$, $6 : EME(9-ESE)$, $2 : M(10-EMEM)$, $8 : SE(11-MS)$, $5 : ME(12-SEM)$, $8 : SE(13-MES)$, $12 : SEM(14-SES)$, $6 : EME(15-SEME)$, $15 : SEME(16-EMES)$, $17 : SEMES$, $18 : SEMESS$, $16 : EMES$, $1 : E$, azaz összeolvasva: EMEMESESEMSEMSEMESESEMEMESEMESEMESEMESEMESEMESE – sajnos nem teljesen értelmes, de legalább gyakoroltuk a nehezebb eseteket is...

6.94. Négyelemű esetén. Ha az ábécé legfeljebb három elemű lenne, akkor a második karakter legfeljebb 4 lehetne. Másfelől n betűs ábécé esetén $n + i$ legfeljebb $i + 1$ hosszú szöveget kódolhat, hiszen minden új kód valamelyik korábbi kódszó hosszát növeli eggyel. Négyelemű ábécére itt pont mindig egyenlőség lesz, hiszen ha 1 az A kódja volt, akkor 5 az AA -é lesz, 6 az AAA -é stb.

6.95. Legfeljebb n -szer, hiszen utána már bármilyen betű is jön, arra lesz egy kódszavunk.

6.96. Nincs, próbáljuk ugyanis visszafejteni a kódot. Mivel AAB -vel kezdődik a kódolt szöveg, ezért az $n + 1$ az AA kódja lesz, az $n + 2$ pedig az AB -é. De később lesz két egymást követő $n + 1$ -es (ami $AAAA$ -t jelent), ezért az első $n + 1$ leírása után már lesz AAA -ra is kódunk (és mivel eddig nem volt, ezért $3n + 1$ lesz, de ez nem fontos). Mivel a második $n + 1$ -et egy $n + 2$ követi (ami $AAAB$ -t jelent) ezért AAA kódját $(3n + 1)$ kéne írunk az AA -é $(n + 1)$ helyett.

Elekes György

Elekes György 1972-től egészen 2008-ban bekövetkezett haláláig az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanára volt. Jelen feladattár szerzői, egykori diákjai, előttte tisztelegnek ezzel a feladattárral.

Elekes 1963 és 1967 között a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium diákjaként aktív résztvevője volt hazai és nemzetközi matematikaversenyeknek. 1965-ben bronz-, 1967-ben aranyérmet nyert a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. 1966-ban második díjat kapott a Kürschák József Emlékversenyen.

Egyetemi tanulmányait az ELTE-n folytatta 1967 és 1972 között. Az egyetem befejezése után is az ELTE-n maradt, 1983-ig az Analízis Tanszéken, majd 1983-tól az akkor alapított Számítógéptudományi Tanszéken. 1995-ig adjunktus, 1995-től 2005-ig docens, majd 2005-től egyetemi tanár beosztásban dolgozott a tanszéken.

Elekes György számos matematikai területen ért el kimagasló eredményt.

Kezdetben halmazelmélettel foglalkozott, megoldotta Erdős és Hajnal egy halmazokra vonatkozó Ramsey-típusú problémáját. Később foglalkozott még bonyolultságelmélettel, kombinatorikus geometriával, geometriai algoritmusokkal és additív kombinatorikával. Ez utóbbi területen az összeg-szorzat halmazokra vonatkozó becslése során hídat létesített az additív kombinatorika és az incidenciageometria között, ezzel az új szemlélettel óriási áttörést ért el az additív kombinatorika területén. Munkáját Fields-érmes matematikusok hivatkozásai övezik.

Jelen feladattár szerzői mégis, mint tanárra emlékeznek Elekes Györgyre. Ezen jegyzet mindhárom szerzőjét tanította elsőéves korukban véges matematikára. Csikvári Péter és Pálvölgyi Dömötör később tőle tanulta a Valószínűségi módszerek és struktúrák tantárgyat. Pálvölgyi Dömötör neki köszönheti egyik kutatási területét, a kombinatorikus geometriát.

