GEOMETRIA

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Moussong Gábor

GEOMETRIA

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

© 2014–2019, Moussong Gábor,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Lektorálta: Fodor Ferenc

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 257 6
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: affin, konvex, euklideszi, gömbi, inverzív, projektív, hiperbolikus, poliéder, politóp, transzformáció, csoporthatás, kúpszelet, modell, ciklus, szféra.

ÖSSZEFOGLALÁS: A Geometria című jegyzet az ELTE Matematika alapszakán a matematikus szakirányú képzés geometriaanyagát öleli fel. A lineáris algebra és az absztrakt algebra eszközeit használva bevezetést ad a klasszikus geometriai terek magasabb dimenziós, modern elméletébe. Az affin geometria keretein belül az affin terek és affinitások mellett a konvex halmazok, konvex poliéderek és politópok elméletének alapjait ismerteti. Az euklideszi geometriáról szóló fejezetben az euklideszi izometriák tárgyalása mellett gömbi és inverzív geometriáról, a szabályos politópok osztályozásáról, és a konvex testek elméletének alapjairól van szó. A projektív geometriai fejezet fő témakörei a projektív transzformációk és a kúpszeletek köré csoportosulnak, ezzel előkészítve a hiperbolikus geometria modelleken keresztül történő tárgyalását.

Tartalomjegyzék

Előszó **1**

Bevezetés: a klasszikus euklideszi tér **5**

0.1. A geometria axiomatikus alapjai 5
0.2. A geometriai vektorfogalom 10
0.3. Gömbháromszögek 21

Affin geometria **29**

1. Affin terek 29
   1.1. Affin terek és affin leképezések 29
   1.2. Affin alterek 34
   1.3. Affin kombinációk, függetlenség, affin bázis 39
   1.4. Osztóviszony, súlypont, baricentrikus koordináták . . 44
   1.5. Az affin geometria néhány jellegzetes tétele 48
   1.6. Az affin geometria alaptétele 51
   1.7. Lineáris kiterjesztés 57
   1.8. Véges dimenziós valós affin terek 60
2. Konvex halmazok affin térben 67
   2.1. Konvex halmazok, konvex kombinációk 67
   2.2. Konvex halmazokra vonatkozó alaptételek 70
   2.3. Konvex halmazok topológiai tulajdonságai 73
   2.4. Elválasztás, támaszhipersíkok 78
   2.5. Határpontok 81
3. Konvex poliéderek és politópok 84
   3.1. Konvex poliéderek és lapjaik 85
   3.2. Politópok 90
   3.3. Euler tétele 95
   3.4. Poláris halmazok 98

Euklideszi geometria 105

4. Euklideszi terek és transzformációik 105
   4.1. Euklideszi vektorterek és ortogonális transzformációk . 105
   4.2. Euklideszi terek és izometriák 108
   4.3. Alterek, merőlegesség, szög, tükrözések 113
   4.4. Az izometriák szerkezete és osztályozása 118
   4.5. Az ortogonális csoportok szerkezete 122
   4.6. Hasonlóság 129
   4.7. Magasabb dimenziós gömbi geometria 133
   4.8. Hopf-féle körrendszerek 141
5. Inverzív geometria 146
   5.1. Gömbök, hatvány 146
   5.2. Inverzió 154
   5.3. Az inverzív csoport 161
   5.4. Körsorok az euklideszi síkon 168
   5.5. Körsorok az inverzív geometriában 173
6. Szabályos politópok 177
   6.1. Csoporthatások 177
   6.2. Véges izometriacsoportok 182
   6.3. Szabályos politópok 190
7. Konvex testek euklideszi térben 201
   7.1. Térfogat és felszín 201
   7.2. Szélesség 207
   7.3. Hausdorff-távolság 211
   7.4. Paralleltartományok térfogata 214
   7.5. Steiner-féle szimmetrizáció 220
   7.6. Nevezetes egyenlőtlenségek 224

Projektív geometria 227

8. A projektív tér szerkezete 227
   8.1. Projektív terek és alterek 227
   8.2. Koordináták 230
   8.3. Projektív transzformációk 238
   8.4. Az affin geometria és a projektív geometria kapcsolata 244
   8.5. Illeszkedési tételek 247
   8.6. Kettősviszony 252
   8.7. A projektív egyenes geometriája 261
9. Kúpszeletek 272
   9.1. Másodrendű hiperfelületek 273

9.2. Polaritás 285
9.3. Kúpszeletsorok 292
9.4. A kúpszeletek projektív struktúrája 302

Hiperbolikus geometria **311**

10. A hiperbolikus geometria modelljei 311
10.1. Projektív modell 312
10.2. Konform modellek 324
10.3. Hiperboloidmodell 333
10.4. A hiperbolikus tér 347
11. A hiperbolikus sík 350
11.1. Párhuzamosság, sugársorok, ciklusok 350
11.2. A hiperbolikus sík egybevágóságai 359
11.3. Trigonometriai tételek 365
11.4. Ciklusok ívhossza 371
11.5. Terület 379
12. Magasabb dimenziós hiperbolikus terek 387
12.1. Hipersíkok és szférák 387
12.2. A hiperbolikus tér izometriái 397
12.3. A szférák belső geometriája 402

Tárgymutató **409**

Előszó

Ez a jegyzet az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika alapszakán a matematikus szakirányú hallgatók számára oktatott háromféléves Geometria című tantárgy tananyagát tartalmazza némileg kibővített és átdolgozott formában. Ez a tantárgy az ELTÉ-n folyó matematikusképzésben a több tantárgyat is magában foglaló geometriaoktatás első lépcsője. Célja, hogy áttekintő bevezetést adjon a geometria klasszikus és modern fejezeteibe, kialakítsa a geometria alkotó műveléséhez szükséges eszköztárat, és felkészítsen a korszerű, kutatói szintű geometriai ismeretek befogadására.

A tantárgy tananyaga a sok éve kialakult tanterv szerint az első félévben az affin geometria és a konvex geometria, a második félévben az euklideszi geometria, a harmadik félévben a projektív geometria és a hiperbolikus geometria bevezető fejezeteit tartalmazza. Ebben a jegyzetben is ezt a sorrendet, és az anyag felépítésének ehhez a sorrendhez illeszkedő belső logikáját követjük.

A magyar matematikai hagyományok egyik legértékesebb darabja Bolyai János műve a hiperbolikus geometria megteremtésében. Ezért a magyarországi matematikusképzés tananyagának fontos célja, hogy a hiperbolikus geometria mibenlétéről, matematikán belül elfoglalt helyéről, a modern matematikai elméletekkel való kapcsolatáról alapos ismereteket nyújtson. Ezt a célt kívánjuk ezzel a tananyaggal is elérni oly módon, hogy a hiperbolikus geometria nem a Bolyai által követett, történeti felépítésében, hanem modern matematikai elméletként, lényeges geometriai és algebrai előismeretekre építve az anyag végén szerepel. A megelőző fejezetek nagy része – így például az inverzív geometriáról vagy a projektív geometriáról szóló több fejezet – előkészítésként szolgál a hiperbolikus geometriához. Ezen kívül a tananyagban olyan témák is helyet kaptak, amelyek részben alkalmazhatóságuk miatt, részben önmagukban érdekesek, és az általános matematikai műveltséghez tartoznak. Ilyenek például a konvex geometriáról vagy a szabályos politópokról szóló fejezetek.

A jegyzet nem törekszik arra, hogy tárgya önmagában, máshonnan szerzett matematikai ismeretek nélkül is feldolgozható legyen. Éppen ellenkezőleg, hangsúlyozottan kihasználja a modern matematika eszközeit, épít a párhuzamosan futó más matematikai tantárgyakban bevezetett fogalmakra és elmé-

tekre. A jegyzet feldolgozásához a középiskolás szintű geometria készségszintű ismeretén kívül elengedhetetlen bizonyos jártasság az absztrakt matematika gondolkodásmódjában és nyelvezetében.

Röviden vázoljuk, milyen tárgyi előismeretek szükségesek a tananyag egyes részeinek a feldolgozásához.

Az affin geometriáról szóló fejezetek tematikája lényegében csak lineáris algebrára épít. Mind az affin terekkel, mind a konvex halmazokkal foglalkozó anyagrészhez nélkülözhetetlenek a topológia legegyszerűbb fogalmai, ezeket a tananyag röviden összefoglalja. Csoportelméletre mint előismeretre ehhez az anyagrészhez nincs szükség, bár néhány megfogalmazás a geometriai információ tömör átadása érdekében a csoportok és homomorfizmusok fogalmát használja.

Az euklideszi geometriát feldolgozó fejezetekben már lényegesen építünk a csoportelmélet eszközeire és nyelvére. Egyes kérdésekben konkrét speciális algebrai vagy analízisbeli előismeretek (pl. kvaterniók, metrikus terek topológiája, Jordan-mérték) is hasznosak.

A projektív geometriáról és hiperbolikus geometriáról szóló tananyaghoz nincs szükség az eddigieken túlmenő tárgyi előismeretre. Mindkét témában fontos szerepet játszik a kvadratikus alakok geometriája, az ehhez szükséges algebrai hátteret a jegyzet több ponton is összefoglalja.

A tananyag a geometria egészéről vállaltan egyoldalú képet mutat: a hangsúlyok eltolódnak az absztrakt matematikai struktúrák, az algebrai szemléletmód irányába. Terjedelmi korlátok miatt a geometria több fontos fejezete nem szerepel, vagy méltatlanul kevés teret kap a jegyzetben. Gyakorlatilag egyáltalán nincsen benne szó úgynevezett „elemi” geometriáról, az axiomatikus geometria is csak érintőlegesen szerepel a tananyag egy-két pontján, és a geometria kombinatorikus vonatkozásai is csak áttételesen jelennek meg. A jegyzet elkerüli és jórészt említés nélkül hagyja a tananyag kapcsolatait a differenciálgeometriával még azokon a pontokon is, ahol ennek természetes helye lenne. Ennek az az oka, hogy a differenciálgeometria oktatása és apparátusának kifejlesztése külön tantárgy keretében történik.

A jegyzetben a geometria fogalmait az általánosságnak a szokásosnál valamivel magasabb szintjén, absztrakt keretek között tálaljuk. A különféle geometriai tereket tetszőleges dimenzióban mutatjuk be. Ahol lehetséges, nem csupán a valós számokra építve, hanem tetszőleges test fölött dolgozva fogalmazzuk meg a releváns definíciókat és tételeket. Előnyben részesítjük a fogalmi megközelítést, a koordinátamentes gondolatmeneteket a számolásokkal szemben. Ez például abban mutatkozik meg, hogy ahol lehet, mátrix helyett lineáris leképezést szerepeltetünk, az affin tér geometriájában az elsőfokú egyenleteket az „affin forma” fogalma helyettesíti, illetve a projektív geo-

metriában másodfokú egyenletek helyett kvadratikus alakok játszanak fontos szerepet.

A tananyag összeállításában hiánytalan deduktív felépítésre és logikai következetességre törekedtünk. A tételek általában bizonyításukkal együtt szerepelnek. Ha valamely állítás után nem áll bizonyítás, akkor az az előzmények nyilvánvaló, vagy rutinszerűen egyszerű gondolatmenettel tisztázható folyománya. A definíciók után gyakran példák következnek, amelyek segítik elhelyezni az új fogalmakat matematikai környezetükben. A példákban foglalt állítások nem minden esetben vannak részletesen megindokolva, ezért ezek az olvasótól önálló utánagondolást is igényelhetnek.

Az olvasó figyelmébe ajánlunk egy-két olyan magyar nyelvű tankönyvet és jegyzetet, amelyek kiegészíthetik és teljesebbé tehetik a geometriáról alkotott képet:

- Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006)
- Hajós Gy., Strohmajer J.: A geometria alapjai (ELTE jegyzet)
- H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai (Műszaki Könyvkiadó, 1973)
- D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Szemléletes geometria (Gondolat Könyvkiadó, 1982)

Mindenképpen meg kell említenünk azt a tankönyvet, amely az elmúlt évtizedekben klasszikussá vált és sok tekintetben – felfogásában, tartalmában – ehhez a jegyzethez is mintát adott. A tananyag több témakörének a felépítéséhez és néhány nevezetes tétel (például 1.6.7, 7.6.2) bizonyításához ez a könyv adta a forrást:

- M. Berger: Geometry (Springer, 1987)

A jegyzetben foglalt tananyag kialakítása, rendszerbe foglalása, a matematikai apparátus fölépítése és kidolgozása az ELTE Geometriai Tanszékének kollektív munkája. Külön szeretném megköszönni tanszéki kollégáim közül Csikós Balázs és Lakos Gyula segítségét, akiktől az anyag kialakításában rengeteg segítséget kaptam. Köszönettel tartozom Fodor Ferencnek, a Szegedi Tudományegyetem docensének is, aki a jegyzet lektoraként az anyag gondos átfésülésével és hasznos tanácsokkal segítette munkámat.

A jegyzet a TAMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 jelű pályázat segítségével készült.
Budapest, 2013.

Moussong Gábor

Bevezetés: a klasszikus euklideszi tér

Mielőtt elkezdenénk a magasabb dimenziós geometria absztrakt algebrai alapokra épülő szisztematikus tárgyalását, megismerkedünk a hagyományos háromdimenziós euklideszi geometria tanulmányozásának azzal a módszerével is, amely lehetővé teszi a geometriai fogalmak bevezetését pusztán logikai alapokon, a többi matematikai diszciplinától függetlenül. Az általunk később követendő felépítésben centrális szerepet játszik az algebrai vektorfogalom. A vektor absztrakt algebrai definíciója számára a geometria eszközeivel értelmezett vektor ad mintát, ezért ebben a bevezető fejezetben áttekintjük a vektorok geometriai származtatását az axiomatikus geometria által adott keretekből kiindulva. A klasszikus euklideszi vektorgeometria alkalmazására a gömbháromszögek trigonometriájában mutatunk példát.

0.1. A geometria axiomatikus alapjai

A modern matematika különféle matematikai struktúrákat, azaz olyan logikai rendszereket vizsgál, amelyek általában valamilyen alaphalmazon megadott alapfogalmakból: kitüntetett részhalmazokból, függvényekből, relációkból, műveletekből, vagy ezek valamilyen kombinációjából állnak. Ezeknek a struktúraelemeknek eleget tell tenniük bizonyos alapkövetelményeknek, az úgynevezett axiómáknak. A vizsgált elmélet azoknak a definícióknak, illetve tételeknek az összességét jelenti, amelyeket a logika szabályait követve az alapfogalmakból és az axiómákból lehet bevezetni, illetve bebizonyítani.
A geometria a matematika – sőt, általában a tudományos gondolkodás – legrégebbi olyan területe, amelyben a fogalmak logikai tisztázása iránti igény ebben a formában felmerült. Az ókori görög matematika egyik csúcsteljesítményét jelentő alkotásában Euklidész állította össze a geometria első ismert axiómarendszerét, mintát állítva ezzel a későbbi korok tudománya számá-

ra. Ezt az axiómarendszert a modern kori matematika precizitási igényeinek megfelelően Hilbert dolgozta át, és tette az axiomatikus euklideszi geometria mai szokásos kiindulópontjává. Az alábbiakban vázlatosan áttekintjük a Hilbert-féle axiómarendszernek azt a valamelyest egyszerűsített változatát, amely a geometria megalapozási lehetőségei közül Hajós György előadásai nyomán Magyarországon leginkább ismert.

Azt mondjuk, hogy az X halmaz euklideszi tér (pontosabb szóhasználattal „klasszikus" euklideszi tér, ha hangsúlyozottan meg akarjuk különböztetni a későbbi fejezetekben tárgyalandó, algebrára alapozott általános euklideszi térfogalomtól), ha a következő két feltételnek eleget tesz:

(1) X el van látva az euklideszi tér struktúráját alkotó, alább értelmezendő $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$, $\equiv$ struktúraelemekkel (ezek alkotják az euklideszi geometria alapfogalmait), és

(2) az (1)-beli stuktúraelemekre vonatkozóan érvényesek az alább felsorolandó $(I1)$–$(I7)$, $(R1)$–$(R4)$, $(E1)$–$(E4)$, (F) és (P) állítások (az euklideszi geometria axiómái).

(A formális pontosság kedvéért nem az X halmazt, hanem a teljes struktúrát magában foglaló $(X, \mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{R}, \equiv)$ rendezett ötöst kellene euklideszi térnek nevezni, de a gördülékenység érdekében most is és a későbbiekben is inkább csak az alaphalmaz jelével nevezzük meg a geometriai struktúrával ellátott teret.)

A struktúraelemek közül az első kettő a tér illeszkedési struktúráját adja meg:

$\mathcal{E}$ részhalmazoknak egy rendszere X-ben, elemeit egyeneseknek nevezzük, és

$\mathcal{S}$ is X-beli halmazrendszer, elemeit síkoknak nevezzük.

(Ezekkel az elnevezésekkel összhangban X elemeit pontoknak mondjuk.)

Az $\mathcal{E}$ és az $\mathcal{S}$ halmazrendszerre az alábbi illeszkedési axiómák vonatkoznak:

$(I1)$ Mindegyik $E \in \mathcal{E}$ egyenes legalább kételemű.

$(I2)$ Bármely két különböző $A, B \in X$ ponthoz létezik egyetlen olyan $E \in \mathcal{E}$ egyenes, amelyre $A, B \in E$.

$(I3)$ Mindegyik $S \in \mathcal{S}$ síknak van három olyan pontja, amelyek nem tartoznak egy egyeneshez.

$(I4)$ Ha valamely $A, B, C \in X$ pontok nem tartoznak egy egyeneshez, akkor létezik egyetlen olyan $S \in \mathcal{S}$ sík, amelyre $A, B, C \in S$.

($I5$) Ha egy $E \in \mathcal{E}$ egyenesnek és egy $S \in \mathcal{S}$ síknak van legalább két különböző közös pontja, akkor $E \subseteq S$.

($I6$) Ha az $S, T \in \mathcal{S}$ síkoknak van közös pontja, akkor $S \cap T$ legalább kételemű.

($I7$) Létezik X-ben négy olyan pont, amelyek nem tartoznak sem egy egyeneshez, sem egy síkhoz.

Az axiómák következő csoportja az eddigieken túl a pontok elválasztására is hivatkozik, ezzel kapcsolatos a soron következő, $\mathcal{R}$-rel jelölt struktúraelem:

> $\mathcal{R} \subseteq X \times X \times X$ háromváltozós reláció. Ha $(A, B, C) \in \mathcal{R}$, akkor azt mondjuk, hogy B elválasztja az A pontot C-től (vagy hogy B az A és C között van).

Az $\mathcal{R}$ relációra az alábbi rendezési axiómák vonatkoznak:

($R1$) Ha $(A, B, C) \in \mathcal{R}$, akkor A, B és C egy egyeneshez tartozó, különböző pontok, és $(C, B, A) \in \mathcal{R}$ is érvényes.

($R2$) Bármely két különböző $A, B \in X$ ponthoz létezik olyan C pont, hogy $(A, B, C) \in \mathcal{R}$.

($R3$) Tetszőleges $A, B, C \in X$-re $(A, B, C) \in \mathcal{R}$, $(B, C, A) \in \mathcal{R}$ és $(C, A, B) \in$ $\in \mathcal{R}$ közül legfeljebb az egyik igaz.

($R4$) Ha $A, B, C \in X$ nincs egy egyenesen, és $E \in \mathcal{E}$ olyan egyenes, amely A, B, C egyikét sem tartalmazza, és benne fekszik az A, B, C-t tartalmazó síkban, akkor vagy pontosan két olyan $P \in E$ pont létezik, vagy egyetlen olyan $P \in E$ pont sincs, amelyre $(A, P, B) \in \mathcal{R}$, $(B, P, C) \in \mathcal{R}$ vagy $(C, P, A) \in \mathcal{R}$ teljesül.

(Az ($R4$) axiómát Pasch-féle axiómának szokás nevezni. Szavakkal megfogalmazva azt jelenti, hogy egy háromszögvonalat egy a síkjában fekvő, a csúcsain át nem haladó egyenes vagy pontosan két oldalán metsz, vagy egyáltalán nem metsz.)

Az illeszkedési és a rendezési axiómák birtokában már szabatosan bevezethetők a geometria olyan fogalmai, mint a szakasz, a félegyenes, a félsík, a féltér, a szögvonal, a szögtartomány, a háromszög, a töröttvonal, a sokszögvonal, a sokszögtartomány, a konvex halmaz, a konvex burok, és bebizonyíthatók ezek ismert tulajdonságai. A további axiómák részben ezekre a fogalmakra is hivatkoznak. Az A és B végpontokkal adott szakaszt (ami az A és B között lévő pontok halmazát jelenti A-val és B-vel együtt) $[A, B]$-vel jelöljük.

Beszélhetünk háromszögek szögeiről mint az egyes csúcsokból induló, az oldalakat tartalmazó félegyenesek által kifeszített konvex szögtartományokról. Az axiómák következő csoportja előtt az utolsó hátralevő alapfogalmat, az $\equiv$ struktúraelemet vezetjük be:

> $\equiv$ ekvivalenciareláció a szakaszok és a szögtartományok halmazán. Két szakaszt, illetve szögtartományt egybevágónak mondunk, ha ebben a relációban állnak.

Az $\equiv$ relációra vonatkozóan az alábbi egybevágósági axiómákat tesszük fel:

$(E1)$ Ha adott egy P kezdőpontú F félegyenes, továbbá egy Z szakasz, akkor létezik egyetlen olyan $Q \in F$ pont, amelyre $[P, Q] \equiv Z$.

$(E2)$ Ha $(A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{R}$ és $(A_2, B_2, C_2) \in \mathcal{R}$, továbbá $[A_1, B_1] \equiv [A_2, B_2]$ és $[B_1, C_1] \equiv [B_2, C_2]$, akkor $[A_1, C_1] \equiv [A_2, C_2]$.

$(E3)$ Ha adott egy H félsík, a határán egy P kezdőpontú F félegyenes, továbbá adott egy K konvex szögtartomány, akkor létezik egyetlen olyan P kezdőpontú $G \subseteq H$ félegyenes, hogy az $F \cup G$ szögvonal által határolt konvex szögtartomány egybevágó K-val.

$(E4)$ Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekre $[A, B] \equiv [A', B']$ és $[A, C] \equiv$ $\equiv [A', C']$ teljesül, valamint az ABC háromszög A-nál levő szöge egybevágó az $A'B'C'$ háromszög A'-nél levő szögével, akkor az ABC háromszög B-nél levő szöge is egybevágó az $A'B'C'$ háromszög B'-nél levő szögével.

Az eddigi axiómákból már igen sok további geometriai fogalom származtatható, illetve tétel bizonyítható. Például be lehet vezetni szakaszok és szögtartományok körében a nagyság szerinti összehasonlítást, felezést, többszörözést, az egyenesek és síkok körében a merőlegesség fogalmát, kört, gömböt, egybevágósági transzformációkat. Értelmezni lehet a távolságmérést, azaz olyan $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ függvényt, amelyre az alábbi tulajdonságok érvényesek:

(1) $\rho(A, B) \geq 0$, és itt egyenlőség csak $A = B$ esetén áll,

(2) $\rho(B, A) = \rho(A, B)$,

(3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$,

(4) a (3) egyenlőtlenség helyén akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha $A =$ $= B$, $B = C$, vagy $(A, B, C) \in \mathcal{R}$,

(5) $\rho(A, B) = \rho(C, D)$ akkor és csak akkor áll, ha $[A, B] \equiv [C, D]$.

Az (1)–(3) tulajdonságokat szokás összefoglaló néven úgy mondani, hogy a ρ függvény metrika az X halmazon. Az (5) tulajdonság azt fejezi ki, hogy a távolságmérés összhangban van az előzőleg bevezetett egybevágóságfogalommal. Hasonló módon szögmérés is értelmezhető, azaz bevezethető egy szögmértéknek nevezett pozitív valós függvény a szögtartományok halmazán, amely szintén összhangban van a szögtartományokra vonatkozó egybevágósági relációval, és amely additív abban az értelemben, hogy ha egy K szögtartományt egy a csúcsából induló félegyenes két szögtartományra, L-re és M-re bont, akkor K szögmértéke egyenlő L és M szögmértékeinek az összegével. A távolságmérés is és a szögmérés is egyértelmű abban az értelemben, hogy ha egy előre tetszőlegesen kiszemelt szakaszt, illetve szöget egységnyi hosszúnak, illetve mértékűnek írunk elő, akkor csak egyetlen olyan metrika, illetve szögmérték létezik, amely ennek a követelménynek is eleget tesz. Megállapodás szerint a szögmérés mértékegységét úgy választjuk, hogy a derékszög mértéke $\pi/2$ legyen.

A következő axióma szemléletesen fogalmazva azt garantálja, hogy az egyenesek „folytonos vonalak”. Egy $E \in \mathcal{E}$ egyenes Dedekind-féle felbontásán olyan $E = U \cup V$ előállítást értünk, amelyben U és V az E egyenes nemüres, diszjunkt részhalmazai, és amelynél az $(A, B, C) \in \mathcal{R}$ elválasztás nem állhat fenn sem $A, C \in U$, $B \in V$ esetén, sem pedig $A, C \in V$, $B \in U$ esetén. Az alábbi folytonossági axióma ilyenkor elválasztó pont létezését garantálja.

(F) Ha $E = U \cup V$ az $E \in \mathcal{E}$ egyenes Dedekind-felbontása, akkor létezik olyan $P \in E$ pont, hogy bármely $A \in U$, $B \in V$, $A \neq P \neq B$ esetén $(A, P, B) \in \mathcal{R}$.

A folytonossági axióma felhasználásával igazolható, hogy bármely egyenes és a valós számegyenes között az egyenes mentén történő előjeles távolságmérés útján bijektív kapcsolat létesíthető (más szóval: a tér egyenesei távolságtartó módon koordinátázhatók a valós számokkal). A síkoknak vagy a térnek az iskolából ismert koordinátázásához ez még kevés, mert a koordinátavonalak megadásához a párhuzamosság fogalmára is szükség van. Ehhez már csak egy további axióma kell, a párhuzamossági axióma:

(P) Ha S sík, $E \subset S$ egyenes, és Q az S sík E-hez nem tartozó pontja, akkor S-ben legfeljebb egy olyan egyenes létezik, amely Q-t tartalmazza és diszjunkt E-től.

Bár a párhuzamossági axiómának az illeszkedési axiómák között volna a természetes helye, különválasztását és utolsóként szerepeltetését a matematika történetében játszott különleges szerepe indokolja. Euklidész kortársai is és későbbi korok matematikusai is a párhuzamossági axióma tartalmát jóval kevésbé magától értetődő igazságnak gondolták, mint Euklidész többi axiómáját. Ezért abban a reményben, hogy erre az axiómára nincs is szükség,

megpróbálták a többi axióma következményeként bebizonyítani. Két évezreden át húzódó sikertelen próbálkozások nyomán a párhuzamossági axióma bizonyíthatóságának kérdése a matematika leghíresebb problémáinak egyike lett. A tizenkilencedik században Bolyai és Lobacsevszkij egymástól függetlenül, nagyjából egyidőben jutottak arra a felismerésre, hogy a párhuzamossági axióma független a többi axiómától. A többi axiómát megtartva és (P) tagadását föltételezve olyan geometriai rendszert építettek ki, amely sok tekintetben különbözik az euklideszitől. Ezt a geometriát mai elnevezéssel hiperbolikus geometriának hívjuk. A hiperbolikus geometria axiómarendszere tehát az utolsótól eltekintve megegyezik a fenti axiómarendszerrel: az $(I1)$–(F) axiómákból áll, hozzávéve a (P) axióma tagadását. A hiperbolikus tér ugyanolyan struktúraelemekkel ellátott halmaz, mint az euklideszi tér, csak ennek a megváltoztatott axiómarendszernek tesz eleget.

Az euklideszi geometriának az axiomatikus kiindulópontból történő, minden részletre kiterjedő szabatos felépítése igen hosszadalmas és fáradságos munka még akkor is, ha csak a középiskolás geometriához tartozó fogalmakig és tételekig akarunk eljutni. Ezért ezt a felépítést ebben a tananyagban nem követjük. Felhasználjuk viszont mindazokat az ismereteket, amelyeket az euklideszi sík- és térgeometriáról a középiskolás geometria tárgyal. Ezt abban a tudatban tesszük, hogy ezekhez a fogalmakhoz és tételekhez az itt vázolt kiindulásból teljesen szabatos építkezéssel is el lehet jutni. Az axiomatikusan értelmezett euklideszi tér geometriájából csak a vektorok származtatását, tulajdonságait és felhasználását tekintjük át a következő alfejezetben. Nem járjuk végig a vektorok bevezetésének minden lépését (például nem foglalkozunk a szögfüggvények definíciójával, ismertnek föltételezve őket), hanem csak azoknak a fogalmaknak az ismertetésére szorítkozunk, amelyeket később explicit módon felhasználunk, vagy amelyek mintát adnak későbbi általános konstrukcióinkhoz.

0.2. A geometriai vektorfogalom

Tegyük fel, hogy X euklideszi tér az előző szakaszban tisztázott értelemben. Az X-ből választható rendezett pontpárok (azaz lényegében az X-beli irányított szakaszok) halmazán, $X \times X$-en a következő $\sim$ relációt vezetjük be: álljon fönn $(A, B) \sim (C, D)$ akkor és csak akkor, ha az $[A, D]$ szakasz és a $[B, C]$ szakasz felezőpontja egybeesik.

A tér axiómáiból levezethető, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció. A tranzitivitási tulajdonság szabatos bizonyítása hosszadalmas és egyáltalán nem magától értetődő. A párhuzamossági axióma a bizonyításban lényeges szerepet játszik,

amit az a tény is mutat, hogy a hiperbolikus geometriában az ilyen módon definiált reláció nem lenne tranzitív. Itt mi megelégszünk azzal a szemléletes képpel, hogy a $\sim$ reláció az irányított szakaszokat akkor sorolja egy osztályba, ha azok egyenlő hosszúak és azonos irányúak.

0.2.1. Definíció (Vektor). Az X euklideszi tér vektorainak nevezzük a $\sim$ reláció szerinti ekvivalenciaosztályokat. A vektorok halmazára a V jelölést vezetjük be. Ha $(A, B) \in X \times X$, akkor az (A, B) párt tartalmazó ekvivalenciaosztályt $\overrightarrow{AB}$-vel jelöljük. Zérusvektornak hívjuk és $\mathbf{0}$-val jelöljük az $\overrightarrow{AA}$ vektort, ez nyilván független $A \in X$ választásától.

Könnyen látható, hogy tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektorhoz és $O \in X$ ponthoz egyértelműen található olyan $A \in X$ pont, hogy $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$.

Megjegyzés. A 0.2.1. Definíció az ún. „szabad vektor” fogalmát vezeti be. Azzal, hogy nem konkrét irányított szakaszokat, hanem ekvivalenciaosztályokat tekintünk vektornak, azt a megállapodást öntjük precíz matematikai formába, hogy két irányított szakasz között nem kívánunk különbséget tekinteni, ha hosszuk és irányuk megegyezik. A vektort reprezentáló irányított szakasz tehát szabadon eltolható a térben tetszőlegesen kiszemelt kezdőpontba. Ha a tér egy O pontját mint kezdőpontot rögzítjük, akkor ezzel bijektív kapcsolatot teremtünk a szabad vektorok és az O-ból induló irányított szakaszok („helyvektorok”) között. A helyvektorok pedig a végpont kijelölése útján a tér pontjaival állnak bijektív megfeleltetésben.

0.2.2. Definíció (Vektorok hossza, szöge). A $\mathbf{v} \in V$ vektor hosszán a $|\mathbf{v}| = \rho(A, B)$ számot értjük, ahol $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. A $\mathbf{v}$ vektort egységvektornak mondjuk, ha $|\mathbf{v}| = 1$.

Két nemzérus vektor szögét 0-nak, illetve π-nek tekintjük, ha az őket reprezentáló közös kezdőpontú irányított szakaszok ugyanabba a félegyenesbe, illetve ellentétes félegyenesekbe esnek. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemzérus vektorok nem ilyenek, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögén annak a konvex szögtartománynak a szögmértékét értjük, amelyet közös O kezdőpontú, A-n, illetve B-n áthaladó félegyenesek feszítenek ki, ahol $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

Érdemes abban megállapodni, hogy a zérusvektornak bármely vektorral képzett szögét határozatlannak tekintjük.

Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha a szögük 0 vagy π, illetve merőlegesnek, ha a szögük $\pi/2$. A zérusvektor tehát párhuzamos is bármely vektorral, és ugyanakkor merőleges is bármely vektorra.

0.2.3. Definíció (Vektorok összeadása). Adott $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ esetén válasszunk tetszőlegesen egy $O \in X$ pontot, majd ehhez az $A, B \in X$ pontokat úgy, hogy

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ teljesüljön. Ekkor az $\overrightarrow{OB}$ vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ összegének nevezzük és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$-vel jelöljük. Könnyen látható, hogy az összegvektor nem függ az O pont speciális megválasztásától. Szokás úgy fogalmazni, hogy az összegvektort reprezentáló (O, B) irányított szakaszt az (O, A) és az (A, B) irányított szakasz „összefűzésével" kapjuk.

A vektorok összeadására vonatkozó alábbi műveleti tulajdonságok könnyen meggondolhatók és jól ismertek a középiskolás geometriaanyagból:

- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
- $\mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a}$,
- minden $\mathbf{a} \in V$-hez létezik olyan $\mathbf{a}' \in V$, amellyel $\mathbf{a}+\mathbf{a}' = \mathbf{a}'+\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Ez a három tulajdonság összefoglaló néven azt jelenti, hogy V csoport a vektorösszeadás műveletére nézve. A három közül az első tulajdonságot a művelet asszociativitásának nevezzük. A harmadik tulajdonságban szereplő $\mathbf{a}'$ vektort az $\mathbf{a}$ ellentett vektorának hívjuk és $(-\mathbf{a})$-val jelöljük. Használatával vektorok kivonásáról is beszélhetünk az $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ szabály szerint. Érvényes még az

- $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

kommutativitási tulajdonság is, ezért V kommutatív csoport.

0.2.4. Definíció (Vektor szorzása skalárral). Adott $\mathbf{v} \in V$ vektor és $\lambda \in \mathbf{R}$ valós szám esetén az alábbi módon értelmezzük a $\lambda\mathbf{v}$ vektort:

- ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vagy $\lambda = 0$, akkor $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\lambda \neq 0$, akkor legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ egy tetszőlegesen választott O ponttal, majd $\lambda > 0$ esetén az OA félegyenesen, $\lambda < 0$ esetén pedig az OA-val ellentétes félegyenesen válasszuk a B pontot úgy, hogy $\rho(O, B) = \lambda\rho(O, A)$ teljesüljön, ezek után legyen $\lambda\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$.

A skalárral való szorzásra nézve érvényesek a középiskolából szintén jól ismert alábbi műveleti tulajdonságok:

- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$,
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$,
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$,
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Ezek az azonosságok összefoglaló néven azt jelentik, hogy V nem csupán kommutatív csoport az összeadásra nézve, hanem vektortér a valós számok teste fölött az összeadásra és a skalárral való szorzásra mint vektorműveletekre nézve.

Ha O, A, B és C négy nem egy síkban fekvő pont, akkor az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ vektorok bázist alkotnak V számára, azaz bármely $\mathbf{x} \in V$ vektor egyértelműen állítható elő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ alakban. A V vektortér tehát háromdimenziós. Az α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$ számok az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázisra vonatkozóan.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ páronként merőleges egységvektorok, akkor az általuk alkotott bázist ortonormált bázisnak nevezzük. Ilyenkor az O, A, B, C pontok Descartes-féle koordinátarendszert feszítenek ki X-ben, amelynek O az origója, A, B és C az egységpontjai. Ebben a koordinátarendszerben valamely $P \in X$ pont koordinátái azok az x, y, z együtthatók, amelyekkel $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

0.2.5. Definíció (Skaláris szorzat). Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ vektorok skaláris szorzatát, az $\mathbf{ab} \in \mathbf{R}$ számot a következőképpen értelmezzük:

Legyen $\mathbf{ab} = 0$, ha akár $\mathbf{a}$, akár $\mathbf{b}$ a zérusvektor. Ha pedig $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{b}$, akkor legyen $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge.

A skaláris szorzat műveleti tulajdonságai:

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$,
- $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$,
- $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab})$,
- $\mathbf{ba} = \mathbf{ab}$,
- $\mathbf{aa} \geq 0$, és itt egyenlőség csak $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén áll.

Az első három tulajdonságra összefoglaló néven úgy szokás hivatkozni, hogy a skaláris szorzás mint $V \times V \to \mathbf{R}$ függvény bilineáris (azaz mindkét változójában lineáris). A negyedik tulajdonság ennek a bilineáris függvénynek a szimmetrikus voltát, az ötödik az ún. pozitív definit voltát fejezi ki. Ezeknek a tulajdonságoknak az indoklása az első kettő kivételével magától értetődő a skaláris szorzat definíciója alapján. Alább bebizonyítjuk az első két pontban szereplő, jóval kevésbé nyilvánvaló disztributív tulajdonságokat is. A skaláris szorzat szimmetriatulajdonsága miatt nyilván elég közülük a másodikkal foglalkozni.

A bizonyítás előkészítése céljából gondoljuk meg, hogy ha rögzítünk V-ben egy zérusvektortól különböző $\mathbf{e}$ vektort, akkor bármely $\mathbf{v} \in V$ vektor egyértelműen állítható elő egy $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egy $\mathbf{e}$-re merőleges vektor összegeként. Ezeket a komponenseket merőleges vetítésekkel állíthatjuk elő $\mathbf{v}$-ből, mégpedig a párhuzamos komponenst egy $\mathbf{e}$-vel párhuzamos egyenesre, a merőleges komponenst pedig egy erre merőleges síkra történő vetítéssel. Ezek a vetítések az irányított szakaszok összefűzését megtartják, ezért a vektorösszeadásnak az összefűzésen alapuló 0.2.3-beli definícióját tekintetbe véve láthatjuk, hogy két vektor összegének az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos, illetve az $\mathbf{e}$-re merőleges komponense egyenlő a külön-külön vett megfelelő komponensek összegével. (Ugyanez természetesen a skalárral való szorzásra is érvényes.)

Ha $|\mathbf{e}| = 1$, akkor egy tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektorral vett $\mathbf{ev}$ skaláris szorzat a koszinuszfüggvény szokásos tulajdonságai alapján a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{e}$ irányú vetületének az előjeles hosszával egyenlő. Ezért $\mathbf{v} \in V$-nek az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos komponense az $(\mathbf{ev})\mathbf{e}$ vektor. A párhuzamos komponens képzésének az imént megállapított összegtartási tulajdonsága tehát azt jelenti, hogy $\big(\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\big)\mathbf{e} = (\mathbf{eb})\mathbf{e} + (\mathbf{ec})\mathbf{e}$. Ebben az egyenlőségben mindkét vektor ugyanannak az $\mathbf{e}$ egységvektornak skalárszorosa, ezért a szóban forgó skalárok egyenlők: $\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{eb} + \mathbf{ec}$. Ez pedig éppen a bizonyítandó második disztributivitási azonosságnak az a speciális esete, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor. Az általános eset ebből nyilvánvaló módon következik mindkét oldalnak az $|\mathbf{a}|$ skalárral való szorzásával.

0.2.6. Állítás. *Ha az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok koordinátái valamely* V*-beli ortonormált bázisra vonatkozóan* a_1, a_2, a_3, *illetve* b_1, b_2, b_3, *akkor*

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a szóban forgó ortonormált bázis, ekkor bármely i, j indexpárra az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ skaláris szorzat 1-gyel egyenlő, ha $i = j$, és 0-val, ha $i \neq j$. Ezt felhasználva

$$\mathbf{ab} = \left(\sum_i a_i\,\mathbf{e}_i\right)\left(\sum_j b_j\,\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j} a_ib_j\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sum_i a_ib_i\,. \qquad \square$$

A skaláris szorzat a V vektorteret az ún. euklideszi vektortér struktúrájával ruházza föl. Tetszőleges dimenziójú valós vektorterek esetében definíció szerint egy a fenti műveleti tulajdonságoknak eleget tevő bilineáris függvény mint skaláris szorzat teszi a vektorteret euklideszi vektortérré. Ez a konstrukció az alapja az euklideszi térfogalom magasabb dimenziós általánosításának, amely későbbi fejezetek tárgya lesz.

Az elemi geometriában gyakran szerepet játszik az egyenes irányítása a nyíllal kijelölt befutási irány kijelölésével, a sík irányítása a háromszögek körüljárása vagy az előjeles forgásszög megadásával, illetve a tér irányítása a balés jobbsodrás megkülönböztetése (a „jobbkézszabály”) formájában. Ennek a fogalomnak a precíz definícióját fogjuk most tárgyalni. Miután az eljárás a dimenziótól független, az irányítással kapcsolatos fogalmakat tetszőleges (véges) dimenziójú valós vektorterek esetére vezetjük be. Erre fogunk majd hivatkozni az affin geometriáról szóló anyagrész 1.8. szakaszában.

0.2.7. Definíció (Azonos irányítású bázisok). Legyen V véges dimenziós valós vektortér, $d = \dim V \geq 1$. Tegyük föl, hogy $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_d)$ a V vektortér két rendezett bázisa. Állítsuk elő a második bázis mindegyik vektorát az első bázishoz tartozó vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} \mathbf{a}_j \qquad (i = 1,2, \ldots, d)\,.$$

Tekintsük az együtthatók alkotta $A = (\alpha_{ij})$ valós négyzetes mátrixot. Azt mondjuk, hogy $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_d)$ azonos irányítású bázisok, ha $\det A > 0$. Ezt a tényt az $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d) \sim (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_d)$ jellel jelöljük. Ezzel bevezettük a $\sim$ relációt a V-beli rendezett bázisok halmazán.

A $d = 1$ esetben egyetlen nemzérus vektor alkot bázist. A $\sim$ reláció ebben az esetben azt jelenti, hogy a két bázis közül a másodikban szereplő vektor az elsőnek pozitív számszorosa.

0.2.8. Tétel. *A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, amelyhez pontosan két ekvivalenciaosztály tartozik.*

Bizonyítás. A 0.2.7-beli két bázis kapcsolatát röviden úgy fogalmazzuk, hogy a másodikat az elsőből az A mátrix származtatja.

Bármelyik rendezett bázist saját magából az I egységmátrix származtatja. Így tehát $\det I = 1 > 0$ miatt a $\sim$ reláció reflexív.

Ha a második bázist az elsőből A származtatja, akkor az elsőt a másodikból az A^{-1} inverz mátrix származtatja. Ha $\det A > 0$, akkor $\det A^{-1} = 1/\det A > 0$, ezért a $\sim$ reláció szimmetrikus.

Ha a második bázist az elsőből az A mátrix, egy harmadikat a másodikból a B mátrix származtatja, akkor kézenfekvő számolás mutatja, hogy a harmadikat az elsőből a BA mátrixszorzat származtatja. Ha mind $\det A$, mind $\det B$ pozitív, akkor ugyancsak pozitív a $\det(BA) = \det B \cdot \det A$ determináns, ezért a $\sim$ reláció tranzitív.

A $(-\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$ bázist az $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$ bázisból nyilván negatív determinánsú mátrix származtatja, tehát az ekvivalenciaosztályok száma legalább kettő.

Ha három rendezett bázis közül a másodikat az elsőből negatív determinánsú mátrix származtatja, valamint a harmadikat a másodikból is negatív determinánsú mátrix származtatja, akkor az előbb megállapított szorzási szabály miatt az első és a harmadik bázis ekvivalens. Emiatt nem lehet kettőnél több ekvivalenciaosztály. □

0.2.9. Definíció (Vektortér irányítása, pozitív bázis). Legyen V véges dimenziós valós vektortér, $d = \dim V \geq 1$. A V vektortér irányításán a 0.2.8. Tételbeli két ekvivalenciaosztály egyikének a kijelölését értjük. Irányított vektortérben a kijelölt osztályba tartozó bázisokat pozitív irányítású bázisoknak, vagy röviden pozitív bázisoknak nevezzük, a másik osztályba tartozókat negatívaknak.

Mindennapi tapasztalatunk a minket körülvevő térről, hogy egyes tárgyakat nem lehet folytonos mozgatással egymásba vinni annak ellenére, hogy egybevágók. Ez különbözteti meg például a bal kezünket a (jó közelítésel vele egybevágó) jobb kezünktől, és ez az alapja a háromdimenziós mechanikában gyakran alkalmazott jobbkézszabálynak. Ennek a jelenségnek a tér irányításával való kapcsolatára világítunk rá.

0.2.10. Definíció (Egymásba deformálható bázisok). Tegyük föl, hogy $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ két rendezett bázis a d-dimenziós V valós vektortérben. Azt mondjuk, hogy ez a két bázis egymásba deformálható, ha léteznek olyan $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d : [0,1] \to V$ folytonos leképezések, amelyekre $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{a}_i$, $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{b}_i$ $(i = 1, \ldots, d)$, és minden $t \in [0,1]$-re $\big(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_d(t)\big)$ bázis V-ben.

Könnyen meggondolható, hogy a rendezett bázisok egymásba deformálható volta ekvivalenciareláció. Ez magyarázza az elnevezés szimmetrikus megfogalmazását is. Nyilván a $[0,1]$ paraméterintervallum helyett bármilyen más zárt intervallum is szerepelhetne, ez a definíció tartalmát nem befolyásolja.

0.2.11. Tétel. *Két V-beli rendezett bázis akkor és csak akkor egymásba deformálható, ha azonos irányítású.*

Bizonyítás. Gondoljuk meg először, mit jelent a 0.2.10-beli $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d : [0,1] \to V$ deformáció az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ bázisra vonatkozó koordináták nyelvén. Rögzített t paraméter mellett $\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}(t)\mathbf{a}_j$ alkalmas $\alpha_{ij}(t)$ valós együtthatókkal, amelyeket az $A(t) = \big(\alpha_{ij}(t)\big)$ négyzetes mátrixba rendezünk. A definíció megköveteli, hogy az $A(t)$ mátrix folytonosan függjön t-től (azaz mindegyik $\alpha_{ij} : [0,1] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos legyen), és minden t-re $A(t)$ invertálható mátrix legyen.

Ha létezik ilyen deformáció az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ rendezett bázisok között, akkor a $\det A(t)$ függvény folytonos és nem veheti fel a 0 értéket. Az $A(0)$ mátrix az egységmátrix, $\det A(0) = 1$, ezért a $\det A(t)$ függvénynek

pozitívnak kell maradnia az egész [0,1] intervallumon. A $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ bázist az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ bázisból a pozitív determinánsú $A(1)$ mátrix származtatja, tehát a két bázis azonos irányítású.

A fordított irányú bizonyításhoz elemi deformációs lépéseket konstruálunk, és a kívánt deformáció ilyen lépések egymásutánjaként lesz előállítható. Az elemi lépések három típusát használjuk:

– Az egyik kiszemelt bázisvektort pozitív skalárral szorozzuk, amely az 1 értékből kiindulva folytonosan változik. A mátrixok nyelvén ez az egyik sor (tetszőlegesen előírható) pozitív számmal történő szorzását eredményezi.

– Az egyik bázisvektorhoz hozzáadjuk egy másik bázisvektornak egy 0-ból kiindulva folytonosan változó valós számmal vett skalárszorosát. Ez a lépés a mátrix egyik sorához hozzáadja egy másik sor (tetszőlegesen előírható) számszorosát.

– Kiszemelünk két különböző bázisvektort, $\mathbf{a}_i$-t és $\mathbf{a}_j$-t ($i \neq j$), ezekre az

$$\mathbf{r}_i(t) = \cos t\, \mathbf{a}_i + \sin t\, \mathbf{a}_j \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_j(t) = -\sin t\, \mathbf{a}_i + \cos t\, \mathbf{a}_j$$

deformációt alkalmazzuk, miközben a többi bázisvektort változatlanul hagyjuk: az i-től és j-től különböző k indexekre $\mathbf{r}_k(t) = \mathbf{a}_k$. Ha a t paraméter a $[0, \pi/2]$ intervallumot futja be, akkor a defomáció végére a két kiszemelt bázisvektor helyet cserél és az egyikük előjelet vált. Ha pedig t végigfut a $[0, \pi]$ intevallumon, akkor végül mindkét bázisvektor az eredeti helyére kerül vissza ellentétes előjellel. Az együtthatómátrixokon ezek a deformációk tehát az egyik esetben azt eredményezik, hogy két sor helyet cserél, miközben az egyikük előjelet vált, illetve a másik esetben azt, hogy két sor egyidejűleg előjelet vált.

Ha adottak az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ rendezett bázisok és A jelöli azt a mátrixot, amely a $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ bázist származtatja az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ bázisból, akkor az A mátrixon lényegében végigkövethetjük a Gauss-elimináció szokásos lépéseit az elemi deformációs lépések alkalmazásával. Miután a harmadik fajta deformációs lépésben sorcserét csak előjelváltás árán tudunk megvalósítani, illetve sorok előjelét csak párosával változtathatjuk meg, az elimináció végeredményeként nem feltétlenül az egységmátrixhoz jutunk el, hanem esetleg ahhoz a mátrixhoz, amely az egységmátrixtól csak az utolsó elem előjelében tér el.

Ez azt jelenti, hogy $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$-ből deformációval el lehet jutni vagy $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$-be, vagy $(\mathbf{b}_1, \ldots, -\mathbf{b}_d)$-be. A deformáció során a rendezett bázis irányítása nem változik, és a két utóbbi rendezett bázis ellentétes irányítású, ezért

ha $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d)$ és $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ azonos irányításúak, akkor a deformáció eredménye $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$. □

Visszatérünk a klasszikus euklideszi geometriához, tehát az axiomatikusan értelmezett térhez és annak vektoraihoz. A továbbiakban V ismét háromdimenziós euklideszi vektorteret jelöl. A következő vektorműveletek definíciójához szükség van a tér irányítására is, ezért mostantól föltesszük, hogy V irányított vektortér.

0.2.12. Definíció (Vektoriális szorzat). Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális szorzatát, az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort az alábbi követelményekkel értelmezzük:

- Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos, akkor
  (1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge,
  (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra is és $\mathbf{b}$-re is,
  (3) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben pozitív bázist alkot.

Ezek a tulajdonságok az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzatot nyilván egyértelműen meghatározzák.

0.2.13. Tétel. *Alkossanak az* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *vektorok pozitív irányítású ortonormált bázist* V*-ben, és legyen* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$. *Ekkor*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3\,.$$

Megjegyzés. A formulát az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

alakban érdemes megjegyezni, ahol a determináns formális kifejtése után a képlet a tételbeli alakot ölti.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$ vektort a tételbeli formulával, be kell látnunk, hogy $\mathbf{c}$ rendelkezik a 0.2.12-ben $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re megkövetelt tulajdonságokkal.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos, akkor a $\mathbf{c}$-t definiáló determináns két sora arányos, és ezért $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Tegyük föl, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos. Ekkor a

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\varphi) = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi)^2 \end{aligned}$$

számolás mutatja, hogy $\mathbf{c}$ teljesíti az (1) követelményt. A (2) követelmény ellenőrzéséhez azt kell megmutatni, hogy $\mathbf{c}$ skaláris szorzata zérus $\mathbf{a}$-val is és $\mathbf{b}$-vel is. A skaláris szorzat könnyen számolható a determinánsos képletből: csupán $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ koordinátáit kell rendre $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ helyére beírni. Viszont ilyenkor a mátrix két sora egyenlő lesz, és így a determináns mindkét esetben 0. Végül a (3) követelmény ellenőrzéséhez számoljuk ki az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ rendezett bázisból az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ rendezett bázist származtató mátrix determinánsát:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{cc} > 0$$

Az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ rendezett bázis tehát pozitív irányítású, azaz (3) is teljesül. □

A 0.2.13. Tételből a determináns tulajdonságainak fölhasználásával azonnal következnek a vektoriális szorzat alábbi műveleti tulajdonságai:

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$,
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
- $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
- $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

0.2.14. Állítás. *Ha $\mathbf{e} \in V$ egységvektor, akkor egy tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektornak az $\mathbf{e}$-re merőleges komponense az $(\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{e}$ vektor.*

Bizonyítás: Ha $\mathbf{v}$ párhuzamos $\mathbf{e}$-vel, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen a merőleges komponens is és az $\mathbf{e} \times \mathbf{v}$ vektor is $\mathbf{0}$. Tegyük fel tehát, hogy a két vektor nem párhuzamos, legyen a szögük φ. A szóban forgó $\mathbf{v}'$ merőleges komponenst $\mathbf{v}$-nek egy $\mathbf{e}$-re merőleges síkra történő merőleges vetítésével kapjuk, ezért $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|\sin\varphi$, ami az $\mathbf{e} \times \mathbf{v}$ vektor hosszával egyenlő. A $\mathbf{v}'$ vektor az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{v}$ által kifeszített síkban fekszik, míg $\mathbf{e} \times \mathbf{v}$ erre a síkra merőleges. Az $\mathbf{e}$-vel balról történő vektoriális szorzás tehát a tér bármely vektorán úgy hat, hogy azt merőlegesen levetíti az $\mathbf{e}$-re merőleges síkra, majd ebben a síkban elforgatja $\pi/2$ szöggel. (A forgatás irányát az $\mathbf{e}$-vel nem párhuzamos vektorok esetében a 0.2.12-beli (3) követelmény szabja meg.) Ugyanezt a módszert kell

követni az $\mathbf{e}$-vel jobbról történő vektoriális szorzás esetében is, csak akkor a forgatás iránya ellentétes. Tehát ha valamely $\mathbf{v}$ vektorra az $\mathbf{e}$-vel való balról, majd jobbról szorzást egymás után végrehajtjuk, vagyis az $(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e}$ vektort származtatjuk, akkor a $\mathbf{v}'$ merőleges komponenst kapjuk. □

0.2.15. Definíció (Vegyes szorzat). Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$ vektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ számot értjük.

A következő állítás magától értetődik a 0.2.13. Tétel bizonyítása során tisztázottakból.

0.2.16. Állítás. *Ha* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *koordinátái valamely* V*-beli ortonormált bázisra vonatkozóan* a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, *illetve* c_1, c_2, c_3, *akkor*

$$\mathbf{abc} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ebből a determináns tulajdonságaira hivatkozva a vegyes szorzat műveleti tulajdonságait kapjuk:

- $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}$,
- $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{c} = \mathbf{ab}_1\mathbf{c} + \mathbf{ab}_2\mathbf{c}$,
- $\mathbf{ab}(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2) = \mathbf{abc}_1 + \mathbf{abc}_2$,
- $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{abc})$,
- $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}$.

Az utolsó azonosságsorozat szerint a vegyes szorzat a három vektor páros permutációja esetén változatlan marad, páratlan permutáció esetén előjelet vált. Az $\mathbf{abc} = \mathbf{bca}$ speciális esetet vektoriális és skaláris szorzatokra visszaírva az ún. felcserélési tételt kapjuk:

- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

Megjegyzés. A vektoriális szorzatnak és a vegyes szorzatnak a terület-, illetve térfogatszámításban fontos szerepet játszó geometriai jelentése van. Két nem párhuzamos vektor esetén a vektoriális szorzat hosszát definiáló $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$ formulában ráismerhetünk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített parallelogramma területképletére. Ha pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ három nem egysíkú (azaz lineárisan független) vektor, és γ jelöli a $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ szögét, akkor $|\mathbf{abc}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos\gamma|$. Itt $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ által kifeszített parallelepipedon

(parallelogramma alapú hasáb) alapterülete, $|\mathbf{c}||\cos\gamma|$ pedig az ehhez tartozó magasság. Az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat abszolút értéke tehát ennek a parallelepipedonnak a térfogata. Mindkét formula érvényes az „elfajuló” esetekben is, amikor két párhuzamos vektor zérus területű elfajuló parallelogrammát, három egysíkú vektor pedig zérus térfogatú elfajuló parallelepipedont feszít ki.

0.2.17. Tétel (Kifejtési tétel). *Bármely* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$*-re érvényes az*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

vektorazonosság.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos, azaz egyikük a másiknak skalárszorosa, akkor behelyettesítéssel rögtön látható, hogy mindkét oldal $\mathbf{0}$. Tegyük fel tehát, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, ekkor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bázist alkotnak V-ben.

Rögzített $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ mellett mindkét oldal lineárisan függ a változó $\mathbf{c}$ vektortól, ezért a két oldal egyenlőségét elegendő azokban az esetekben bebizonyítani, amikor $\mathbf{c}$ egy bázis elemein fut végig. Erre a célra az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ alkotta bázist használjuk.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindegyik tag nyilván $\mathbf{0}$. A $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ esetek közül elég az elsővel foglalkozni, a másik hasonlóan kezelhető.

Legyen tehát $\mathbf{c} = \mathbf{a}$. Azt is feltehetjük (mindkét oldalnak ugyanazzal a skalárral való szorzásával), hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor. Ekkor a bal oldal, $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}$, éppen a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges komponense, a jobb oldal pedig $\mathbf{b} - (\mathbf{be})\mathbf{e}$, ami $\mathbf{b}$-nek és az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos komponensének a különbsége. Miután a két komponens összege $\mathbf{b}$, a két oldal valóban egyenlő. □

0.2.18. Következmény (Jacobi-azonosság). *Bármely három* V*-beli vektorra*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}\,.$$

Bizonyítás: Mindhárom tagban a kifejtési tételt alkalmazva az összes tag kiesik. □

0.3. Gömbháromszögek

A klasszikus euklideszi geometriáról szóló bevezető fejezet lezárásaképpen példát mutatunk vektorok alkalmazására a gömbháromszögek trigonometriájában. A gömbi geometria a gömbfelület ún. belső geometriája. Ezen azt

értjük, hogy a gömbi távolságokat nem a befoglaló térben, hanem a gömbfelületen elhelyezkedő vonalak mentén mérjük. Az egyenesek szerepét a gömbfelületen a gömb főkörei veszik át. Ezáltal a pontok és egyenesek illeszkedési struktúrája alapvetően különbözik az euklideszi geometriában megszokottól: két különböző gömbi egyenesnek nem csak egy közös pontja van, hiszen a gömbön két főkör két átellenes pontban metszi egymást. Ha viszont a gömbfelületen két különböző pont nem átellenes, akkor egyetlen főkör köti össze őket, mégpedig az, amelynek a síkját a két pont és a gömb középpontja feszíti ki. Ennyiben a gömbfelület emlékeztet a síkgeometriára. Ezen kívül sok minden másban is, például háromszögeket és azok trigonometriai összefüggéseit lehet a gömbfelületen tanulmányozni.

0.3.1. Definíció (Triéder). Induljon ki a tér valamely O pontjából három olyan félegyenes, amelyek nem fekszenek egy síkban. Ezek páronként egy-egy konvex szögtartományt feszítenek ki. A három szögtartomány egyesítése kettévágja a teret. A két térrész közül a kisebbiket (a határoló szögtartományokkal és a félegyenesekkel együtt) a három félegyenes által kifeszített triédernek (vagy háromoldalú térszögletnek) nevezzük. A triéder származtatható annak a három féltérnek a közös részeként is, amelyek határoló síkjait a félegyenesek közül választható párok feszítik ki, és amelyek tartalmazzák mindhárom félegyenest. A félegyenesek közös kezdőpontját a triéder csúcsának, a három félegyenest a triéder éleinek, a három szögtartományt a triéder lapjainak hívjuk. A lapok szögmértékét a triéder élszögeinek, az élek mentén a lapok által bezárt három szöget pedig a triéder lapszögeinek nevezzük. (Az elnevezéseket az magyarázza, hogy az élszögeket két-két él, a lapszögeket két-két lap fogja közre.)

0.3.2. Definíció (Gömbháromszög). Legyen G gömbfelület a térben, A, B, $C \in G$ három olyan pont, amelyek nem illeszkednek egy főkörre. (Vegyük észre, hogy ilyenkor A, B, C közül semelyik kettő sem lehet átellenes.) Ha O jelöli G középpontját, akkor az OA, OB, OC félegyenesek nem fekszenek egy síkban, ezért tekinthetjük az általuk kifeszített T triédert. Az ABC gömbháromszögön a $T \cap G$ halmazt értjük. A gömbháromszög csúcsai az A, B, C pontok, oldalai a csúcsokat páronként összekötő főkörívek, amelyeket T lapjai metszenek ki G-ből.

Az ABC gömbháromszög oldalait a T triéder megfelelő élszögeinek a szögmértékével mérjük. Ezáltal ezek az adatok függetlenek a G gömb sugarának választásától. Ha G egységnyi sugarú, akkor ezek a szögmértékek ténylegesen az oldalak mint főkörívek ívhosszával egyenlők. A gömbháromszög szögeinek a triéder megfelelő lapszögeit tekintjük. Ugyanezeket a szögeket kapnánk, ha érintő félegyeneseket illesztenénk a csúcsokban az oldalakhoz, és az ezek által bezárt szögeket tekintenénk. A jelöléseket úgy szokás megválasztani, hogy a, b, c jelölje rendre az A-val, B-vel, C-vel szemközti oldalt, valamint α, β, γ

jelölje rendre az A-nál, B-nél, C-nél levő szöget. Mind a hat mennyiség 0-nál nagyobb és π-nél kisebb szögérték.

A következő tételek bizonyításában fontos szerepet játszanak a gömb középpontjából a gömbháromszög csúcsai irányába mutató egységvektorok. Ezeket $\mathbf{a}$-val, $\mathbf{b}$-vel és $\mathbf{c}$-vel jelöljük. Tehát

$$\mathbf{a} = \frac{\overrightarrow{OA}}{d(O,A)}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\overrightarrow{OB}}{d(O,B)}, \qquad \mathbf{c} = \frac{\overrightarrow{OC}}{d(O,C)}\,.$$

Lássuk el a teret irányítással oly módon, hogy az $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ rendezett bázist pozitívnak tekintjük. Ezekkel a vektorokkal kifejezhetjük a gömbháromszög oldalait és szögeit. Az oldalakra a skaláris szorzat definíciója szerint $\cos a = \mathbf{bc}$, $\cos b = \mathbf{ca}$, $\cos c = \mathbf{ab}$ áll. A szögek meghatározása céljából vegyük először észre, hogy az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ vektorok rendre a T triéder lapjaira merőleges nemzérus vektorok, amelyek a triéderbe „befelé” mutatnak, azaz például $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ az OAB lap síkjának abba a félterébe mutat, amely a triédert tartalmazza. Ezért e szorzatvektorok által páronként bezárt három szög a gömbháromszög szögeinek a kiegészítő szöge, például a $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ vektor és az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektor szöge $(\pi-\alpha)$-val egyenlő.

0.3.3. Tétel (Gömbi szinusztétel). *Bármely gömbháromszögben az oldalak és szögek szokásos jelölése mellett fennáll a*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Számoljuk ki kétféleképpen az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ vektor hosszát: Egyrészt a definíció alapján

$$\big|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|\cdot\sin(\pi-\alpha) = \sin c\,\sin b\,\sin\alpha\,,$$

másrészt a kifejtési tétel felhasználásával

$$\big|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big| = \big|\big(\mathbf{a}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big)\mathbf{b} - \big(\mathbf{b}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big)\mathbf{a}\big| = \big|-(\mathbf{bca})\mathbf{a}\big| = \mathbf{bca}\,,$$

tehát

$$\mathbf{bca} = \sin b\,\sin c\,\sin\alpha\,.$$

A betűzés ciklikus cseréjével hasonló módon

$$\mathbf{cab} = \sin c\,\sin a\,\sin\beta \qquad \text{és} \qquad \mathbf{abc} = \sin a\,\sin b\,\sin\gamma$$

adódik. A bal oldalak egyenlők, ezért a jobb oldalon álló szorzatok is egyenlők:

$$\sin b\,\sin c\,\sin\alpha = \sin c\,\sin a\,\sin\beta = \sin a\,\sin b\,\sin\gamma\,,$$

ahonnan átrendezés és egyszerűsítés után a tétel következik. □

0.3.4. Tétel (Az oldalakra vonatkozó gömbi koszinusztétel). *Bármely gömbháromszögben az oldalak és szögek szokásos jelölése mellett fennáll a*

$$\cos a = \cos b \, \cos c + \sin b \, \sin c \, \cos \alpha$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Most az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ skaláris szorzatot számoljuk ki kétféleképpen. Először a definíció alapján

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin c \, \sin b \, \cos \alpha \,,$$

majd a felcserélési és a kifejtési tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \big((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\big)\mathbf{a} = \big((\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}\big)\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{ac})(\mathbf{ab}) - (\mathbf{bc}) = \cos b \, \cos c - \cos a \,.\end{aligned}$$

Ezekből közvetlen átrendezéssel adódik a tétel. □

0.3.5. Következmények

(1) *Bármely gömbháromszögben az a, b, c oldalakra érvényesek az $a+b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$ háromszög-egyenlőtlenségek.*

(2) *Bármely gömbháromszög kerülete 2π-nél kisebb.*

Bizonyítás: (1): Nyilván elegendő az $a+b > c$ egyenlőtlenséget bebizonyítani, a többi ebből átbetűzéssel következik. Miután $0 < \alpha < \pi$, a gömbi koszinusztételben szereplő $\cos \alpha$ tényező (-1)-nél nagyobb. A $\sin b$ és $\sin c$ tényezők pozitívak, ezért a jobb oldalt csökkentve a

$$\cos a > \cos b \, \cos c - \sin b \, \sin c = \cos(b + c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A koszinuszfüggvény szigorúan csökken a $[0, \pi]$ intervallumon, ezért ha $b + c \leq \pi$, akkor ebből $a < b + c$ következik. Ha pedig $b + c > \pi$, akkor $a < \pi$ miatt vagyunk készen.

(2): Az ABC gömbháromszög AB és AC oldalait hosszabbítsuk meg az őket tartalmazó főkörök mentén a B, illetve C ponton túl az A-val átellenes A' metszéspontig. Az így előálló $A'BC$ gömbháromszög oldalai rendre a, $\pi - b$ és $\pi - c$, ahol a, b, c az ABC gömbháromszög oldalai a szokásos jelölések szerint. A háromszög-egyenlőtlenséget az $A'BC$ gömbháromszögre alkalmazva a $(\pi - b) + (\pi - c) > a$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan átrendezéssel $a+b+c < 2\pi$ adódik. □

A gömbháromszögtan érdekes jelensége, hogy a 0.3.4. Tételnek egy „duális” párja is érvényes. Ennek előkészítése céljából értelmezzük a poláris gömbháromszög fogalmát, amely több olyan geometriai jelenséggel kapcsolatban van, amellyel később még találkozunk (l. 3.4, 7.4, 9.2).

0.3.6. Definíció (Poláris trieder, poláris gömbháromszög). Legyen adott a T triéderrel származtatott ABC gömbháromszög az O középpontú G gömbön. Legyen $A^* \in G$ az a pont, amellyel az OA^* félegyenes merőleges az OBC síkra és annak az A-t nem tartalmazó félterébe mutat. (Ezt az utóbbi feltételt az $\overrightarrow{OA^*} \cdot \overrightarrow{OA} < 0$ egyenlőtlenséggel is megfogalmazhatjuk.) Hasonlóan definiáljuk a B^* és a C^* pontot is: OB^* és OC^* merőleges OCA-ra, illetve OAB-re, $\overrightarrow{OB^*} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$ és $\overrightarrow{OC^*} \cdot \overrightarrow{OC} < 0$. Az OA^*, OB^*, OC^* félegyenesek nem fekszenek egy síkban, ellenkező esetben ugyanis O-n át létezne mindhármukra merőleges egyenes, amelynek így benne kellene feküdnie az OBC, OCA, OAB síkok mindegyikében, ilyen egyenes pedig nem létezik. A három félegyenes tehát egy T^* triédert feszít ki, amelyet T poláris triéderének nevezünk. A T^* trieder az $A^*B^*C^*$ gömbháromszöget metszi ki G-ből, amelyet az ABC poláris gömbháromszögének nevezünk.

Rögtön látszik, hogy az OA félegyenes merőleges az OB^*C^* síkra, és az $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA^*} < 0$ feltétel miatt annak az A^* pontot nem tartalmazó félterébe mutat. Hasonlókat OB-ről és OC-ről is megállapíthatunk, tehát az $A^*B^*C^*$ gömbháromszöghöz tartozó poláris gömbháromszög maga az eredeti ABC gömbháromszög.

0.3.7. Állítás. *Ha a szokásos jelölési megállapodásokkal a, b, c, α, β, γ az ABC gömbháromszög oldalai és szögei, a^*, b^*, c^*, α^*, β^*, γ^* pedig az $A^*B^*C^*$ oldalai és szögei, akkor*

$$a^* = \pi - \alpha\,, \qquad b^* = \pi - \beta\,, \qquad c^* = \pi - \gamma\,,$$
$$\alpha^* = \pi - a\,, \qquad \beta^* = \pi - b\,, \qquad \gamma^* = \pi - c\,.$$

Bizonyítás: Az adatok között fennálló logikai szimmetria miatt elegendő az $a^* = \pi - \alpha$ egyenlőségről meggyőződni. Itt a^* az a szög, amelyet a T trieder OCA és OAB lapjaira merőleges, kifelé mutató vektorok zárnak be, amely valóban egyenlő az e két lap közti lapszögnek, α-nak a kiegészítő szögével. □

Megjegyzés. Az O-ból A^*, B^*, C^* irányába mutató $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ egységvektorokat könnyen ellenőrizhető módon a

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{c} \times \mathbf{b}|}, \qquad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}, \qquad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{a}|}$$

képletek állítják elő. A poláris gömbháromszöget ezek segítségével is definiálhattuk volna.

0.3.8. Tétel (A szögekre vonatkozó gömbi koszinusztétel). *Bármely gömbháromszögre az oldalak és szögek szokásos jelölése mellett fennáll a*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos a$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Az oldalakra vonatkozó koszinusztételt a szokásos jelölések mellett alkalmazzuk a poláris gömbháromszögre, és használjuk a 0.3.7-beli összefüggéseket:

$$\begin{aligned}\cos\alpha = -\cos a^* &= -\cos b^*\cos c^* - \sin b^*\sin c^*\cos\alpha^* = \\ &= -\cos\beta\cos\gamma \quad + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,. \qquad \square\end{aligned}$$

0.3.9. Következmények

(1) *A gömbháromszög szögei egyértelműen meghatározzák az oldalait.*

(2) *Bármely gömbháromszögben a szögek összege π-nél nagyobb.*

Bizonyítás: (1): A szögekre vonatkozó koszinusztételből egy oldal explicit módon kifejezhető a szögek segítségével. A jelölések cseréjével a többi oldal is hasonlóan előállítható.

(2): Írjuk föl a 0.3.5.(2)-beli egyenlőtlenséget a poláris gömbháromszög oldalaira:

$$a^* + b^* + c^* < 2\pi\,,$$

majd alkalmazzuk a 0.3.7-beli összefüggéseket. Ezzel $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma) < 2\pi$, ahonnan az állítás átrendezéssel következik. $\square$

Megjegyzés. A 0.3.9. Következmény jellegzetes példákat mutat arra, hogy egyes vonásaiban a gömbi geometria mennyire eltér az euklideszi sík geometriájától. A hiperbolikus geometriáról szóló fejezetben látni fogjuk, hogy hasonló jellegű állításokkal lehet a hiperbolikus síkgeometriának az euklideszitől különböző voltát is szemléltetni.

A 0.3.9.(2)-beli egyenlőtlenséget pontosítani tudjuk. Egy gömbháromszög szögtöbbletének azt a számot tekintjük, amennyivel a szögei összege π-nél nagyobb. Ha a gömbháromszög területét az egységnyi sugarú gömbön elfoglalt felszínnel mérjük, akkor az alábbi tétel szerint a szögtöbblet éppen a területtel egyenlő.

0.3.10. Tétel (Girard-formula). *Az α, β, γ szögű gömbháromszög területe*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi\,.$$

Bizonyítás: A gömbfelületet két közös végpontú félfőkör egyesítése két gömbkétszögre osztja. A gömbkétszöget egybevágóság erejéig egyértelműen jellemzi a csúcsaiban mért szöge, és a gömbkétszög felszíne arányos ezzel a szöggel. A π szögű gömbkétszögek félgömbök, amelyek felszíne az egységgömbön 2π-vel egyenlő, ezért az arányossági tényező 2. Tehát az egységgömbön egy φ szögű gömbkétszög felszíne 2φ-vel egyenlő.

Legyen adott az O középpontú G egységgömbfelületen az ABC gömbháromszög, amelynek a t területét keressük. Tekintsük az oldalakat tartalmazó három főkört. Ezek közül bármelyik kettőt kiszemelve azok négy gömbkétszögre vágják G-t. A négy gömbkétszög közül az egyik tartalmazza a gömbháromszöget; válasszuk ki ezt és a vele egybevágó átellenesét. Ilyen módon összesen hat darab gömbkétszöget választottunk, közülük kettőnek-kettőnek a szöge α, β, illetve γ.

A hat kiválasztott gömbkétszög együtt lefedi a teljes gömbfelületet, mégpedig az ABC gömbháromszöget és annak az O-ra vonatkozó középpontos tükörképét háromszorosan, a gömbfelület többi részét egyszeresen. A hat gömbkétszög felszínének az összege tehát a gömb teljes felszínénél, 4π-nél $4t$-vel több, azaz

$$2 \cdot 2\alpha + 2 \cdot 2\beta + 2 \cdot 2\gamma = 4\pi + 4t\,,$$

amiből átrendezve a Girard-formulát kapjuk. □

Megjegyzés. A gömbháromszög oldalainak mérésében 0.3.2 szerint úgy állapodtunk meg, hogy trigonometriai formuláink egységnyi sugarú gömbfelületen mért ívhosszra vonatkozóan legyenek helyesek. Ugyanez mondható 0.3.10-ről, amely az egységnyi sugarú gömbön mért felszínről szól. Tételeinkből nem nehéz olyan formulákat származtatni, amelyek 1 helyett tetszőleges r sugarú gömbön érvényesek.

Legyen adott egy ABC gömbháromszög az O középpontú, r sugarú G gömbfelületen. Oldalhosszain most a főkörívek G-n mért ívhosszát értsük, és jelöljük őket rendre a-val, b-vel és c-vel; szögei legyenek rendre α, β és γ.

Az O középpontú, $1/r$ arányú középpontos hasonlóság G-t a vele koncentrikus egységnyi sugarú G' gömbbe viszi, az ABC háromszöget pedig olyan $A'B'C'$ gömbháromszögbe a G' gömbön, amelynek a szögei változatlanul α, β és γ, az oldalhosszai rendre a/r, b/r és c/r, felszíne pedig az eredeti felszín $(1/r^2)$-szerese.

Alkalmazhatjuk tételeinket az $A'B'C'$ gömbháromszögre, és az így kapott formulák most már általánosan (tetszőleges sugarú gömbön) érvényesek:

gömbi szinusztétel:	$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\frac{a}{r}} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\frac{b}{r}} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\frac{c}{r}}$
gömbi koszinusztételek:	$\cos\dfrac{a}{r} = \cos\dfrac{b}{r}\,\cos\dfrac{c}{r} + \sin\dfrac{b}{r}\,\sin\dfrac{c}{r}\,\cos\alpha$
	$\cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\dfrac{a}{r}$
a gömbháromszög felszíne:	$r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$

A formulák r-től való függéséért a különböző sugarú gömbfelületek különböző mértékű görbülete a felelős. Az $1/r^2$ szám az r sugarú gömbfelület ún. Gauss-féle görbülete. A trigonometriai formulákban ennek a négyzetgyöke jelenik meg a távolságadatok együtthatójaként. Érdekes analógiára fogunk ezzel kapcsolatban ráismerni majd a hiperbolikus geometria hasonló formuláiban, l. 11.3, 11.5.

Affin geometria

Az affin geometria lényegében a vektorterek geometriája. Azt vizsgálja, milyen geometriai fogalmak értelmezhetők és milyen geometriai összefüggések tárhatók fel kizárólag a vektortér-tulajdonságok felhasználásával. Tehát például mértékviszonyokról (távolságról, szögről, térfogatról) nincsen szó az affin geometriában. Vannak viszont olyan geometriai fogalmak, mint például a párhuzamosság vagy az osztóviszony, amelyek származtathatók pusztán a tér lineáris struktúrájából, ezért ezek az affin geometriához tartoznak. Ilyen fogalmakról lesz szó ebben a fejezetben. Tételeink egy részénél nincs is szükség bizonyításra, mert csupán átfogalmazásai vagy közvetlen következményei a lineáris algebrából ismert összefüggéseknek. Fogalmainkat tetszőleges test feletti, tetszőleges dimenziójú vektorterek felhasználásával vezetjük be. Ehhez természetesen motiváció gyanánt a valós, legfeljebb 3-dimenziós eset, azaz a klasszikus geometria eszközei szolgálnak.

1. Affin terek

1.1. Affin terek és affin leképezések

1.1.1. Definíció (Affin tér). Legyen $\mathbf{F}$ (kommutatív) test, V vektortér $\mathbf{F}$ fölött, és X egy tetszőleges halmaz. Affin struktúrának (pontosabban, $\mathbf{F}$ fölötti affin struktúrának) nevezzük a $\Phi : X \times X \to V$ leképezést, és ($\mathbf{F}$ fölötti) affin térnek az (X, V, Φ) hármast, ha teljesül:

(1) minden $A \in X$-re a $\Phi_A : X \to V$, $\Phi_A(B) = \Phi(A, B)$ leképezés bijektív, és

(2) minden $A, B, C \in X$-re $\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C)$.

Gyakran magát X-et nevezzük affin térnek, ha egyértelmű, hogy mely affin struktúrával van ellátva. X elemeit pontoknak nevezzük. Az alkalmazásokban

legtöbbször $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$, ilyenkor valós, illetve komplex affin térről beszélünk. A véges testek fölötti affin terek érdekes kombinatorikai struktúrákhoz vezetnek. A továbbiakban, hacsak másként nem hangsúlyozzuk, minden vektortér és affin tér ugyanazon $\mathbf{F}$ test fölött értendő.

Jelölések, megállapodások:

- $A, B \in X$ esetén a $\Phi(A, B) \in V$ vektorra inkább az $\overrightarrow{AB}$ jelölést használjuk. Ezzel (2) az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ alakban írható. Rögtön adódik $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ és $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ minden $A, B \in X$-re.

- $A \in X$-re X_A jelöli azt a vektorteret, amelynek az alaphalmaza X, és amelyre $\Phi_A : X_A \to V$ izomorfizmus. Azt mondjuk, hogy az X_A vektorteret az X affin tér „vektorizációjával” nyerjük az A pontban.

- X dimenziójának definíció szerint V dimenzióját tekintjük (és $\dim X$-szel jelöljük). Affin egyenesnek mondjuk az egydimenziós affin tereket, affin síknak a kétdimenziósakat.

1.1.2. Példák

- Ha X az axiomatikusan értelmezett klasszikus euklideszi tér, V az X-beli szabad vektorok alkotta vektortér $\mathbf{R}$ fölött, Φ pedig a rendezett pontpárokhoz mint irányított szakaszokhoz az ekvivalenciaosztályukat mint vektort rendeli, akkor (X, V, Φ) háromdimenziós valós affin tér. Bármely rögzített $A \in X$-re az X_A vektortér az A kezdőpontú helyvektorok tere.

- Vektortér természetes affin struktúrája: Ha V tetszőleges vektortér, akkor az $X = V$ halmazon a $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)$ leképezés affin struktúrát ad meg.

- Az $\mathbf{F}$ test, mint egydimenziós vektortér, az affin egyenes standard példája („számegyenes”). Bármely affin egyenes vektorizáció, majd a keletkező egydimenziós vektortérben bázis rögzítése által azonosítható $\mathbf{F}$-fel. Ez gyakorlatilag a 0 és az 1 testelemek kijelölésével egyenértékű.

- Alterek eltoltjai: Ha V tetszőleges altér egy W vektortérben, továbbá $\mathbf{v} \in W$ tetszőleges rögzített vektor, akkor az $X = V + \mathbf{v}$ halmazon ugyancsak affin struktúrát definiál a $\Phi : X \times X \to V$, $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V + \mathbf{v})$ leképezés.

- Direkt szorzat: Ha (X_1, V_1, Φ_1) és (X_2, V_2, Φ_2) affin terek, akkor $(X_1 \times \times X_2, V_1 \times V_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$ is az.

- Faktortér: Ha adott az (X, V, Φ) affin tér és a V vektortér egy W altere, akkor vezessük be az X halmazon azt a $\sim$ ekvivalenciarelációt, amelynél az X-beli A és B pontokra $A \sim B$ pontosan akkor teljesül, ha $\overrightarrow{AB} \in W$. Legyen $X' = X/\sim$ az ekvivalenciaosztályok halmaza és V' a V/W faktortér, ekkor a $\Phi' : X' \times X' \to V'$, $\Phi'([A],[B]) = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ leképezés affin struktúra az X' halmazon. Az (X', V', Φ') affin teret az X tér W szerinti faktorterének nevezzük.

1.1.3. Definíció (Affin leképezés). Legyenek (X, V, Φ) és (X', V', Φ') affin terek. Egy $f : X \to X'$ leképezést affin leképezésnek nevezünk, ha alkalmas $\varphi : V \to V'$ lineáris leképezéssel bármely $A, B \in X$-re $\varphi\big(\Phi(A,B)\big) = \Phi'\big(f(A), f(B)\big)$ $\big($azaz $\varphi\big(\overrightarrow{AB}\big) = \overrightarrow{f(A)\,f(B)}\,\big)$ teljesül.
Nyilván φ-t az f affin leképezés egyértelműen meghatározza. Ezt a φ lineáris leképezést az f „linearizáltjának" (vagy f deriváltjának) nevezhetjük. A továbbiakban gyakran alkalmazzuk f linearizáltjára az $L(f)$ jelölést.

Észrevehetjük, hogy ilyenkor bármely $A \in X$ pont kiválasztásával a

$$\begin{tikzcd} X_A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_A"] & X'_{f(A)} \arrow[d, "\Phi'_{f(A)}"] \\ V \arrow[r, "L(f)"] & V' \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $\Phi'_{f(A)} \circ f = L(f) \circ \Phi_A$. Ebből rögtön adódik az affin leképezések alábbi jellemzése.

1.1.4. Állítás. *Egy $f : X \to X'$ leképezés pontosan akkor affin, ha bármely (vagy akár csak egyetlen) $A \in X$-re $f : X_A \to X'_{f(A)}$ lineáris.* □

1.1.5. Állítás. *Bármely affin tér identikus leképezése és bármely konstans leképezése affin, affin leképezések kompozíciója affin, bijektív affin leképezés inverze affin.* □

1.1.6. Definíció (Affin izomorfizmus, affinitás). A bijektív affin leképezéseket affin izomorfizmusoknak nevezzük. Két affin tér izomorf, ha van közöttük affin izomorfizmus. Egy affin tér saját magára képező affin izomorfizmusait affin automorfizmusoknak, vagy röviden affinitásoknak nevezzük. Az X affin tér affinitásai a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, ezt a csoportot X affin csoportjának nevezzük és $\mathrm{Aff}\,(X)$-szel jelöljük.

Az affinitás fogalmának segítségével ismét körülírhatjuk, mi az affin geometria tárgya: azokkal a geometriai fogalmakkal és mennyiségekkel foglalkozik, amelyek affinitásokkal szemben invariánsak.

1.1.7. Állítás. *Tetszőleges (X, V, Φ) affin tér izomorf a természetes affin struktúrával ellátott V vektortérrel.*

Bizonyítás: Tetszőlegesen rögzített $P \in X$ ponttal $\Phi_P : X \to V$ affin izomorfizmus, melyre $L(\Phi_P) = id_V$, ugyanis minden $A, B \in X$-re $\Phi(A, B) = \Phi(A, P) + \Phi(P, B) = \Phi_P(B) - \Phi_P(A)$. □

Látjuk tehát, hogy az affin tér és a vektortér fogalma nem sokban különbözik; az eltérés lényegében csak annyi, hogy az affin tér esetében „elfelejtjük", hol van az origó. Az affin teret bármely pontjának origóként való kitüntetése vektortérré teszi. Ezt a tényt későbbi számolásainkban olyan formában többször is ki fogjuk használni, hogy bármely affin térről feltehetjük, hogy valamely vektortérből keletkezik a természetes affin struktúra bevezetésével. Ebből rögtön következik például, hogy két (ugyanazon test feletti) affin tér pontosan akkor izomorf, ha a dimenziójuk egyenlő.

Az az eljárás, amelynek során valamely X affin teret egy $P \in X$ origó kiválasztásával az X_P vektortérrel, majd azon keresztül V-vel azonosítunk, nem „természetes". Bár ez az eljárás végrehajtható minden X affin térre, a P pont önkényes megválasztásával jár, amire nincs „egységes", X-től független módszer. Ezzel szemben látni fogjuk majd a 7. szakaszban, hogy bármely X affin tér felfogható úgy, mint egy az X-hez természetes módon rendelt $\hat{X}$ vektortérben egy lineáris altér eltoltja. Az itt hangsúlyozott „természetesség" pontos matematikai jelentését az absztrakt algebra tisztázza a kategóriák és a funktorok fogalmának segítségével.

1.1.8. Állítás. *Lássuk el a V és W vektortereket természetes affin struktúrájukkal. Egy $f : V \to W$ leképezés pontosan akkor affin, ha $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ alakú, ahol $\varphi : V \to W$ lineáris és $\mathbf{b} \in W$.*

Bizonyítás: Ha f affin, akkor alkalmas $\varphi(= L(f)) : V \to W$ lineáris leképezéssel $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u})$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-re; ekkor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ és $\mathbf{b} = f(\mathbf{0})$ választással adódik, hogy $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ minden $\mathbf{x} \in V$-re.
Megfordítva, ha f a fenti alakú, akkor a $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{b}) - (\varphi(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u})$ egyenlőség mutatja, hogy f affin. □

1.1.9. Definíció (Affin koordinátarendszer). Ha X d-dimenziós affin tér az $\mathbf{F}$ test fölött, akkor X-beli affin koordinátarendszernek nevezünk egy tetszőleges $\mathbf{x} : X \to \mathbf{F}^d$ affin izomorfizmust. Egy affin koordinátarendszer megadása egyenértékű az origó kijelölésével X-ben és egy bázis rögzítésével V-ben. Ha rögzítjük az $\mathbf{x}$ affin koordinátarendszert, akkor egy $P \in X$ pont affin koordinátáin az $\mathbf{x}(P) \in \mathbf{F}^d$ vektor koordinátáit értjük.

Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ két affin koordinátarendszer X-ben, akkor az $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}\ \mathbf{F}^d \to \mathbf{F}^d$ leképezés affin izomorfizmus, azaz az 1.1.8. Állítás szerint $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, ahol

$A \in GL(d, \mathbf{F})$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{F}^n$. (Itt $GL(d, \mathbf{F})$ az $\mathbf{F}$ fölötti $d \times d$ méretű invertálható mátrixok csoportját jelöli.)

1.1.10. Példák, definíciók (Eltolás, homotécia, dilatáció)

- Ha X' az X affin térnek egy $W \leq V$ altér szerinti faktortere, akkor az $X \to X'$ faktorizáló leképezés affin leképezés. Megfordítva, ha $f : X \to X'$ tetszőleges szürjektív affin leképezés, akkor X' izomorf X faktorával a $\operatorname{Ker} L(f) \leq V$ altér szerint.

- $f \in \operatorname{Aff}(X)$ eltolás, ha $L(f)$ identikus. Az eltolások részcsoportot alkotnak $\operatorname{Aff}(X)$-ben. Az $L : \operatorname{Aff}(X) \to GL(V)$ hozzárendelés csoporthomomorfizmus (ahol $GL(V)$ a $V \to V$ invertálható lineáris leképezések csoportja); az X affin tér eltolásainak a csoportja ennek az L homomorfizmusnak a magja.

  A természetes affin struktúrával ellátott vektorterek esetében az eltolások valamely rögzített vektor hozzáadását jelentik. Ebből rögtön látható, hogy tetszőleges X affin tér eltolásainak a csoportja izomorf a V vektortérrel mint additív csoporttal.

- Adott $P \in X$ és $\lambda \in \mathbf{F}^*$ $(= \mathbf{F} - \{0\})$ esetén P középpontú, λ arányú X-beli homotéciának nevezzük azt a $H_{P,\lambda} : X \to X$ leképezést, amelynél minden $A \in X$ pontra $\overrightarrow{P\,H_{P,\lambda}(A)} = \lambda\overrightarrow{PA}$ $\big($azaz $H_{P,\lambda}(A) = \Phi_P^{-1}(\lambda\Phi_P(A))\big)$. Ekkor $H_{P,\lambda} \in \operatorname{Aff}(X)$ és $L(H_{P,\lambda}) = \lambda \cdot id_V$. Nyilván $H_{P,\lambda} \circ H_{P,\mu} = H_{P,\lambda\mu}$, azaz a rögzített középpontú homotéciák egy $\mathbf{F}^*$-gal (az $\mathbf{F}$ test multiplikatív csoportjával) izomorf részcsoportot alkotnak $\operatorname{Aff}(X)$-ben.

- Dilatációnak nevezzük azokat az f affinitásokat, amelyekre az $L(f)$ lineáris leképezés egy nemzérus skalárral való szorzás. Az X affin tér dilatációi részcsoportot alkotnak $\operatorname{Aff}(X)$-ben, hiszen definíció szerint a dilatációk az $L^{-1}(\mathbf{F}^* id_V)$ halmazt alkotják. Ez részcsoport, mert egy $GL(V)$-beli részcsoport inverz képe az L homomorfizmusnál.

  Mind az eltolások, mind a homotéciák egyben dilatációk is.

  Az identikus leképezés egyszerre eltolás is és homotécia is (tetszőleges középponttal), és csak az identitás ilyen.

1.1.11. Állítás. *Ha egy dilatáció különbözik az identitástól, akkor vagy eltolás, vagy homotécia.*

Bizonyítás: Legyen $f \in \operatorname{Aff}(X)$, melyre $L(f) = \lambda \cdot id_V$, $\lambda \neq 0{,}1$. Azt kell belátni, hogy létezik olyan $P \in X$, hogy $f = H_{P,\lambda}$.
Fixpontot keresünk f számára. Feltehető, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával, ekkor az 1.1.8. Állítás szerint $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ alakú, ahol

most $\varphi(\mathbf{x}) = L(f)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{b}$ egyenletnek $\lambda \neq 1$ miatt létezik megoldása, mégpedig a $\mathbf{p} = \mathbf{b}/(1-\lambda)$ vektor, amely az f (egyetlen) fixpontja. Ezzel $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p})$, azaz $f = H_{\mathbf{p},\lambda}$. □

1.1.12. Következmény. *A kompozíció művelete nem vezet ki a homotéciák és eltolások alkotta halmazból.* □

Megjegyzés. Az elemi geometriából ismert euklideszi síkot kétféleképpen is lehet az affin geometria keretei közé illeszteni: tekinthetjük valós affin síknak is és komplex affin egyenesnek is. A különbség jól látszik például abban, hogy a homotéciák mást jelentenek a kétféle felfogásban: a valós esetben középpontos nagyítást, a komplex esetben pedig forgatva nyújtást.

1.2. Affin alterek

1.2.1. Definíció (Affin altér). Legyen (X, V, Φ) affin tér és $Y \subseteq X$ tetszőleges részhalmaz. Azt mondjuk, hogy Y affin altér X-ben, ha létezik olyan $W \leq V$ lineáris altér, hogy az $(Y, W, \Phi|_{Y\times Y})$ hármas affin tér. Ilyenkor Y a W alteret nyilván egyértelműen meghatározza. W-re időnként az $\overrightarrow{Y}$ jelölést használjuk. (Így például $V = \overrightarrow{X}$.)

1.2.2. Állítás. *Az X affin tér tetszőleges $Y \subseteq X$ részhalmazára az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *Y affin altér;*

(ii) *$Y \neq \emptyset$ és minden $A \in Y$-ra $\Phi_A(Y) \leq V$ lineáris altér;*

(iii) *létezik olyan $A \in Y$, hogy $\Phi_A(Y) \leq V$ lineáris altér;*

(iv) *létezik olyan $W \leq V$ lineáris altér és olyan $A \in X$, hogy $Y = \Phi_A^{-1}(W)$.*

Bizonyítás: Az (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) implikációk a definíciókból rögtön adódnak. A (iv) $\Rightarrow$ (i) következtetéshez azt kell meggondolni, hogy bármely $B, C \in Y$-ra $\overrightarrow{BC} \in W$. Viszont $Y = \Phi_A^{-1}(W)$ miatt $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \in W$, és így $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \in W$. □

1.2.3. Példák

- Vektortér természetes affin struktúrájára nézve az affin alterek pontosan a lineáris alterek eltoltjai. (Ez 1.2.2.(iv)-ből rögtön látszik.)

- Tetszőleges $f : X \to X'$ affin leképezés képhalmaza affin altér az X' affin térben. (Ez azonnal adódik az 1.1.8. Állítás alkalmazásával.) Ha f injektív, akkor affin izomorfizmus X és az $f(X)$ affin altér között. Ilyenkor azt mondjuk, hogy f affin beágyazás X-ről X'-be.
- Tetszőleges affin térben a 0-dimenziós affin alterek pontosan az egypontú részhalmazok (amelyeket azonosnak tekintünk a tér pontjaival). Az 1-dimenziós affin alterek az affin tér egyenesei, a 2-dimenziósak az affin tér síkjai. Egy d-dimenziós affin térben, ahol d véges, a $(d-1)$-dimenziós affin altereket hipersíkoknak nevezzük. Tehát pl. egy egyenes pontjai hipersíkok az egyenesen, illetve egy sík hipersíkjai a benne fekvő egyenesek.
- Az X affin tér pontjai egy rendszerét kollineárisnak nevezzük, ha valamely X-beli egyenes tartalmazza őket. Bármely két pont kollineáris, sőt, ha $A, B \in X$ két különböző pont, akkor egyértelműen létezik olyan X-beli egyenes, amely A-t és B-t tartalmazza, mégpedig a $\Phi_A^{-1}(\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB})$ ponthalmaz. Erre az egyenesre bevezetjük az $\langle A, B \rangle$ jelölést.

Vektorterekben a koordinátákban felírt homogén lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazai éppen a lineáris alterek. Ennek mintájára affin terekben az affin alterek inhomogén lineáris egyenletrenszerek megoldáshalmazaiként nyerhetők. Ezt a tényt fogalmazza meg „koordinátamentes” formában az 1.2.5. Állítás, amelyet az affin formák definíciójával készítünk elő.

Idézzük föl elöljáróban a lineáris forma fogalmát. A V vektortéren értelmezett lineáris formán egy tetszőleges $V \to \mathbf{F}$ lineáris leképezést értünk. A lineáris formák a természetes módon adódó műveletekkel vektorteret alkotnak $\mathbf{F}$ fölött, amit V duális terének nevezünk és általában V^*-gal jelölünk.

1.2.4. Definíció (Affin forma, $\mathcal{Z}(s)$). Az $\mathbf{F}$ test feletti X affin téren értelmezett affin formának nevezünk egy tetszőleges $s : X \to \mathbf{F}$ affin leképezést. A természetes (azaz pontonként értelmezett) összeadásra és skalárral való szorzásra nézve az affin formák $\mathbf{F}$ fölött vektorteret alkotnak, amelyre az $X^\bullet$ jelölést vezetjük be.

Bármely affin forma linearizáltja egy $V \to \mathbf{F}$ lineáris leképezés, azaz a V^* duális vektortér eleme. Ezáltal kapjuk az $L : X^\bullet \to V^*$ lineáris leképezést, amely nyilván szürjektív, és amelynek a magja a konstans affin formákból áll. Így tehát véges dimenziós X esetében $\dim X^\bullet = \dim X + 1$. Valamely $P \in X$ pont rögzítésével az $s \mapsto (L(s), s(P))$ hozzárendelés izomorfizmus az $X^\bullet$ és a $V^* \oplus \mathbf{F}$ vektorterek között. Az affin formák terének ez a direkt felbontása ugyanolyan értelemben nem természetes, mint ahogyan X azonosítása a V vektortérrel nem az. Ha viszont eleve $X = V$ a természetes affin struktúrájával, akkor persze $X^\bullet = V^* \oplus \mathbf{F}$ az $s(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \longleftrightarrow (\varphi, \mathbf{b}) = (L(s), s(\mathbf{0}))$ megfeleltetéssel.

Tetszőleges X esetén létezik két kitüntetett affin forma X-en: a konstans 0 és a konstans 1 értékű függvény; ezeket $\mathbf{0}$-val, illetve $\mathbf{1}$-gyel jelöljük.

Ha $s \in X^\bullet$ tetszőleges affin forma az X affin téren, akkor $\mathcal{Z}(s)$ jelöli s zéróhalmazát, azaz az $\{A \in X : s(A) = 0\}$ halmazt. Például $\mathcal{Z}(\mathbf{0}) = X$ és $\mathcal{Z}(\mathbf{1}) = \emptyset$. Ha $S \subseteq X^\bullet$ tetszőleges nemüres részhalmaz, akkor $\mathcal{Z}(S)$ jelöli az S-beli affin formák zéróhalmazainak közös részét: $\mathcal{Z}(S) = \bigcap\{\mathcal{Z}(s) : s \in S\}$. Nyilván $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(U)$, ahol U az S által az $X^\bullet$ vektortérben generált lineáris altér.

Ha $\dim X = d$ véges és $\mathbf{x} : X \to \mathbf{F}^d$ affin koordinátarendszer X-ben, akkor az 1.1.8. Állítás alkalmazásával az $s \in X^\bullet$ affin formák általános koordinátás alakját az $s \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{F}^d \to \mathbf{F}$, $s(x_1, \ldots, x_d) = a_1x_1 + \ldots + a_dx_d + b$ inhomogén lineáris függvény adja. Az a_1, …, a_d, $b \in \mathbf{F}$ konstansok tetszőleges megválasztása affin formát definiál.

A következő állítás csupán a lineáris egyenletrendszerekről szóló szokásos lineáris algebrai megállapítások átfogalmazása az affin geometria nyelvére. „Hétköznapi” tartalma az, hogy egy d-dimenziós affin térben a k-dimenziós affin altereket $d - k$ darab független inhomogén lineáris egyenlet írja le.

1.2.5. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, $d = \dim X$. Egy $Y \subseteq X$ nemüres részhalmaz pontosan akkor k-dimenziós affin altér, ha létezik olyan $(d-k)$-dimenziós $U \leq X^\bullet$ lineáris altér, hogy $\mathbf{1} \notin U$ és $Y = \mathcal{Z}(U)$.*
Speciálisan ha $H \subset X$ hipersík, akkor van olyan $s \in X^\bullet$ affin forma, hogy $H = \mathcal{Z}(s)$, és megfordítva, bármely nemkonstans affin forma zéróhalmaza hipersík. Ha $s, t \in X^\bullet$-ra $\mathcal{Z}(s) = \mathcal{Z}(t)$, akkor $t = \lambda s$ alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}$, $\lambda \neq 0$-val. □

1.2.6. Definíció (Független hipersíkok). Azt mondjuk, hogy az X-beli $H_1 = \mathcal{Z}(s_1)$, $H_2 = \mathcal{Z}(s_2)$, …, $H_k = \mathcal{Z}(s_k)$ hipersíkok függetlenek, ha az $L(s_1)$, $L(s_2)$, …, $L(s_k)$ duális vektorok lineárisan függetlenek a V^* vektortérben.

A független hipersíkok alábbi tulajdonságai a definícióból, illetve 1.2.5-ből rögtön adódnak.

1.2.7. Állítás. *Legyen $\dim X = d$ véges. Ekkor:*

(1) *X-ben a független hipersíkok maximális száma d.*

(2) *X-ben k darab független hipersík közös része $(d-k)$-dimenziós affin altér.*

(3) *Ha $\mathcal{H}$ hipersíkok rendszere X-ben és $Y = \bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$, akkor bármely $\mathcal{H}$-beli független részrendszer $d - \dim Y$ darab hipersíkból áll, amelyek közös része szintén Y.* □

1.2.8. Definíció (Párhuzamosság). Legyenek Y és Z affin alterek az X affin térben.
Azt mondjuk, hogy Y és Z párhuzamos (jelben: $Y \parallel Z$), ha $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Z}$. A párhuzamosság nyilván ekvivalenciareláció X affin alterei halmazán. Párhuzamos affin alterek dimenziója egyenlő.
Azt mondjuk, hogy Y gyengén párhuzamos Z-vel (jelben: $Y \langle | Z$), ha $\overrightarrow{Y} \leq \overrightarrow{Z}$. A gyenge párhuzamosság részben rendezési reláció X affin alterei halmazán. $Y \langle | Z$ esetén nyilván $\dim Y \leq \dim Z$.

1.2.9. Állítás. *Bármely X affin tér Y és Z affin altereire érvényesek a következők.*

(1) *Ha $Y \parallel Z$, akkor $Y = Z$ vagy $Y \cap Z = \emptyset$.*

(2) *Ha $Y \langle | Z$, akkor $Y \subseteq Z$ vagy $Y \cap Z = \emptyset$.*

(3) *$Y \langle | Z$ akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $Y' \subseteq Z$ affin altér, hogy $Y' \parallel Y$.*

(4) *Bármely $A \in X$-hez egyértelműen létezik olyan Y' affin altér, hogy $A \in Y'$ és $Y' \parallel Y$.*

(5) *Ha $Y \parallel Z$ és Y, Z véges dimenziósak, akkor belefoglalhatók egy legfeljebb eggyel magasabb dimenziós affin altérbe.*

(6) *Ha Y, Z hipersíkok és $Y \cap Z = \emptyset$, akkor $Y \parallel Z$.*

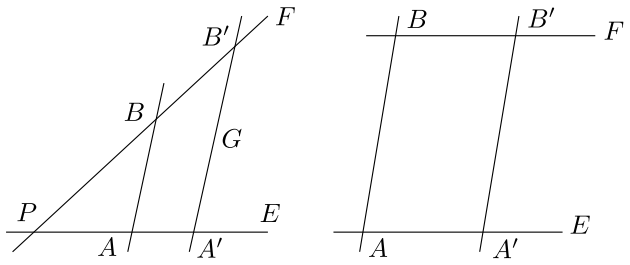
Bizonyítás: (1), (2), (3) és (4) közvetlenül következik a definícióból.
Az (5) állítás bizonyításához válasszunk egy $A \in Y$ és egy $B \in Z$ pontot, legyen $W = \Phi_A(Y) \leq V$. Ha U a W és az $\overrightarrow{AB}$ vektor generálta altér V-ben, akkor $S = \Phi_A^{-1}(U)$ affin altér X-ben, $Y \cup Z \subseteq S$, és $\dim S \leq \dim Y + 1$.
A (6) állítás bizonyításához feltesszük, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával, $Y = W + \mathbf{a}$, $Z = U + \mathbf{b}$, ahol W és U lineáris hipersíkok V-ben. Ha indirekt feltevéssel $Y \nparallel Z$, akkor $W \neq U$, és így szükségképpen $W + U = V$. Emiatt található $\mathbf{w} \in W$ és $\mathbf{u} \in U$ úgy, hogy $\mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{b}$, ahonnan $\mathbf{x} \in Y \cap Z$, ami ellentmond az $Y \cap Z = \emptyset$ feltételnek. □

Megjegyzés. Ha X affin sík, $E \subset X$ egyenes, $P \in X - E$, akkor (4)-ből és (5)-ből következően egyértelműen létezik olyan $E' \subset X$ egyenes, hogy $P \in E'$ és $E' \cap E = \emptyset$. A párhuzamossági axióma állítása tehát automatikusan érvényes az affin geometriában.

1.2.10. Állítás. *Bármely dilatáció minden affin alteret vele párhuzamos affin altérbe visz.*

Bizonyítás: Ha f dilatáció, akkor $L(f)$, skalárral való szorzás lévén, minden V-beli lineáris alteret önmagába visz. Így tetszőleges Y affin altérre $\overrightarrow{f(Y)} = L(f)(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{Y}$, és emiatt $f(Y) \parallel Y$. □

Az 1.2.10. Állítás módot ad dilatációknál a képpont „szerkesztéssel" történő meghatározására.



1.2.11. Következmény. *Legyen f tetszőleges dilatáció egy X affin térben, $A \in X$, $A' = f(A) \neq A$, és E jelölje az $\langle A, A' \rangle$ egyenest. Legyen $B \in X$ tetszőleges, E-re nem illeszkedő további pont. Az ehhez tartozó $B' = f(B)$ képpont az alábbi F és G egyenesek metszéspontjaként áll elő:*

- *F az a B-n átfektetett egyenes, amelyet f önmagába képez, azaz ha f homotécia P középponttal, akkor $F = \langle P, B \rangle$, ha pedig f eltolás, akkor F az E-vel párhuzamos egyenes B-n át;*
- *G pedig az az A'-n átmenő egyenes, amely párhuzamos az $\langle A, B \rangle$ egyenessel.* □

1.2.12. Definíció (Komplementaritás). Az Y és Z affin alterek komplementer alterek az X affin térben, ha $V = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Z}$ direkt összeg. Ilyenkor $Y \cap Z$ egyetlen pont. A komplementaritás szimmetrikus reláció X affin alterei halmazán.

Affin alterek párhuzamosságát, illetve komplementaritását használva affin leképezések néhány fontos típusát tudjuk bevezetni.

1.2.13. Definíció (Vetítés altérre). Legyen Y affin altér az X affin térben, és rögzítsük az $\overrightarrow{Y} \leq V$ altér egy U direkt kiegészítőjét a V vektortérben. Definiáljuk a $p : X \to Y$ leképezést a következő módon. Tetszőleges $A \in X$-hez egyértelműen található olyan $Z(A) \subseteq X$ affin altér, hogy $A \in Z(A)$ és $\overrightarrow{Z(A)} = U$. Ekkor $Z(A) \cap Y$ egypontú; legyen $p(A)$ ez a pont. Vektorizálva és lineáris algebrára hivatkozva rögtön látszik, hogy p affin leképezés. Nyilván $p \circ p = p$. A p leképezést az X affin tér Y affin altérre történő U irányú vetítésének nevezzük.

1.2.14. Definíció (Párhuzamos vetítés). Legyen Y és Z két egyenlő dimenziójú affin altér az X affin térben és rögzítsük az $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \leq V$ alterek egy U közös direkt kiegészítőjét a V vektortérben. Ekkor az 1.2.13-beli p leképezés Z-re történő leszűkítése affin izomorfizmus Z és Y között. Ezt a $p|_Z$ leképezést a Z altér Y-ra történő U irányú párhuzamos vetítésének nevezzük.

1.2.15. Definíció (Affin szimmetria). Legyen Y affin altér az X affin térben és legyen $p : X \to Y$ a tér U irányú vetítése Y-ra. Bármely $A \in X$-hez egyértelműen létezik olyan $\tau(A) \in X$ pont, melyre $\overrightarrow{p(A)\tau(A)} = \overrightarrow{Ap(A)}$. Ekkor $\tau \in \mathrm{Aff}\,(X)$ és $\tau \circ \tau = id_X$. Ezt a τ leképezést az Y affin altérre vonatkozó U irányú affin szimmetriának nevezzük. Meggondolható, hogy ha $\mathrm{char}\,\mathbf{F} \neq$ $= 2$, akkor Y pontosan a τ fixpontjaiból áll. A pontokra (azaz 0-dimenziós affin alterekre) vonatkozó affin szimmetriákat középpontos szimmetriáknak is nevezzük, ezek éppen a -1 arányú homotéciák.

1.3. Affin kombinációk, függetlenség, affin bázis

Vektortérben affin kombinációnak szokás nevezni az olyan lineáris kombinációkat, amelyekben az együtthatók összege 1. Ilyen fajta kombinációkat vektorok helyett egy affin tér pontjaiból is képezhetünk.

1.3.1. Definíció (Affin kombináció). Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pontok az X affin térben, legyenek továbbá adva a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{F}$ elemek, melyekre $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Azt mondjuk, hogy a B pont az A_i pontok λ_i együtthatós affin kombinációja, ha valamely $O \in X$-re $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

Vegyük észre, hogy ilyenkor bármely $O' \in X$-re $\overrightarrow{O'B} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ ugyancsak fennáll, hiszen $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} = (\sum_{i=1}^k \lambda_i)\overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} =$ $= \sum_{i=1}^k \lambda_i \big(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}\big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$. Speciálisan, $O' = B$ választással $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ teljesül. Nyilván ez az utóbbi egyenlőség is alkalmas a B pont definiálására.

Ha $X = V$ a természetes affin struktúrával és az A_i, B pontok V-beli $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}$ vektorokkal vannak azonosítva, akkor $O = \mathbf{0}$ választással látható, hogy az affin kombináció fogalma valóban az 1 összegű együtthatókkal vett lineáris kombinációt jelenti: ilyenkor $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i$.

1.3.2. Állítás. *Az affin leképezések felcserélhetők az affin kombinációk képzésével. Azaz: ha $f : X \to Y$ affin leképezés, és X-ben a B pont az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pontok affin kombinációja, akkor Y-ban az $f(B)$ pont az $f(A_1), f(A_2), \ldots,$ $f(A_k)$ pontok ugyanilyen együtthatós affin kombinációja.*

Bizonyítás: Az 1.1.4. Állítást és a fenti észrevételt felhasználva rögtön adódik. □

1.3.3. Állítás. *Az X affin tér egy nemüres Y részhalmaza pontosan akkor affin altér, ha zárt az affin kombinációk képzésére, azaz ha tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_k \in Y$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ esetén az A_i pontok λ_i együtthatós affin kombinációja is eleme Y-nak.*

Bizonyítás: Feltesszük, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával.
Ha Y affin altér, azaz $Y = W + \mathbf{a}$ valamilyen $W \leq V$-vel és $\mathbf{a} \in Y$-nal, továbbá $\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{x}_i \in W$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{a}) = (\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i) + (\sum_{i=1}^k \lambda_i)\mathbf{a} \in W + \mathbf{a} = Y$.
Megfordítva, tegyük fel, hogy Y zárt az affin kombinációk képzésére és válasszunk egy tetszőleges $\mathbf{a} \in Y$ elemet. Megmutatjuk, hogy az $Y - \mathbf{a}$ halmaz lineáris altér V-ben. Legyenek $\mathbf{x}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a} \in Y - \mathbf{a}$ tetszőleges elemek és $\lambda_i \in \mathbf{F}$ tetszőleges együtthatók ($i = 1, \ldots, k$). Belátjuk, hogy az $\mathbf{x}_i$ vektorok λ_i együtthatós lineáris kombinációja is $Y - \mathbf{a}$-ban van. Legyen $\lambda_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$, ezzel $\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_{k+1}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k (\lambda_i \mathbf{a} + \lambda_i \mathbf{x}_i) = \lambda_{k+1}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i$, ami az Y-beli $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}_i$ elemek egy affin kombinációja, tehát Y-beli. □

1.3.4. Következmény. *Ha affin alterek egy tetszőleges rendszerének a metszete nem az üres halmaz, akkor affin altér.* □

1.3.5. Következmény. *Bármely nemüres $S \subseteq X$ részhalmazhoz létezik legszűkebb, S-et tartalmazó affin altér.* □

1.3.6. Definíció (Affin burok). A nemüres $S \subseteq X$ részhalmazt tartalmazó legszűkebb affin alteret az S halmaz affin burkának nevezzük és $\langle S \rangle$-sel jelöljük. Ilyenkor úgy is fogalmazhatunk, hogy az S halmaz affin generátorrendszer az $\langle S \rangle$ affin altérben. Ha $S_1, \ldots, S_k$ az X részhalmazainak vagy pontjainak (nemüres egyesítésű) listája, akkor $\langle S_1, \ldots, S_k \rangle$ jelöli az egyesítésük affin burkát.

1.3.7. Állítás. *Tetszőleges nemüres $S \subseteq X$ részhalmazra az S affin burka pontosan az S-beli elemek affin kombinációiból áll.*

Bizonyítás: Jelöljük $C(S)$-sel az S-beli elemek affin kombinációiból álló ponthalmazt. Belátjuk, hogy $\langle S \rangle = C(S)$.
Az $\langle S \rangle \supseteq C(S)$ tartalmazás fennáll, hiszen $\langle S \rangle$ affin altér, és így zárt az affin kombinációk képzésére (1.3.3. Állítás).
Az $\langle S \rangle \subseteq C(S)$ tartalmazáshoz (ismét az 1.3.3. Állítás felhasználásával) elég azt belátni, hogy affin kombinációk affin kombinációja a kiindulási pontoknak is affin kombinációja. Valóban, tekintsük az $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ affin kombinációt a V vektortérben, és tegyük föl, hogy mindegyik $\mathbf{x}_i$ vektor maga is

egy $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij}\mathbf{y}_{ij}$ affin kombináció. Ekkor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij}\mathbf{y}_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i\mu_{ij}\mathbf{y}_{ij}$ az $\mathbf{y}_{ij}$ vektorok affin kombinációja, hiszen az együtthatók összege $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i\mu_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. □

1.3.8. Példák. Bármely $A \in X$ pontra $\langle A\rangle = \{A\}$. Ha $A, B \in X$, $A \neq B$, akkor az 1.2.3-ban bevezetett jelöléssel összhangban $\langle A, B\rangle$ az A-n és B-n átfektetett egyenes. Ha $X = V$ és $A = \mathbf{a}$, $B = \mathbf{b} \in V$, akkor $\langle A, B\rangle = \{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} : t \in \mathbf{F}\}$.

1.3.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$. *Az X affin tér egy nemüres Y részhalmaza pontosan akkor affin altér, ha bármely $A, B \in Y$-ra $\langle A, B\rangle \subseteq Y$.*

Bizonyítás: Affin alterekre a feltétel az 1.3.3. Állítás speciális eseteként teljesül. A fordított irányhoz feltehető, hogy $X = V$ és $\mathbf{0} \in Y$; azt kell bebizonyítani, hogy Y lineáris altér V-ben. Valóban, skalárral való szorzásra zárt, mert $\mathbf{x} \in Y$-ra $\mathbf{F}\mathbf{x} = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle \subseteq Y$, és összegre zárt, mert $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$-ra $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \subseteq Y$ és így $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{0}, \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\rangle \subseteq Y$. □

Megjegyzés. Az affin alterek fenti jellemzése nyilvánvalóan nem érvényes a kételemű test feletti (legalább kétdimenziós) affin terekben, hiszen az egyenesek kételeműek, és így az 1.3.9. Állításban szereplő feltétel semmit sem követel Y-ról. Meggondolható viszont, hogy az 1.3.9. Állítás olyan formában is igaz, hogy a $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$ kikötés helyett csak azt tesszük fel, hogy $\mathbf{F}$ legalább háromelemű.

1.3.10. Állítás. *Legyen Y véges dimenziós affin altér az X affin térben és $A \in X$. Ekkor* $\dim\langle Y, A\rangle \leq \dim Y + 1$, *és itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $A \notin Y$.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $X = V$ és $\mathbf{0} \in Y$, ezzel lineáris algebrából jól ismert tényre vezettük vissza az állítást. □

1.3.11. Következmény. *Affin térben bármely $k+1$ elemű S részhalmazra* $\dim\langle S\rangle \leq k$ *teljesül.*

Bizonyítás: Közvetlenül adódik az 1.3.10. állításból k szerinti teljes indukcióval. □

1.3.12. Állítás. *Az X affin tér tetszőleges $A_0, A_1, \ldots, A_k \in X$ pontjaira az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) $\dim\langle A_0, A_1, \ldots, A_k\rangle = k$;

(ii) $A_i \notin \langle A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k\rangle$ *minden* $i = 0,1,\ldots,k$*-ra;*

(iii) $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ *lineárisan független vektorok V-ben;*

(iv) *ha* $O \in X$, $\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$, *és* $\sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$, *akkor* $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Bizonyítás: (i), (ii) és (iii) ekvivalenciája az 1.3.10. Állítás bizonyításához hasonlóan jól ismert lineáris algebrai tulajdonságokból adódik.

(iii)⇒(iv): $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_i}) = -\lambda_0\overrightarrow{A_0O} + (-\lambda_0\overrightarrow{OA_0}) = = \mathbf{0}$, ahonnan az $\overrightarrow{A_0A_i}$ vektorok lineáris függetlensége miatt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = = 0$, és így $\lambda_0 = 0$.

(iv)⇒(iii): Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \mathbf{0}$. Legyen $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^k \lambda_i$ és $O = A_0$, ekkor $\sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0$, így (iv) felhasználásával $(\lambda_0 =)\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. □

1.3.13. Definíció (Függetlenség). Azt mondjuk, hogy $A_0, A_1, \ldots, A_k \in X$ független pontok az X affin térben, ha teljesítik az 1.3.12. állításban szereplő feltételek valamelyikét (és így mindegyiket).

Például egyetlen pont mindig független, két pont akkor és csak akkor független, ha különböző, három pont akkor és csak akkor független, ha nem kollineáris.

1.3.14. Definíció (Affin bázis). Az X véges dimenziós affin térben affin bázisnak nevezünk egy A_0, A_1, …, A_k pontrendszert, ha az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, …, $\overrightarrow{A_0A_k}$ vektorok bázist alkotnak a $V = \overrightarrow{X}$ vektortérben.

Ilyenkor $k = \dim V = d$, azaz egy affin bázis szükségképpen $d+1$ pontból áll. Az affin bázisok alábbi jellemzése közvetlenül adódik a definíciókból.

1.3.15. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, $d = \dim X$. Egy X-beli pontrendszer pontosan akkor affin bázis X-ben, ha független és $(d+1)$ elemű, illetve akkor, ha affin generátorrendszer és $(d+1)$ elemű.* □

1.3.16. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, ekkor bármely X-beli független pontrendszer kiegészíthető affin bázissá X-ben.*

Bizonyítás: 1.3.12.(iii)-ra hivatkozva az állítás rögtön következik a lineárisan független vektorrendszerek bázissá való kibővíthetőségéről szóló lineáris algebrai alaptételből. □

Megjegyzés. Végtelen dimenziós affin terekben léteznek olyan végtelen pontrendszerek, amelyek bármely (nemüres) véges részrendszere független. Az ilyen pontrendszereket is kézenfekvő függetlennek nevezni. Affin bázisnak ezek után a maximális független pontrendszereket, illetve ezzel egyenértékű módon a minimális affin generátorrendszereket tekinthetjük. A geometria szempontjából elsősorban a véges dimenziós affin terek fontosak, ezért szorítkoztunk a függetlenség és az affin bázis fentebbi definíciójában a véges esetre.

Transzfinit eszközöket felhasználva az 1.3.16. Állítás végtelen dimenziós analogonja is bebizonyítható volna.

1.3.17. Definíció (Affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszer). Ha az A_0, A_1, …, A_d pontok affin bázist alkotnak X-ben, akkor tetszőleges $P \in X$-re az $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ előállításban szereplő együtthatókat tekintsük egy $\mathbf{x}(P) \in \mathbf{F}^d$ vektor koordinátáinak. Ezzel egy $\mathbf{x} : X \to \mathbf{F}^d$ affin izomorfizmust definiáltunk, amelyet az A_0, A_1, …, A_d affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszernek nevezünk.

Nyilván bármely $\mathbf{x}$ affin koordinátarendszer ilyen módon keletkezik, mégpedig az $A_0 = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{0})$ és $A_i = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, \ldots, d)$ pontok alkotta affin bázisból. (Itt $\mathbf{e}_i$ jelöli az $\mathbf{F}^d$-beli i-edik standard bázisvektort, azaz $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.)

1.3.18. Tétel. *Rögzítsünk egy A_0, A_1, …, A_d affin bázist az X affin térben. Ekkor bármely $P \in X$ pont előállítható az A_0, A_1, …, A_d pontok affin kombinációjaként, továbbá az ehhez szükséges együtthatókat a P pont egyértelműen meghatározza.*

Bizonyítás: Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbf{F}$ az adott affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszerben a P pont koordinátái, azaz $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Ekkor a $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ jelölést használva az $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ egyenlőség mutatja, hogy P az A_0, A_1, …, A_d pontok $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ együtthatós affin kombinációja.
Ha P valamely $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d \in \mathbf{F}$ együtthatókkal is előáll, mint az A_0, A_1, …, A_d pontok affin kombinációja, akkor egy tetszőleges $O \in X$ kezdőpontot rögzítve $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=0}^{d} \mu_i \overrightarrow{OA_i}$ és $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = \sum_{i=1}^{d} \mu_i = 1$ fennáll. Ekkor $\sum_{i=0}^{d} (\lambda_i - \mu_i) \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$ és $\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - \mu_i) = 0$, így az affin függetlenség 1.3.12.(iv)-beli tulajdonságát felhasználva $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 0, \ldots, d)$. □

1.3.19. Állítás. *Legyen A_0, A_1, …, A_d affin bázis az X affin térben. Rögzített $i = 0, 1, \ldots, d$ mellett rendeljük hozzá mindegyik $P \in X$ ponthoz az 1.3.18. Tételbeli előállításban szereplő, A_i-hez tartozó λ_i együtthatót. Ekkor ez az $s_i : X \to \mathbf{F}$, $P \mapsto \lambda_i$ függvény affin forma X-en. Az így nyert $s_0, s_1, \ldots, s_d$ affin formák bázist alkotnak az $X^\bullet$ vektortérben.*

Bizonyítás: Vektorizáljuk X-et az A_0 pontban, azonosítsuk V-vel az X_{A_0} vektorteret, és legyen a V-beli $\overrightarrow{A_0A_i}$ $(i = 1, \ldots, d)$ bázishoz tartozó duális bázis $\varphi_i \in V^*$ $(i = 1, \ldots, d)$. Ekkor az 1.3.18. Tétel bizonyítása szerint $i = 1, \ldots, d$-re $s_i = \varphi_i$ és $s_0 = \mathbf{1} - (s_1 + \ldots + s_d)$. Emiatt $s_0, s_1, \ldots, s_d$ generátorrendszer az $X^\bullet = V^* \oplus \mathbf{F}$ vektortérben, és mivel a dimenzió $d + 1$, bázis is. □

1.3.20. Definíció (Duális affin formák). Az 1.3.19. Állításban szereplő s_0, s_1, …, $s_d \in X^\bullet$ affin formákat az A_0, A_1, …, A_d affin bázishoz tartozó duális affin formáknak nevezzük.

Könnyen látható, hogy a duális affin formákat az $s_i(A_j) = \delta_{ij}$ $(0 \le i, j \le d)$ egyenlőségek is egyértelműen meghatározzák; ez a következő állításnak egy speciális esete.

1.3.21. Állítás. *Ha A_0, A_1, …, A_d affin bázis az X affin térben, továbbá A'_0, A'_1, …, A'_d tetszőlegesen adott pontok az X' affin térben, akkor egyértelműen létezik olyan $f : X \to X'$ affin leképezés, melyre $f(A_i) = A'_i$ $(i = 0,1,\dots,d)$.*

Bizonyítás: Az A_0, illetve A'_0 pontokban történő vektorizációval az 1.1.4. Állításra hivatkozva a megfelelő lineáris algebrai tételből rögtön adódik. □

1.3.22. Következmény. *Ha A_0, A_1, …, A_d és B_0, B_1, …, B_d affin bázisok az X affin térben, akkor egyértelműen létezik olyan $f \in \mathrm{Aff}(X)$ affinitás, melyre $f(A_i) = B_i$ $(i = 0,1,\dots,d)$.* □

Megjegyzés. Az 1.3.22. Következményben foglalt tényt a csoportelmélet nyelvén úgy szokás megfogalmazni, hogy az $\mathrm{Aff}(X)$ csoport „egyszeresen tranzitívan hat” az X affin tér rendezett affin bázisainak halmazán. Csoportok hatásáról a későbbiekben még több alkalommal lesz szó.

1.4. Osztóviszony, súlypont, baricentrikus koordináták

1.4.1. Definíció (Osztóviszony). Legyen A és B két különböző rögzített pont az E affin egyenesen. Tetszőleges $P \in E$, $P \neq B$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $\lambda \in \mathbf{F}$, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$. Ezt a λ elemet (ABP)-vel jelöljük és a P pont A-ra és B-re vonatkozó osztóviszonyának nevezzük.

Például $(ABA) = 0$. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, és P az $[A, B]$ szakasz belső pontja, akkor (ABP) azt mondja meg, hogy a P pont milyen arányban osztja az $[A, B]$ szakaszt. Például a szakasz felezőpontjára az osztóviszony értéke $1 : 1 = 1$, az A-hoz közelebbi harmadolópontra $1 : 2 = 1/2$, a másik harmadolópontra $2 : 1 = 2$. Ha a P pont nem tartozik az $[A, B]$ szakaszhoz, akkor (ABP) negatív.

1.4.2. Állítás. *$(ABP) = \beta/\alpha$, ahol a P pont az A és a B affin kombinációja α, illetve β együtthatókkal.*

Bizonyítás: $\mathbf{0} = \alpha \cdot \overrightarrow{PA} + \beta \cdot \overrightarrow{PB}$, ahonnan $\overrightarrow{AP} = \beta/\alpha \cdot \overrightarrow{PB}$. □

1.4.3. Következmény. *Bármely affin leképezés osztóviszonytartó. Azaz, ha $f : X \to Y$ affin leképezés, $A \neq B \neq P$ kollineáris pontok X-ben és $f(A) \neq \neq f(B) \neq f(P)$, akkor $\big(f(A)f(B)f(P)\big) = (ABP)$.*

Bizonyítás: Rögtön adódik az 1.3.2. és az 1.4.2. Állítás összevetésével. □

1.4.4. Állítás

(1) $(ABP) \neq -1$;

(2) *Rögzített A és B mellett bármely $\lambda \in \mathbf{F}$, $\lambda \neq -1$ skalárhoz található olyan P, hogy $(ABP) = \lambda$;*

(3) $(ABP) = (ABQ)$ *esetén szükségképpen $P = Q$;*

(4) $(ABP)(BAP) = 1$;

(5) *Ha A, B és C egy affin egyenes három különböző pontja, akkor* $(ABC)(BCA)(CAB) = 1$;

(6) *Ha P, Q, R és S egy affin egyenes négy különböző pontja, akkor* $(PQS)(QRS)(RPS) = -1$.

Bizonyítás: Az 1.4.3. Következményre hivatkozva feltehető, hogy az affin egyenes az $\mathbf{F}$ testtel azonos, ekkor az $a, b, p \in \mathbf{F}$ elemek osztóviszonya $(abp) = = (p - a)/(b - p)$ alakban írható. Ezzel mind a hat állítás átfogalmazható egy-egy $\mathbf{F}$-beli elemekre vonatkozó formulává, és így közvetlen számolással ellenőrizhető. □

1.4.5. Definíció (Súlypont). Súlyozott pontrendszert kapunk az X affin térben, ha véges sok A_0, A_1, …, $A_k \in X$ ponthoz egy-egy $m_i \in \mathbf{F}$ $(i = = 0,1,\dots,k)$ súlyt rendelünk. (Formális definícióval élve X-beli súlyozott pontrendszeren X egy véges részhalmazán értelmezett $\mathbf{F}$-be képező függvényt érthetünk.) Azt mondjuk, hogy az $S \in X$ pont ennek a súlyozott pontrendszernek súlypontja, ha $\sum_{i=0}^{k} m_i \overrightarrow{SA_i} = \mathbf{0}$.

Érdemes megállapodni abban, hogy két súlyozott pontrendszer között nem teszünk különbséget, ha az egyik a másikból zérus súlyú pontok hozzáadásával vagy elvételével származik. Világos, hogy ez a megállapodás a súlypont definícióját nem befolyásolja.

1.4.6. Állítás. *Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja, mégpedig az az S pont, amelybe a tér egy tetszőleges O pontjából az $\overrightarrow{OS} = (\sum_{i=0}^{k} m_i \overrightarrow{OA_i})/\sum_{i=0}^{k} m_i$ vektor mutat.*

Bizonyítás: Valóban, az 1.3.1. Definíciót követő észrevétel szerint a súlypont azonos az A_0, A_1, …, A_k pontoknak az $m_i/\sum_{j=0}^{k} m_j$ $(i = 0,1,\dots,k)$ együtthatókkal vett affin kombinációjával. □

1.4.7. Példák. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ és a pontokat egyenlő súlyokkal látjuk el, akkor az így kapott súlyozott pontrendszer súlypontja a közönséges értelemben vett súlypont. Például két pont esetében a súlypont a szakasz felezőpontja, három nem kollineáris pont esetében a súlypont a háromszög (elemi geometriai értelemben vett) súlypontja.

1.4.8. Állítás (A súlyok csoportosíthatósági tétele). *Ha egy nem* 0 *összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba osztjuk úgy, hogy az egyes csoportokban a súlyok összege nem* 0*, majd mindegyik csoport súlypontját ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal, akkor az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja azonos az eredeti súlyozott pontrendszer súlypontjával.*

Bizonyítás: Álljon a pontrendszer az m_{ij} súlyokkal ellátott A_{ij} pontokból az $\{A_{i1}, \dots, A_{ik_i}\}$ $(i = 1,\dots,l)$ csoportokba osztva olyan módon, hogy $m_i = \sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \neq 0$ $(i = 1,\dots,l)$. Legyenek $S_1,\dots,S_l$ az egyes csoportokhoz tartozó súlypontok, azaz tegyük fel, hogy $\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij}\,\overrightarrow{S_iA_{ij}} = \mathbf{0}$ $(i = 1,\dots,l)$. Ekkor $\sum_{i=1}^{l} m_i$ egyenlő az összes súly összegével, tehát nem 0. Legyen S az m_1, …, m_l súlyokkal ellátott S_1, …, S_l pontrendszer súlypontja. Ekkor

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{l} m_i\overrightarrow{SS_i} = \sum_{i=1}^{l} m_i \frac{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij}\,\overrightarrow{SA_{ij}}}{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij}} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij}\,\overrightarrow{SA_{ij}}\,,$$

ami azt mutatja, hogy S az eredeti teljes pontrendszer súlypontja. □

1.4.9. Példák, elemi geometriai következmények. Itt feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Az alábbi példák az elemi geometriából jól ismert állítások, amelyeket felfoghatunk a csoportosíthatósági tétel közvetlen alkalmazásaiként.

- A háromszög súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra és 1 : 2 arányban osztja őket.
- A tetraéder súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra (azaz a csúcsokat a szemközti lap súlypontjával összekötő szakaszokra) és 1 : 3 arányban osztja őket, továbbá felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő három szakaszt.
- Bármely síkbeli négyszög esetében a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő két szakasznak és az átlók felezőpontját összekötő szakasznak közös a felezőpontja.

1.4.10. Definíció (Baricentrikus koordináták). Rögzítsünk egy A_0, A_1, …, A_d affin bázist az X affin térben. Ha egy $P \in X$ pontot az x_0, x_1, …, x_d súlyok segítségével lehet súlypontként előállítani az A_0, A_1, …, A_d pontrendszerből, akkor azt mondjuk, hogy ezek a súlyok a P pont baricentrikus koordinátái az adott affin bázisra nézve.

Az 1.3.18. és 1.4.6. Állítások következtében bármely $P \in X$-nek vannak baricentrikus koordinátái, és azokat a P pont arányosság erejéig egyértelműen határozza meg, továbbá bármely nem 0 összegű x_0, x_1, …, x_d testelem-$(d+1)$-es előáll mint valamilyen X-beli pont baricentrikus koordinátái.

Rögzített A_0, A_1, …, A_d affin bázis mellett azt a tényt, hogy az x_0, x_1, …, x_d elemek a $P \in X$ pont baricentrikus koordinátái, a $P = [x_0 : x_1 : \ldots : x_d]$ jelöléssel fejezzük ki. Nyilván $[x_0 : x_1 : \ldots : x_d] = [x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_d]$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbf{F}$, hogy $x'_i = \lambda x_i \quad (i = 0,1,\ldots,d)$. A baricentrikus koordináták használata tehát azonosítást teremt az X tér és az

$$\left\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{F}^{d+1} \quad \sum_{i=0}^{d} x_i \neq 0\right\} \Big/ \sim$$

faktorhalmaz között, ahol a $\sim$ ekvivalenciareláció az arányosságot jelenti, azaz $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}$-fel.

1.4.11. Példák. Legyen A_0, A_1, …, A_d affin bázis az X affin térben.

- $A_0 = [1 : 0 : \ldots : 0]$, $A_1 = [0 : 1 : \ldots : 0]$, …, $A_d = [0 : 0 : \ldots : 1]$. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, akkor ezeknek a pontoknak a közönséges értelemben vett súlypontja $[1 : 1 : \ldots : 1]$.

- $P = [x_0 : x_1 : \ldots : x_d]$ akkor és csak akkor tartozik az $\langle A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\rangle$ affin altérhez, ha minden $i \neq i_j \quad (j = 0,1,\ldots,k)$ esetén $x_i = 0$.

- $i = 0,1,\ldots,d$-re jelölje H_i azt az X-beli hipersíkot, amelyre $A_i \in H_i$ és amely párhuzamos az $\langle A_j : j \neq i\rangle$ hipersíkkal. Az s_i duális affin formákat alkalmazva $H_i = \mathcal{Z}(\mathbf{1} - s_i)$. Emiatt a $P = [x_0 : x_1 : \ldots : x_d]$ pont akkor és csak akkor tartozik H_i-hez, ha $\sum_{j \neq i} x_j = 0$.

Megjegyzés. A két utolsó példában bizonyos affin altereket a baricentrikus koordinátákban felírt homogén lineáris egyenletrendszerekkel tudtunk megadni. A 7. szakasz végén látni fogjuk, hogy ez minden affin altérre így van. A későbbiekben kiderül majd, hogy a baricentrikus koordináták a projektív geometriában használatos ún. „homogén koordináták” egy speciális változata. A homogén koordináták elnevezése onnan származik, hogy segítségükkel az alakzatokat homogén egyenletekkel lehet leírni.

1.5. Az affin geometria néhány jellegzetes tétele

1.5.1. Tétel (A párhuzamos szelők tétele). *Legyen H_1, H_2 és H_3 három párhuzamos hipersík az X affin térben, melyekre $H_1 \neq H_2 \neq H_3$. Tegyük fel, hogy E és F olyan egyenesek X-ben, amelyek egyike sem gyengén párhuzamos az adott hipersíkokkal, és legyenek A_1, A_2, A_3, illetve B_1, B_2, B_3 az E, illetve F metszéspontjai rendre H_1-gyel, H_2-vel és H_3-mal. Ekkor $(A_1A_2A_3) = (B_1B_2B_3)$.*

Bizonyítás: Az E-nek F-re történő $\overrightarrow{H_1}$ irányú párhuzamos vetítése (l. 1.2.14) A_1-et, A_2-t és A_3-at rendre B_1-be, B_2-be, illetve B_3-ba viszi, így az 1.4.3. Következményből adódik az állítás. □

1.5.2. Definíció (Sugársor). Egy affin síkon sugársornak nevezzük a sík egyeneseinek egy halmazát, ha vagy a sík valamely pontjára illeszkedő összes egyenesről van szó (metsző sugársor), vagy pedig a sík valamely egyenesével párhuzamos összes egyenesről van szó (párhuzamos sugársor).

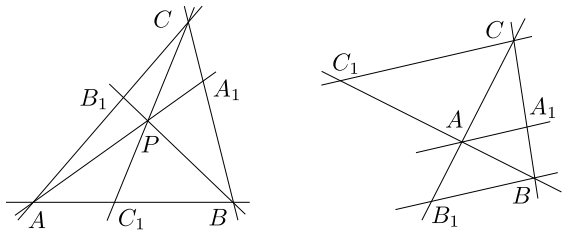
Bármely sugársor egyesítése az egész sík. A sík bármely két különböző egyenese egyértelműen foglalható sugársorba. A sík valahány egyenese pontosan akkor tartozik egy sugársorhoz, ha van közös pontjuk, vagy ha párhuzamosak.

1.5.3. Tétel (Ceva tétele). *Legyen A, B és C egy affin sík három nem kollineáris pontja, legyenek továbbá A_1, B_1 és C_1 rendre a $\langle B, C\rangle$, $\langle C, A\rangle$, illetve $\langle A, B\rangle$ egyenesekre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Ekkor annak, hogy az $\langle A, A_1\rangle$, a $\langle B, B_1\rangle$ és a $\langle C, C_1\rangle$ egyenes egy sugársorhoz tartozzon, szükséges és elégséges feltétele az*

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$$

egyenlőség.

Bizonyítás: A szükségesség bizonyításához tegyük először fel, hogy a három egyenesnek van közös P pontja. Legyenek α, β és γ a P pont baricentrikus koordinátái az A, B, C affin bázisra nézve, azaz $P = [\alpha : \beta : \gamma]$. Ekkor



$C = [0 : 0 : 1]$ miatt az 1.4.8. Állítás következtében szükségképpen $C_1 = [\alpha : \beta : 0]$, így az 1.4.2. Állítás miatt $(ABC_1) = \beta/\alpha$. Hasonlóan $A_1 = [0 : \beta : \gamma]$ és $(BCA_1) = \gamma/\beta$, valamint $B_1 = [\alpha : 0 : \gamma]$ és $(CAB_1) = \alpha/\gamma$. Így $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = (\beta/\alpha)(\gamma/\beta)(\alpha/\gamma) = 1$.

Ha pedig az $\langle A, A_1\rangle$, $\langle B, B_1\rangle$, $\langle C, C_1\rangle$ egyenesek párhuzamosak, akkor az 1.5.1. Tételt rájuk mint hipersíkokra alkalmazva $(ABC_1) = (A_1BC)$ és $(CAB_1) = (CA_1B)$ adódik, majd az 1.4.4.(5) Állítást az A_1, B és C pontokra felírva kapjuk, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = (A_1BC)(BCA_1)(CA_1B) = 1$.

Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. Ha a három egyenes nem párhuzamos, akkor van köztük két metsző; feltehetjük, hogy pl. $\langle A, A_1\rangle$ és $\langle B, B_1\rangle$ metszik egymást egy P pontban.

Állítjuk, hogy a $\langle C, P\rangle$ egyenes nem lehet párhuzamos az $\langle A, B\rangle$ egyenessel. Ha ugyanis így volna, akkor írjuk föl P-t baricentrikus koordinátákkal $P = [\alpha : \beta : \gamma]$ alakban, ekkor az 1.4.11-beli utolsó példa alapján $\alpha + \beta = 0$. A korábbiakhoz hasonlóan $(BCA_1) = \gamma/\beta$ és $(CAB_1) = \alpha/\gamma$, ahonnan $\alpha + \beta = 0$ miatt $(BCA_1)(CAB_1) = -1$. A feltételből ekkor viszont $(ABC_1) = -1$ következne, ami lehetetlen.

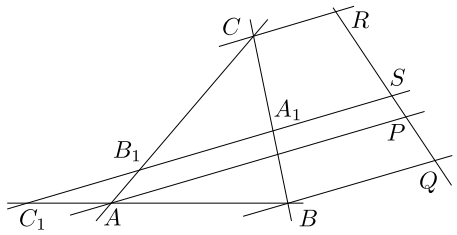
Vehetjük tehát a $\langle C, P\rangle$ egyenes és az $\langle A, B\rangle$ egyenes C_2 metszéspontját. Ekkor a tétel már bizonyított irányát felhasználva $(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = 1$ következik, amiből a feltételt és az 1.4.4.(3) Állítást használva $C_1 = C_2$ adódik. Így az $\langle A, A_1\rangle$, a $\langle B, B_1\rangle$ és a $\langle C, C_1\rangle$ egyenes is tartalmazza a P pontot. □

1.5.4. Tétel (Menelaosz tétele). *Legyen A, B és C egy affin sík három nem-kollineáris pontja, legyenek továbbá A_1, B_1 és C_1 rendre a $\langle B, C\rangle$, $\langle C, A\rangle$, illetve $\langle A, B\rangle$ egyenesekre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Ekkor az A_1, B_1 és C_1 pontok kollinearitásának szükséges és elégséges feltétele az*

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy van olyan E egyenes, hogy $A_1, B_1, C_1 \in E$. Legyen F, G és H rendre az A, B, illetve C ponton áthaladó, E-vel párhuzamos egyenes. Ekkor E, F, G és H négy különböző, párhuzamos egyenes; messük el őket egy velük nem párhuzamos egyenessel rendre az S, P, Q és R pontban. Az 1.5.1. Tételt a négy egyenesre mint hipersíkokra alkalmazva $(ABC_1) = (PQS)$, $(BCA_1) = (QRS)$ és $(CAB_1) = (RPS)$ adódik. Így az 1.4.4.(6) Állítást használva a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

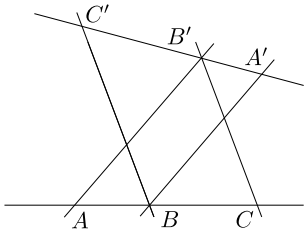


Megfordítva, ha $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$ teljesül, tekintsük az $\langle A_1, B_1\rangle$ egyenest. Állítjuk, hogy ez nem lehet párhuzamos az $\langle A, B\rangle$ egyenessel. Ha ugyanis párhuzamos volna, akkor az 1.5.1. tétel alkalmazásával $(ACB_1) = (BCA_1)$ adódna, amiből 1.4.4.(4) miatt $(BCA_1)(CAB_1) = 1$ következne. Ekkor viszont a feltételből az $(ABC_1) = -1$ értéket kapnánk, ami lehetetlen.

Vehetjük tehát a $\langle A_1, B_1\rangle$ egyenes és az $\langle A, B\rangle$ egyenes C_2 metszéspontját. Ekkor a tétel már bizonyított irányát felhasználva $(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = -1$ következik, amiből a feltételt és az 1.4.4.(3) Állítást használva $C_1 = C_2$ adódik. Így A_1, B_1 és C_1 kollineáris. □

1.5.5. Tétel (Papposz tétele, affin változat). *Legyen E és E' két különböző egyenes egy affin síkban, A, B, $C \in E$ és A', B', $C' \in E'$ egy-egy különböző pontokból álló ponthármas az egyeneseken. Ha E és E' metszők, akkor tegyük fel azt is, hogy a hat pont különbözik a metszésponttól. Ha most $\langle A, B'\rangle \parallel \langle A', B\rangle$ és $\langle B, C'\rangle \parallel \langle B', C\rangle$, akkor szükségképpen $\langle A, C'\rangle \parallel \langle A', C\rangle$ is teljesül.*

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy E és E' metszik egymást egy P pontban. Legyen f az a P középpontú homotécia, amelynél $f(A) = B$. Ekkor az 1.2.11. Következményt felhasználva $f(B') = A'$ is teljesül. Hasonlóan, legyen g az a P középpontú homotécia, amelynél $g(B) = C$, ekkor $g(C') = B'$ is teljesül. Mivel a középpont közös, $h = f \circ g = g \circ f$ is homotécia, továbbá $h(A) = C$ és $h(C') = A'$, így az 1.2.10. Állítás miatt $\langle A, C'\rangle \parallel \langle A', C\rangle$.

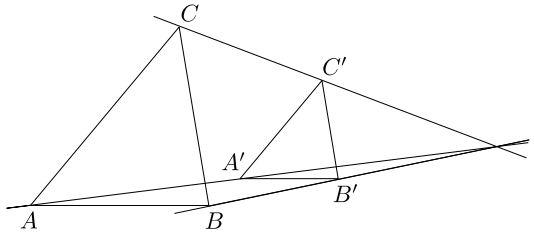


Ha E és E' párhuzamos, akkor f és g homotéciák helyett legyenek eltolások, melyekre $f(A) = B$, illetve $g(B) = C$, ezekkel az előző gondolatmenet lényegében változtatás nélkül elismételhető. □

Megjegyzés. A fenti bizonyítás lényegesen kihasználta azt, hogy közös középpontú homotéciák sorrendje felcserélhető, azaz (az 1.1.10-beli megállapítások alapján) azt, hogy az $\mathbf{F}$ test multiplikatív csoportja kommutatív.

1.5.6. Tétel (Desargues tétele, affin változat). *Legyen A, B, C, A', B' és C' hat különböző pont egy (tetszőleges dimenziójú) affin térben úgy, hogy az A, B, C, illetve A', B' és C' ponthármasok nem kollineárisak. Ha most $\langle A, B\rangle \parallel \langle A', B'\rangle$, $\langle B, C\rangle \parallel \langle B', C'\rangle$ és $\langle C, A\rangle \parallel \langle C', A'\rangle$ teljesül, akkor az $\langle A, A'\rangle$, a $\langle B, B'\rangle$ és a $\langle C, C'\rangle$ egyeneseknek vagy van közös pontja, vagy párhuzamosak.*

Bizonyítás: Az $\langle A, B\rangle$ és az $\langle A', B'\rangle$ párhuzamos egyenesek 1.2.9.(5) miatt belefoglalhatók egy affin síkba. Ebben a síkban 1.2.9.(6) miatt az $\langle A, A'\rangle$ és $\langle B, B'\rangle$ egyenesek vagy metszők, vagy párhuzamosak.



Ha metszők, legyen f az a homotécia, amelynek a középpontja a metszéspont, és amelyre $f(A) = A'$. Ekkor az 1.2.10. Következményt felhasználva $f(B) = B'$ is teljesül. Legyen $C'' = f(C)$. Ekkor az 1.2.9. Állítás miatt $\langle B, C\rangle \parallel \langle B', C''\rangle$ és $\langle A, C\rangle \parallel \langle A', C''\rangle$. Viszont 1.2.9.(4) miatt ekkor $\langle B', C''\rangle = \langle B', C'\rangle$, illetve $\langle A', C''\rangle = \langle A', C'\rangle$, ahonnan $C'' = C'$. Ezért a $\langle C, C'\rangle$ egyenes is áthalad $\langle A, A'\rangle$ és $\langle B, B'\rangle$ metszéspontján.

Ha $\langle A, A'\rangle \parallel \langle B, B'\rangle$, akkor f legyen az az eltolás, amelyre $f(A) = A'$, ezzel az előző gondolatmenet lényegében változtatás nélkül elismételhető és $\langle C, C'\rangle \parallel \langle A, A'\rangle$ adódik. □

Megjegyzés. Az 1.5.5. és az 1.5.6. Tétel két nevezetes projektív geometriai illeszkedési tételnek, Papposz tételének és Desargues tételének egy-egy speciális esete. Az általános (projektív) Papposz-tételt és Desargues-tételt ezekből könnyen tudjuk majd származtatni, l. 8.5.

1.6. Az affin geometria alaptétele

Amikor az affin geometria fő definícióit, az affin terek és az affin leképezések fogalmát kialakítottuk, erősen támaszkodtunk a lineáris algebra fogalmaira

és a vektorterek struktúrájára. Az, hogy egy affin térnek mely leképezések az affinitásai, mégis lényegében eldől egy ennél sokkal elemibb struktúra, a pontok és egyenesek illeszkedési struktúrája ismeretében. Nevezetesen, például a valós affin terek esetében egy kollineáris pontokat kollineárisakba vivő bijektív leképezés automatikusan affinitás lesz. Ezt a tényt szokás az affin geometria alaptételeként emlegetni.

1.6.1. Definíció (Kollineáció). Legyen $f : X \to X'$ bijektív leképezés az X és X' affin terek között. Azt mondjuk, hogy f kollineáció, ha bármely, egy egyenesre illeszkedő A, B, $C \in X$-re az $f(A)$, $f(B)$ és $f(C)$ pontok is egy egyenesre illeszkednek X'-ben.

1.6.2. Példák.

- Bármely affin izomorfizmus kollineáció.
- Ha $\dim X = \dim X' = 1$, akkor bármely $X \to X'$ bijektív leképezés kollineáció.
- Ha X és X' a kételemű test fölötti (tetszőleges dimenziójú) affin terek, akkor bármely $X \to X'$ bijektív leképezés kollineáció.
- Legyenek $X = X' = \mathbf{C}^2$ mint $\mathbf{C}$ fölötti affin terek és $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ a komplex konjugálás, azaz $f : (z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Ekkor f kollineáció (l. az 1.6.6. Állítást alább), de nem affin leképezés (hiszen a konjugálás nem lineáris leképezés $\mathbf{C}$ fölött).

1.6.3. Definíció (Testautomorfizmus). A $\sigma : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ bijektív leképezést az $\mathbf{F}$ test automorfizmusának nevezzük, ha $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, továbbá minden $x, y \in \mathbf{F}$-re $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ (azaz σ additív) és $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ (azaz σ multiplikatív).

Például a konjugálás a $\mathbf{C}$ test egy automorfizmusa. Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{Q}$-nak és $\mathbf{R}$-nek az identitás az egyetlen automorfizmusa. $\mathbf{C}$-nek rengeteg nemtriviális automorfizmusa van, közöttük az identitáson kívül egyedül a konjugálás folytonos.

1.6.4. Definíció (Szemilineáris leképezés). Legyen $\varphi : V \to V'$ tetszőleges leképezés az $\mathbf{F}$ test fölötti V és V' vektorterek között. Azt mondjuk, hogy φ szemilineáris, ha létezik $\mathbf{F}$-nek olyan σ automorfizmusa, hogy

$$\varphi(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \sigma(\lambda)\varphi(\mathbf{x}) + \sigma(\mu)\varphi(\mathbf{y})$$

teljesül minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ esetén.

Például az 1.6.2-beli negyedik példa $\mathbf{C}$ fölötti szemilineáris leképezés $\mathbf{C}^2$-ről önmagára.

A definícióból rögtön látszik, hogy szemilineáris leképezésnél altér képe altér, és az altér egy generátorrendszerének a képe generátorrendszer az altér képében. Így az altér képének dimenziója nem nagyobb az altér dimenziójánál. Könnyen látható az is, hogy szemilineáris leképezések kompozíciója szemilineáris.

1.6.5. Definíció (Szemiaffin leképezés). Az (X, V, Φ) és (X', V', Φ') affin terek közötti $f : X \to X'$ leképezést szemiaffin leképezésnek nevezzük, ha alkalmas $\varphi : V \to V'$ szemilineáris leképezéssel $\varphi(\Phi(A, B)) = \Phi'(f(A), f(B))$ teljesül minden $A, B \in X$-re. Az 1.1.4. Állítás mintájára meggondolható, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely (illetve bármely) $A \in X$ pontra $f : X_A \to X'_{f(A)}$ szemilineáris leképezés legyen a megfelelő vektorizációk között.

1.6.6. Állítás. *Szemiaffin leképezés kollineáris pontokat kollineáris pontokba képez.*

Bizonyítás: Használjuk az 1.6.5. Definíció jelöléseit. Legyen $E \subseteq X$ tetszőleges egyenes és válasszunk egy $A \in E$ pontot. Ekkor $f(E) = \Phi'^{-1}_{f(A)}(\varphi(\overrightarrow{E}))$. Itt $\overrightarrow{E}$ 1-dimenziós altér V-ben, emiatt $\varphi(\overrightarrow{E})$ legfeljebb 1-dimenziós altér V'-ben, és így $f(E)$ is legfeljebb 1-dimenziós affin altér X'-ben. □

1.6.7. Tétel (Alaptétel). *Tegyük föl, hogy* $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$ *és legyen* $d \geq 2$ *véges. Ekkor két* $\mathbf{F}$ *fölötti* d*-dimenziós affin tér között bármely kollineáció szemiaffin leképezés.*

Bizonyítás: Legyen $\dim X = \dim X' = d$ és legyen $f : X \to X'$ kollineáció.

1. lépés. Ha B *az* A_0, A_1, …, $A_k \in X$ *pontok egy affin kombinációja* X*-ben, akkor* $f(B)$ *az* $f(A_0)$, $f(A_1)$, …, $f(A_k)$ *pontok (esetleg más együtthatókkal vett) affin kombinációja* X'*-ben.*

Indukciót alkalmazunk k szerint. Az állítás $k = 0$-ra triviális, $k = 1$-re pedig a kollineáció definíciójából adódik. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és $k+1$-nél kevesebb pontra az állítást már bebizonyítottuk. Álljon elő B affin kombinációként a λ_0, λ_1, …, λ_k együtthatókkal. Feltehető, hogy mindegyik λ_i különbözik 0-tól, hiszen ha szerepel közöttük a 0 együttható, akkor az indukciós feltevést a többi pontra alkalmazva készen vagyunk.

Azt állítjuk, hogy ekkor a $0,1,\ldots,k$ indexhalmaz felbontható nemüres és diszjunkt I és J részhalmazainak egyesítésére úgy, hogy $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$ és $\sum_{j\in J} \lambda_j \neq 0$ teljesül. Ha ugyanis valamilyen i-re $\lambda_i \neq 1$, akkor $I = \{i\}$ választható, ha pedig minden $i = 0,1,\ldots,k$-ra $\lambda_i = 1$, akkor csak arra kell

ügyelni, hogy $\operatorname{char}\mathbf{F}$ ne legyen osztója sem I, sem J elemszámának, ez pedig $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$ miatt elérhető.

Az indukciós feltevést alkalmazzuk az A_i $(i \in I)$ pontokból a $\lambda_i / \sum_{l \in I} \lambda_l$ együtthatókkal képzett B_1, valamint az A_j $(j \in J)$ pontokból a $\lambda_j / \sum_{l \in J} \lambda_l$ együtthatókkal képzett B_2 affin kombinációra. Végül, mivel B a B_1 és a B_2 pont $\sum_{i \in I} \lambda_i$ és $\sum_{j \in J} \lambda_j$ együtthatókkal vett affin kombinációja, a $k = 1$ eset alkalmazásával célhoz érünk.

2. lépés. Ha A_0, A_1, …, A_k független pontok X-ben, akkor $f(A_0)$, $f(A_1)$, …, $f(A_k)$ is független pontok X'-ben.

Egészítsük ki a független pontrendszert egy A_0, A_1, …, A_d affin bázissá. Ha $f(A_0)$, $f(A_1)$, …, $f(A_k)$ nem lennének független pontok X'-ben, akkor $f(A_0)$, $f(A_1)$, …, $f(A_d)$ sem lehetnének azok, így $\dim X' = d$ miatt X'-nek egy valódi affin alterét generálnák. Viszont az 1. lépésben bizonyítottak miatt ez az affin altér tartalmazná f képhalmazát, ami lehetetlen, hiszen definíció szerint egy kollineáció szürjektív.

3. lépés. Affin altér f-nél származó képe ugyanakkora dimenziójú affin altér.

Ha $Y \subseteq X$ affin altér, $k = \dim Y$, válasszunk egy A_0, A_1, …, A_k affin bázist Y-ban. Legyen $Y' = \langle f(A_0), \ldots, f(A_k) \rangle$. A 2. lépés szerint Y' is k-dimenziós. Az 1. lépés szerint $f(Y) \subseteq Y'$. Ha B' tetszőleges pont Y'-ben, legyen $B = f^{-1}(B')$. Ekkor a 2. lépés szerint A_0, A_1, …, A_k és B együtt nem lehetnek független pontok, így $B \in Y$. Ezért $Y' = f(Y)$.

4. lépés. Párhuzamos X-beli affin alterek képe párhuzamos X'-ben.

Ha Y és Z párhuzamos affin alterek (és $Y \neq Z$), akkor 1.2.9.(5) miatt egy náluk eggyel magasabb dimenziójú S affin altérben fekszenek. A 3. lépést felhasználva az $f(Y)$ és $f(Z)$ affin alterek benne fekszenek a náluk eggyel magasabb dimenziójú $f(S) \subseteq X'$ affin altérben. Emellett f injektivitása miatt diszjunktak, így 1.2.9.(6) miatt párhuzamosak.

A továbbiakban rögzítsünk egy A_0, A_1, …, A_d affin bázist X-ben és az e pontok képeiből álló $f(A_0)$, $f(A_1)$, …, $f(A_d)$ affin bázist X'-ben. Legyen $\mathbf{x} : X \to \mathbf{F}^d$ és $\mathbf{x}' : X' \to \mathbf{F}^d$ az 1.3.17. Definíció szerint hozzájuk csatolt affin koordinátarendszer X-ben, illetve X'-ben. Ezeket a koordinátarendszereket használva f-et a $\varphi = \mathbf{x}' \circ f \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{F}^d \to \mathbf{F}^d$ leképezéssel helyettesítjük. Azt kell igazolnunk, hogy φ szemilineáris. Ekkor ugyanis $f = (\mathbf{x}')^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : X_{A_0} \to X'_{f(A_0)}$ is szemilineáris, és így $f : X \to X'$ szemiaffin.

5. lépés. A φ leképezés additív, azaz $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ minden $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{F}^d$-re.

Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan független vektorok $\mathbf{F}^d$-ben, akkor az $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ pont annak a két egyenesnek a metszéspontjaként áll elő, amelyet az $\mathbf{x}$ ponton át a $\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle$, illetve az $\mathbf{y}$ ponton át a $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle$ egyenessel párhuzamosan fektetünk. A 3. és a 4. lépést felhasználva emiatt $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ a $\varphi(\mathbf{x})$-en és $\varphi(\mathbf{y})$-on átfektetett,

$\langle \mathbf{0}, \varphi(\mathbf{y})\rangle$-nal, illetve $\langle \mathbf{0}, \varphi(\mathbf{x})\rangle$-szel párhuzamos egyenesek metszéspontja, azaz $\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$.
Akár $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akár $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, a $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ egyenlőség $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ miatt nyilvánvaló.
Ha végül $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők és egyikük sem a zérusvektor, akkor $d \geq 2$ miatt választhatunk olyan $\mathbf{z} \in \mathbf{F}^d$ vektort, amely lineárisan független $\mathbf{x}$-től (és így $\mathbf{y}$-tól is). Ekkor a független vektorpárokra már bebizonyított additivitást felhasználva

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{z})) - \varphi(\mathbf{z}) \;=\; \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{z}) \;= \\
&= \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{z}) \;=\; \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{z}) \;= \\
&= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

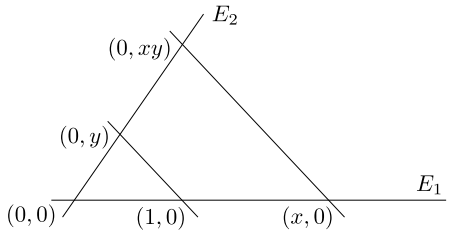
6. lépés. Bármelyik $i = 1, \ldots, d$ mellett $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^d$-re a $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}^d$ vektor i-edik koordinátája $\mathbf{x}$-nek csak az i-edik koordinátájától függ.

Valóban, az $\mathbf{x}$ vektor i-edik koordinátájával megegyező i-edik koordinátájú vektorok egy olyan H affin hipersíkot alkotnak $\mathbf{F}^d$-ben, amely párhuzamos az i-ediktől különböző koordinátairányok kifeszítette lineáris hipersíkkal. A φ leképezés definíciója szerint $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ és $\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j \;\; (j = 1, \ldots, d)$, így ezt a lineáris hipersíkot az 1. és a 3. lépés szerint φ önmagába képezi. Ezért a 4. lépés alapján $\varphi(H) \parallel H$, és így a $\varphi(H)$-beli vektorok i-edik koordinátája egyenlő.

7. lépés. A 6. lépés alapján léteznek olyan $\sigma_i : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ leképezések, hogy a $\varphi(\mathbf{x})$ vektor $\varphi(\mathbf{x}) = (\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_d(x_d))$ alakban írható minden $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in$ $\in \mathbf{F}^d$-re. Itt mindegyik σ_i ugyanazzal a $\sigma : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ testautomorfizmussal egyenlő ($i = 1, \ldots, d$).

Jelölje $\mathbf{1} \in \mathbf{F}^d$ az $(1, \ldots, 1) = \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_d$ vektort. A φ leképezés additivitása és $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ miatt $\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_d) = \varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + \varphi(\mathbf{e}_d) = \mathbf{e}_1 +$ $+ \ldots + \mathbf{e}_d = \mathbf{1}$. Ez $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ miatt maga után vonja, hogy a $D = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle =$ $= \{\mathbf{x} \in \mathbf{F}^d : x_1 = \ldots = x_d\}$ átlóegyenest φ önmagába képezi. Így $x \in \mathbf{F}$-re $\varphi(x, \ldots, x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_d(x)) \in D$, ahonnan $\sigma_1(x) = \ldots = \sigma_d(x)$.

A $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ egyenlőségeket és φ additivitását felhasználva kapjuk, hogy $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, és σ additív. A multiplikativitást annak az euklideszi geometriából ismert szerkesztési eljárásnak az adaptálásával mutatjuk meg, amely az 1, x és y hosszúságú szakaszokból előállítja az xy hosszúságú szakaszt.



Be akarjuk látni, hogy $x, y \in \mathbf{F}$-re $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Feltehetjük, hogy $x \neq 0$ és $x \neq 1$. Szemeljük ki $\mathbf{F}^d$ valamelyik 2-dimenziós koordinátasíkját, például az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ által kifeszített lineáris alteret. Ezt az S síkot φ önmagába képezi, ahogyan önmagukba képezi az S-ben fekvő $E_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1$ és $E_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2$ egyeneseket is. Ugyanez érvényes bármely $\mathbf{0}$ középpontú homotéciára is. A $\mathbf{0}$ középpontú, x arányú homotécia az $(1,0) = \mathbf{e}_1$ pontot $(x,0)$-ba, a $(0, y)$ pontot pedig $(0, xy)$-ba viszi. Az 1.2.11. Következményt használva emiatt a $(0, xy)$ pont előáll mint az $(x,0)$ ponton átfektetett, $\langle(1,0), (0, y)\rangle$ egyenessel párhuzamos egyenesnek a metszéspontja E_2-vel. Ezért a 3. és a 4. lépésben bizonyítottakra hivatkozva a $\varphi(0, xy) = (0, \sigma(xy))$ pont előáll mint a $\varphi(x,0) = (\sigma(x),0)$ ponton átfektetett, $\langle\varphi(1,0), \varphi(0, y)\rangle = \langle(1,0), (0, \sigma(y))\rangle$ egyenessel párhuzamos egyenesnek a metszéspontja E_2-vel. Ez a metszéspont pedig ismét az 1.2.11. Következményre hivatkozva éppen a $(0, \sigma(y))$ pontnak a képe a $\mathbf{0}$ középpontú, $\sigma(x)$ arányú homotéciánál. Így $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

8. lépés. A φ leképezés szemilineáris.

Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}^d$ és $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \varphi(\lambda\mathbf{x}) + \varphi(\mu\mathbf{y}) = \varphi(\ldots, \lambda x_i, \ldots) + \varphi(\ldots, \mu y_i, \ldots) = \\
&= (\ldots, \sigma(\lambda x_i), \ldots) + (\ldots, \sigma(\mu y_i), \ldots) = \\
&= (\ldots, \sigma(\lambda)\sigma(x_i), \ldots) + (\ldots, \sigma(\mu)\sigma(y_i), \ldots) = \\
&= \sigma(\lambda)(\ldots, \sigma(x_i), \ldots) + \sigma(\mu)(\ldots, \sigma(y_i), \ldots) = \\
&= \sigma(\lambda)\varphi(\mathbf{x}) + \sigma(\mu)\varphi(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

□

A valós test feletti, „klasszikus” affin geometria esetében az alaptétel az alábbi, jóval egyszerűbben megfogalmazható alakot ölti. A tételnek ezt a változatát is szokás az affin geometria alaptételének tekinteni.

1.6.8. Következmény. *Az 1-nél nagyobb véges dimenziójú valós affin terek között bármely kollineáció affin izomorfizmus.*

Bizonyítás: Valóban, mivel az $\mathbf{R}$ testnek az identikus leképezés az egyetlen automorfizmusa, bármely valós szemiaffin leképezés affin. □

1.7. Lineáris kiterjesztés

Megmutatjuk, hogy bármely véges dimenziós affin tér természetes módon felfogható egy eggyel magasabb dimenziós vektortér affin hipersíkjaként. Ennek a konstrukciónak a felhasználásával új megvilágításba kerülnek az első négy szakaszban tárgyalt affin geometriai fogalmak.

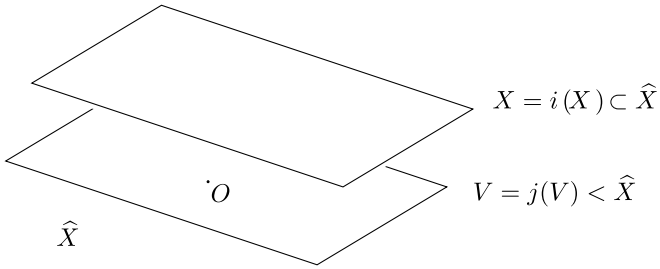
1.7.1. Definíció (Affin tér lineáris kiterjesztése). Legyen (X, V, Φ) tetszőleges affin tér az $\mathbf{F}$ test fölött. X lineáris kiterjesztésének nevezzük az $\widehat{X} = (X^\bullet)^*$ vektorteret. (Itt $X^\bullet$ az affin formák vektortere, a * pedig a duális vektortér képzését jelenti.)
Definiáljuk az X affin tér minden A pontjára az $i(A) : X^\bullet \to \mathbf{F}$ leképezést az $i(A)(s) = s(A)$ formulával. Közvetlen számolás mutatja, hogy $i(A)$ lineáris függvény, azaz $i(A) \in \widehat{X}$. Ezzel egy $i : X \to \widehat{X}$ leképezést definiáltunk, amely injektív, hiszen bármely két különböző X-beli ponthoz található olyan affin forma, amely különböző értéket vesz fel rajtuk.
Definiáljuk minden $\mathbf{v} \in V$ vektorra a $j(\mathbf{v}) : X^\bullet \to \mathbf{F}$ leképezést a $j(\mathbf{v})(s) = L(s)(\mathbf{v})$ $(s \in X^\bullet)$ formulával. (Itt $L(s) \in V^*$ az s affin forma linearizáltja, l. 1.2.4.) Ekkor $j(\mathbf{v}) \in \widehat{X}$ és a $j : V \to \widehat{X}$ leképezés is injektív, a fentihez hasonló okok miatt.

1.7.2. Állítás. *A $j : V \to \widehat{X}$ leképezés lineáris, az $i : X \to \widehat{X}$ leképezés pedig affin leképezés X-ről a természetes affin struktúrával ellátott $\widehat{X}$ vektortérbe. Emellett $j = L(i)$.*

Bizonyítás: A j leképezés linearitása a definícióból nyilvánvaló. Ezzel $A, B \in X$-re $j(\overrightarrow{AB})(s) = L(s)(\overrightarrow{AB}) = s(B) - s(A) = i(B)(s) - i(A)(s) = (i(B) - i(A))(s)$ $(s \in X^\bullet)$ mutatja, hogy i affin és $j = L(i)$. □

1.7.3. Állítás. *Tekintsük azt a $\mu : \widehat{X} \to \mathbf{F}$ függvényt, amelyre $\mu(p) = p(\mathbf{1})$ $(p \in \widehat{X})$. Ekkor μ lineáris függvény, és így $\mu - \mathbf{1}$ affin forma a természetes affin struktúrával ellátott $\widehat{X}$ vektortéren. Ha X dimenziója véges, akkor $j(V)$ a $\operatorname{Ker}\mu$ lineáris hipersíkkal, $i(X)$ pedig a $\operatorname{Ker}\mu$-vel párhuzamos $\mathcal{Z}(\mu - \mathbf{1})$ affin hipersíkkal egyezik meg.*

Bizonyítás: A μ függvény linearitása magától értetődik, emiatt $\mu - \mathbf{1}$ affin forma $\widehat{X}$-en. Bármely $\mathbf{v} \in V$-re $\mu(j(\mathbf{v})) = (j(\mathbf{v}))(\mathbf{1}) = L(\mathbf{1})(\mathbf{v}) = 0$, és bármely $A \in X$-re $\mu(i(A)) = i(A)(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(A) = 1$. Emiatt egyrészt a μ leképezés nem azonosan 0, másrészt $j(V) \subseteq \operatorname{Ker}\mu$, harmadrészt $i(X) \subseteq \mathcal{Z}(\mu - \mathbf{1})$. Ha $\dim X = \dim V = d$ véges, akkor a $(d+1)$-dimenziós $\widehat{X}$ vektortérben $\operatorname{Ker}\mu$ lineáris hipersík, $\mathcal{Z}(\mu - \mathbf{1})$ pedig affin hipersík, így mindkettő d-dimenziós. Emiatt $j(V) = \operatorname{Ker}\mu$ és $i(X) = \mathcal{Z}(\mu - \mathbf{1})$. A két hipersík diszjunkt, így 1.2.9.(6) miatt párhuzamos. □



Megállapodunk abban, hogy V-t a j injektív lineáris leképezés, X-et pedig az i affin beágyazás segítségével azonosítjuk $j(V)$, illetve $i(X)$ képhalmazaikkal, azaz úgy tekintjük, hogy $X \subset \widehat{X}$ affin hipersík, amely a $V < \widehat{X}$ lineáris hipersík eltoltja.

1.7.4. Példa. Legyen V véges dimenziós vektortér és $X = V$ a természetes affin struktúrával. Ekkor $X^\bullet = V^* \oplus \mathbf{F}$ és így $\widehat{X} = (V^* \oplus \mathbf{F})^* = V^{**} \oplus \mathbf{F} = V \oplus \mathbf{F}$. Itt V (mint $j(V)$) a $V \times \{\mathbf{0}\}$ lineáris altérrel, X pedig a $V \times \{\mathbf{1}\}$ affin altérrel van azonosítva.

1.7.5. Definíció (Affin leképezés lineáris kiterjesztése). Ha $f : X \to X'$ tetszőleges affin leképezés, definiáljuk f lineáris kiterjesztését, az $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{X'}$ lineáris leképezést az $\widehat{f}(p)(s') = p(s' \circ f)$ $(p \in \widehat{X},\ s' \in X'^\bullet)$ formulával.

1.7.6. Állítás. *Legyenek $f : X \to X'$ és $g : X' \to X''$ affin leképezések. Ekkor*

(1) $\widehat{f} \circ i = i' \circ f$ *(ahol $i : X \subset \widehat{X}$ és $i' : X' \subset \widehat{X'}$);*

(2) $\widehat{f} \circ j = j' \circ L(f)$ *(ahol $j : V \subset \widehat{X}$ és $j' : V' \subset \widehat{X'}$);*

(3) $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Bizonyítás: (1): Bármely $A \in X$-re és $s' \in X'^\bullet$-ra $\big((\widehat{f} \circ i)(A)\big)(s') = \big(\widehat{f}(i(A))\big)(s') = i(A)(s' \circ f) = (s' \circ f)(A) = s'(f(A)) = i'\big(f(A)\big)(s') = \big((i' \circ f)(A)\big)(s')$.

(2): Bármely $\mathbf{v} \in V$-re és $s' \in X'^\bullet$-ra $\big((\widehat{f} \circ j)\mathbf{v}\big)(s') = \big(\widehat{f}(j(\mathbf{v}))\big)(s') = \big(j(\mathbf{v})\big)(s' \circ f) = L(s' \circ f)\mathbf{v} = L(s')\big(L(f)\mathbf{v}\big) = j'\big(L(f)\mathbf{v}\big)(s') = \big((j' \circ L(f))\mathbf{v}\big)(s')$.

(3): Bármely $p \in \widehat{X}$-re és $s'' \in X''^\bullet$-ra $\big(\widehat{g \circ f}(p)\big)(s'') = p(s'' \circ (g \circ f)) = \widehat{f}(p)(s'' \circ g) = \widehat{g}\big(\widehat{f}(p)\big)(s'') = \big((\widehat{g} \circ \widehat{f})(p)\big)(s'')$. □

Megjegyzés. Ezek az 1.7.6-beli tulajdonságok mutatják, hogy az affin terek lineáris kiterjesztése „természetes” módon viselkedik az affin leképezésekkel

szemben, azaz a lineáris kiterjesztés konstrukciója „természetes” konstrukció. A lineáris kiterjesztés szerepet fog játszani későbbi projektív geometriai vizsgálatainkban, l. 8.4.

1.7.7. Példák. Tekintsük át korábban definiált affin geometriai fogalmainkat, és vizsgáljuk meg, hogyan interpretálhatók az affin tér lineáris kiterjesztésében. Legyen tehát X véges dimenziós affin tér és $\widehat{X}$ az X lineáris kiterjesztése; a fenti megállapodás szerint $V, X \subset \widehat{X}$.

- *Affinitás.* Az 1.7.6-beli tulajdonságok alapján az $f \mapsto \widehat{f}$ megfeleltetés injektív homomorfizmus X affinitásai csoportjából $\widehat{X}$ lineáris leképezései csoportjába. Ezért úgy tekinthetjük, hogy $\mathrm{Aff}\,(X) \leq GL(\widehat{X})$. Látható, hogy $GL(\widehat{X})$ egy eleme pontosan akkor tartozik az $\mathrm{Aff}\,(X)$ részcsoporthoz, ha az $X \subset \widehat{X}$ affin hipersíkot önmagába képezi.

- *Affin altér.* X affin alterei pontosan az $Y = W \cap X$ alakú halmazok, ahol $W \leq \widehat{X}$ lineáris altér, melyre $W \not\leq V$. Emellett $\overrightarrow{Y} = W \cap V$. Ha az 1.2.5. Állítás szerint $Y = \mathcal{Z}(U)$, ahol $U \leq X^\bullet$, akkor a $W \leq \widehat{X}$ és az $U \leq X^\bullet$ alterek egymás annullátorai, azaz $W = \{p \in \widehat{X} = (X^\bullet)^* :$ minden $s \in$ $\in U$-ra $p(s) = 0\}$ és $U = \{s \in X^\bullet :$ minden $p \in W$-re $p(s) = 0\}$.

- *Affin kombináció.* Az X-beli pontok affin kombinációi megegyeznek az $\widehat{X}$ vektortérbeli ugyanolyan együtthatókkal vett lineáris kombinációikkal. Ennek alapján a továbbiakban az A_1, A_2, …, $A_k \in X$ pontok λ_1, λ_2, …, λ_k együtthatókkal vett affin kombinációjára a $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 +$ $+ \ldots + \lambda_k A_k$ jelölést is használhatjuk.

- *Függetlenség.* X-beli pontok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha őket $\widehat{X}$-beli vektoroknak tekintve lineárisan függetlenek.

- *Affin bázis.* Pontok egy rendszere akkor és csak akkor affin bázis X-ben, ha a pontok mint $\widehat{X}$-beli vektorok bázist alkotnak $\widehat{X}$-ben. A duális affin formák az ehhez a bázishoz tartozó duális bázist alkotják $X^\bullet$-ban. (Itt $X^\bullet$ valóban az $\widehat{X}$ vektortér duális terének tekinthető az $X^\bullet$ és az $(X^\bullet)^{**} = \widehat{X}^*$ közötti természetes izomorfizmus szerinti azonosítással.)

- *Baricentrikus koordináták.* Rögzítsünk egy A_0, A_1, …, A_d affin bázist X-ben. Használjuk az $\widehat{X}$ vektortérben az ezekre mint bázisvektorokra vonatkozó x_0, x_1, …, x_d koordinátákat. Ekkor az X affin sík egyenlete $x_0 + x_1 + \ldots + x_d = 1$, így a V lineáris hipersíké $x_0 + x_1 + \ldots + x_d = 0$. Ha $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \widehat{X}$ és $\mathbf{x} \notin V$, akkor az $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ egydimenziós lineáris altér egyetlen P pontban döfi X-et, mégpedig a baricentrikus koordinátákkal $P = [x_0 : x_1 : \ldots : x_d]$ alakban írható pontban.

- *Homogén lineáris egyenletek.* Az affin alterekre és a baricentrikus koordinátákra vonatkozó fenti észrevételekből következik, hogy az X-beli affin altereket a baricentrikus koordinátákban felírt homogén lineáris egyenletrendszerek írják le.

1.8. Véges dimenziós valós affin terek

Olyan fogalmakat tekintünk át, amelyeket csak a valós test fölötti affin terekben értelmezünk, mert definíciójukban felhasználjuk a valós számok rendezését vagy topológiáját. Ezek közé a fogalmak közé tartozik az irányítás, a féltér (azaz a hipersíkkal való elválasztás), a korlátosság és a folytonosság. Ebben a szakaszban feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, és hogy az általunk vizsgált affin terek dimenziója véges. A dimenziót, mint korábban is, d jelöli.

1.8.1. Definíció (Affin tér irányítása). Az (X, V, Φ) affin tér irányításán a V valós vektortér irányítását értjük. Tehát X irányított affin térré válik, ha kitüntetjük a V-beli rendezett bázisok egyik irányítási ekvivalenciaosztályát és pozitív irányításúnak deklaráljuk.

A természetes affin struktúrával ellátott $\mathbf{R}^d$ affin teret az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ standard bázis osztályának kiválasztásával irányítottnak tekintjük.

Jól ismert, hogy az elemi geometriában a sík irányítását a háromszögek körüljárásával lehet szemléltetni. Ezt általánosítja tetszőleges dimenzió esetére a következő fogalom.

1.8.2. Definíció (Pozitív affin bázis). Legyen X irányított affin tér. Pozitív irányításúnak (vagy pozitívnak) mondunk egy X-beli A_0, A_1, …, A_d rendezett affin bázist, ha az $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_d}$ vektorok pozitív bázist alkotnak V-ben. Ellenkező esetben a rendezett affin bázist negatívnak nevezzük.

1.8.3. Állítás. *Legyen A_0, A_1, …, A_d pozitív affin bázis az X irányított affin térben. Az ugyanezen pontok egy $\sigma \in S_{d+1}$ permutációjával kapott $A_{\sigma(0)}$, $A_{\sigma(1)}$, …, $A_{\sigma(d)}$ affin bázis pontosan akkor pozitív, ha σ páros permutáció.*

Bizonyítás: Elég ellenőrizni, hogy bármely transzpozíció végrehajtása egy affin bázist ellentétes irányítású affin bázisba visz. Ha $\sigma(0) = 0$, akkor ez (és az állítás is) magától értetődő az 1.8.2. Definíció alapján. Tegyük fel tehát, hogy $\sigma = (0, i)$ valamilyen $1 \le i \le d$ mellett és hasonlítsuk össze a V-beli $\mathbf{a}_j = \overrightarrow{A_0A_j}$ $(j = 0, \ldots, d)$ bázist a $(0, i)$ transzpozíció végrehajtása után nyert $\overrightarrow{A_iA_j} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$ $(j = 1, \ldots, i-1)$, $\overrightarrow{A_iA_0} = -\mathbf{a}_i$, $\overrightarrow{A_iA_j} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$ $(j = i+1, \ldots, d)$ bázissal. Látható, hogy az utóbbi bázist az előbbiből az

i-edik bázisvektornak a többiből való kivonása, és az i-edik bázisvektor (-1)-gyel való szorzása útján kapjuk. Az utóbbi bázis tehát az előbbivel ellentétes irányítású. □

1.8.4. Definíció (Irányítástartás és -váltás). Legyen $f : X \to X'$ affin izomorfizmus az X és X' affin terek között. Azt mondjuk, hogy f irányítástartó, ha $L(f) : V \to V'$ irányítástartó lineáris izomorfizmus (azaz pozitív V-beli bázist pozitív V'-beli bázisba visz). Egyébként f-et irányításváltónak nevezzük. Az $f : X \to X'$ affin izomorfizmus nyilván aszerint irányítástartó, illetve irányításváltó, hogy valamely (vagy ami ezzel egyenértékű, bármely) X-beli pozitív affin bázisnak az f-nél származó képe pozitív, illetve negatív affin bázis X'-ben.

Az $f : X \to X$ affinitások között az irányítástartók pontosan azok, amelyekre $\det L(f) > 0$. Ebben az esetben (amikor $X = X'$) az, hogy f irányítástartó-e vagy sem, nem függ az X-beli irányítás választásától. Tehát az affinitások körében anélkül is beszélhetünk irányítástartásról, -váltásról, illetve affin bázisok egymással megegyező vagy ellentétes irányításáról, hogy a tér irányítását rögzítettük volna. Az X affin tér irányítástartó affinitásai 2 indexű részcsoportot alkotnak az $\mathrm{Aff}\,(X)$ csoportban, amelyet $\mathrm{Aff}^+(X)$-szel jelölünk.

1.8.5. Példák.

- Bármely eltolás és bármely pozitív arányú homotécia irányítástartó. A negatív arányú homotéciák csak páros dimenziós affin térben irányítástartók.
- Legyen $\tau \in \mathrm{Aff}\,(X)$ egy $Y \subseteq X$ affin altérre vonatkozó (valamilyen irányú) affin szimmetria. A τ affinitás pontosan akkor irányítástartó, ha $\dim X - \dim Y$ páros. Speciálisan a hipersíkokra vonatkozó affin szimmetriák irányításváltók, a középpontos szimmetriák pedig páros dimenziós affin térben irányítástartók, páratlan dimenziós térben irányításváltók.

1.8.6. Definíció (Féltér). Legyen $\dim X \geq 1$ és $H \subset X$ hipersík. Válasszunk olyan $s \in X^\bullet$ affin formát, hogy $H = \mathcal{Z}(s)$. A H hipersík határolta zárt féltérnek nevezzük az $\{A \in X : s(A) \leq 0\}$ és az $\{A \in X : s(A) \geq \geq 0\}$ halmazt, nyílt féltérnek pedig ezek X-beli komplementereit. Az 1.2.5. Állítás utolsó mondatára hivatkozva, a H által határolt félterek valóban csak a H hipersíktól függnek, nem pedig s választásától. Egydimenziós térben a féltereket félegyeneseknek, kétdimenziósban pedig félsíkoknak nevezzük.

A H hipersík által határolt két zárt féltér lefedi X-et és a közös részük H. A két nyílt féltér diszjunkt, és együtt lefedik H komplementerét. Ha $Y \subseteq X$

affin altér, melyre $Y \langle | H$ nem teljesül, akkor $H \cap Y$ hipersík Y-ban és az általa határolt Y-beli (zárt, illetve nyílt) félterek éppen a H által határolt X-beli (zárt, illetve nyílt) félterek metszetei Y-nal. Ez rögtön következik abból, hogy $H = \mathcal{Z}(s)$, $s \in X^\bullet$ esetén $s|_Y$ affin forma Y-on és $H \cap Y = \mathcal{Z}(s|_Y)$.

1.8.7. Állítás. *Rögzítsünk egy $A_0, \ldots, A_{d-1}$ affin bázist a $H \subset X$ hipersík számára. A tér tetszőleges $A_d, A'_d \notin H$ pontjai pontosan akkor esnek ugyanabba a H határolta nyílt féltérbe, ha az $A_0, A_1, \ldots, A_d$ és az $A_0, A_1, \ldots, A'_d$ affin bázisok megegyező irányításúak.*

Bizonyítás: Legyen $H = \mathcal{Z}(s)$ valamilyen $s \in X^\bullet$ affin formával, és válasszunk olyan $A \in X$ pontot, hogy $s(A) = 1$. Az $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{d-1}}, \overrightarrow{A_0A}$ bázisban az $\overrightarrow{A_0A_d}$ és az $\overrightarrow{A_0A'_d}$ vektorokat felírva az utolsó koordináta $s(A_d)$, illetve $s(A'_d)$. Ezért az $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{d-1}}, \overrightarrow{A_0A_d}$ bázist az $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{d-1}}, \overrightarrow{A_0A'_d}$ bázisba transzformáló mátrix determinánsa $s(A'_d)/s(A_d)$, ami pontosan akkor pozitív, ha A_d és A'_d ugyanabba a H határolta nyílt féltérbe esik. □

Megjegyzés. Az 1.8.7. Állításból rögtön következik, hogy irányított affin térben egy H hipersík irányítása valamelyik H határolta féltér kiszemelésével egyenértékű. Kézenfekvő egy féltér irányításán az egész tér irányítását érteni. Ezek után megállapodhatunk abban, hogy egy irányított féltér olyan módon származtatja a határoló hipersíkja irányítását, hogy azokat a hipersíkbeli rendezett affin bázisokat tekintjük pozitívnak, amelyeket a befoglaló tér pozitív bázisává egészítünk ki azzal, hogy valamely a (nyílt) féltérből választott pontot a többi után sorolunk.

1.8.8. Definíció (Korlátos halmaz). A véges dimenziós, valós X affin tér egy T részhalmazát korlátosnak mondjuk, ha bármely $s \in X^\bullet$ affin formával az $s(T) \subseteq \mathbf{R}$ számhalmaz korlátos.

Nyilván korlátos halmaz bármely részhalmaza is korlátos, továbbá véges sok X-beli korlátos halmaz egyesítése is korlátos. Bármely $f : X \to X'$ affin leképezésnél korlátos X-beli részhalmaz képe is korlátos X'-ben, hiszen $T \subseteq$ $\subseteq X$ és $s' \in (X')^\bullet$ mellett $s'\big(f(T)\big) = (s' \circ f)(T)$, és itt $s' \circ f \in X^\bullet$.

Az $X = \mathbf{R}^d$ esetben az itt definiált korlátosság nyilván egybeesik az $\mathbf{R}^d$ koordinátatérben használt szokásos korlátosságfogalommal. Emiatt – felhasználva, hogy tetszőleges X-re az X-beli affin koordinátarendszerek affin izomorfizmusok X és $\mathbf{R}^d$ között – megállapíthatjuk, hogy X egy T részhalmaza akkor és csak akkor korlátos X-ben, ha bármely (vagy akár csak egyetlen) $\mathbf{x} :$ $: X \to \mathbf{R}^d$ affin koordinátarendszer mellett az $\mathbf{x}(T)$ halmaz korlátos $\mathbf{R}^d$-ben.

A véges dimenziós valós affin terekben természetes (koordinátázástól független) út kínálkozik leképezések folytonosságának az értelmezésére. Ehhez olyan fogalmakat kell tisztázni, mint az affin térben fekvő részhalmazok nyílt, illet-

ve zárt volta, pontok környezetei, halmazok belseje, illetve lezárása. Ezeket a fogalmakat tekintjük a tér topológiai viszonyainak.

1.8.9. Definíció (Nyílt és zárt halmazok, természetes topológia). Az X affin tér egy részhalmazát nyíltnak mondjuk, ha előállítható olyan halmazok egyesítéseként, amelyek mindegyike véges sok nyílt féltér metszete. Az X-beli nyílt halmazok rendszerére érvényesek az alábbi tulajdonságok:

- $\emptyset$ és X nyílt halmazok,
- bármely véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt,
- tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése is nyílt.

A nyílt halmazok így definiált rendszerét az affin tér természetes topológiájának szokás nevezni. Zártnak mondjuk X egy részhalmazát, ha az X-re vonatkozó komplementere nyílt halmaz.

Például a nyílt félterek nyílt halmazok, a zárt félterek zártak az 1.8.9. Definíció értelmében is.

Könnyű meggondolni, hogy ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor az Y-beli nyílt halmazok pontosan az $Y \cap U$ alakú halmazok, ahol U nyílt halmaz X-ben.

1.8.10. Definíció (Pontok környezetei). Azt mondjuk, hogy egy $A \in X$ pontnak egy X-beli K részhalmaz környezete X-ben, ha létezik olyan $U \subseteq X$ nyílt halmaz, amelyre $A \in U \subseteq K$. (Meggondolható, hogy ezzel egyenértékű definíciót kapnánk, ha U-ról megkövetelnénk, hogy előállítható legyen véges sok X-beli nyílt féltér metszeteként.)

1.8.11. Definíció (Belső pont, határpont, lezárás). Legyen $S \subseteq X$. A tér egy A pontját az S halmaz belső pontjának mondjuk, ha S az A-nak környezete. Az S halmaz belsején az S belső pontjai által alkotott $\mathrm{int}S$ halmazt értjük. A $B \in X$ pontot S határpontjának mondjuk, ha B bármely K környezetére $K \cap S \neq \emptyset$ és $K - S \neq \emptyset$ teljesül. Az S halmaz határának nevezzük az S határpontjaiból álló ∂S halmazt. Az S halmaz lezárásának mondjuk az $\overline{S} = S \cup \partial S$ halmazt.

Az alábbi tulajdonságok könnyen meggondolhatók:

- $\mathrm{int}S$ a legbővebb S-ben fekvő nyílt halmaz,
- $\partial S = X - \big(\mathrm{int}S \cup \mathrm{int}(X - S)\big)$,
- $\overline{S}$ a legszűkebb S-et tartalmazó zárt halmaz,
- $\overline{S} = X - \big(\mathrm{int}(X - S)\big)$,

– egy halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha azonos a belsejével,

– egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha azonos a lezárásával.

1.8.12. Definíció (Konvergens pontsorozat, limesz). Az X-beli A_n ($n \in \mathbf{N}$) pontsorozatot konvergensnek nevezzük, és az $A \in X$ pontot a sorozat limeszének mondjuk (jelben: $A_n \to A$), ha A-nak bármely környezete a sorozat elemeit véges sok kivétellel tartalmazza.

Könnyen meggondolható, hogy bármely $S \subseteq X$ részhalmazra $\overline{S}$ pontosan az S-beli konvergens sorozatok limeszeiből áll, továbbá egy pont akkor és csak akkor tartozik ∂S-hez, ha előáll S-ben fekvő sorozat limeszeként is és $(X - S)$-ben fekvő sorozat limeszeként is.

1.8.13. Definíció (Folytonos leképezés). Legyenek X és X' véges dimenziós valós affin terek és $f : X \to X'$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy f folytonos az $A \in X$ pontban, ha az $f(A) \in X'$ pontnak bármely $K' \subseteq X'$ környezetéhez található az A pontnak olyan $K \subseteq X$ környezete, amelyre $f(K) \subseteq K'$.

Könnyen látható, hogy f akkor és csak akkor folytonos minden $A \in X$ pontban, ha bármely $U' \subseteq X'$ nyílt halmazra az $f^{-1}(U')$ halmaz nyílt X-ben. Ennek alapján az f leképezést folytonosnak mondjuk, ha bármely nyílt halmaz f-nél származó ősképe nyílt. (Ezzel egyenértékű feltétel az is, hogy bármely zárt halmaz ősképe zárt.)

A nyílt halmazokat nyílt félterekből származtattuk metszés és egyesítés segítségével. Halmazok ősképének képzése felcserélhető a metszet és az egyesítés műveletével. Emiatt a folytonosság utóbbi feltételét elegendő volna csak a nyílt félterekre mint U' halmazokra megkövetelni.

Ha $f : X \to X'$ affin leképezés, akkor tetszőleges $s' \in (X')^\bullet$ affin forma esetén az $\{A' \in X' : s'(A') > 0\}$ nyílt féltér f szerinti ősképe az $\{A \in X : s(A) > 0\}$ halmaz, ahol $s = s' \circ f \in X^\bullet$. Ha s nem konstans, akkor ez a halmaz nyílt féltér, egyébként pedig vagy $\emptyset$, vagy X. Emiatt bármely affin leképezés folytonos.

Rögzítsünk például egy A_0, A_1, …, A_d affin bázist X-ben és állítsuk elő a $P \in X$ pontokat $P = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_d A_d$ affin kombinációként. Az 1.3.19. Állítás és az affin formák folytonos volta alapján a λ_i együtthatók folytonosan függnek P-től.

Az affin alterek zárt halmazok, hiszen folytonos függvények (nevezetesen az affin formák) zéróhalmazaiként, illetve ezek metszeteiként állnak elő.

Bármely $H \subset X$ hipersík azonos bármelyik H által határolt (akár nyílt, akár zárt) féltérnek az 1.8.11. Definíció értelmében vett határával. Ez például abból

látható, hogy tetszőleges $P \in H$ ponthoz választhatunk olyan E egyenest X-ben, hogy $P \in E$ és $E \nsubseteq H$, ekkor $E \cap H = \{P\}$ és így P bármely környezete belemetsz az E egyenes mindkét P szerinti nyílt félegyenesésébe, annál inkább mindkét H határolta féltérbe.

Megjegyzés. Általában folytonos leképezésnél zárt halmaz képe nem feltétlenül zárt, és nyílt halmaz képe sem feltétlenül nyílt. Jól ismert tény viszont, hogy az $\mathbf{R}^d$-ben fekvő korlátos zárt halmazok folytonos képei szintén korlátosak és zártak. Egy véges dimenziós valós affin térben fekvő részhalmazt kompaktnak nevezünk, ha korlátos és zárt. Az ilyen halmazokra nyilvánvalóan átvihető az $\mathbf{R}^d$-ben fekvő korlátos és zárt halmazok analízisből ismert számos tulajdonsága. Így például a Bolzano–Weierstrass-féle tétel és a Weierstrass-féle kiválasztási tétel is érvényes affin térben: kompakt halmazon értelmezett bármely folytonos valós függvénynek létezik minimuma és maximuma, illetve egy kompakt halmazban fekvő bármely pontsorozatból kiválasztható olyan részsorozat, amely a halmaz valamely pontjához konvergál.

1.8.14. Definíció (Homeomorfizmus). Egy bijektív leképezést, amely folytonos, és amelynek az inverze is folytonos, homeomorfizmusnak nevezünk. Nyilván bármely affin izomorfizmus egyúttal homeomorfizmus.

Egy $X \to X'$ homeomorfizmus bijektív megfeleltetést létesít az X-beli, illetve az X'-beli nyílt halmazok rendszere között (azaz X és X' topológiája között).

Ha rögzítünk egy $\mathbf{x} : X \to \mathbf{R}^d$ affin koordinátarendszert, akkor az X-beli nyílt halmazokat (és az ebből származtatható további topológiai fogalmakat) az $\mathbf{R}^d$ koordinátatérbeli

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} \qquad \big(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d),\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d\big)$$

távolság segítségével is definiálhatnánk: az $U \subseteq X$ halmazt nyíltnak nevezhetnénk, ha bármely $A \in U$ ponthoz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^d$, $\rho\big(\mathbf{x}(A), \mathbf{q}\big) < \varepsilon$ esetén $\mathbf{q} \in \mathbf{x}(U)$. Az alábbi tétel alapján ezzel a módszerrel is – függetlenül a koordinátarendszer megválasztásától – a természetes topológia nyílt halmazait kapnánk. Ez annyit jelent, hogy $\mathbf{R}^d$-nek mint affin térnek a természetes topológiája azonos a fenti ρ távolságfüggvény által származtatott topológiával.

1.8.15. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbf{R}^d$ és $\mathbf{p} \in S$. Az S halmaz akkor és csak akkor környezete $\mathbf{p}$-nek az $\mathbf{R}^d$ affin tér természetes topológiája értelmében, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^d$, $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \varepsilon$ esetén $\mathbf{q} \in S$.*

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy S környezete $\mathbf{p}$-nek. Ekkor van véges sok olyan nyílt féltér, amelyek tartalmazzák $\mathbf{p}$-t és amelyek metszete S-nek része.

Legyen H az egyik ilyen féltér határoló hipersíkja. Ekkor $H = \mathcal{Z}(s) \subset \mathbf{R}^d$, ahol az $s \in (\mathbf{R}^d)^\bullet$ affin forma koordinátás alakja $s(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \ldots + a_dx_d + b$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$. Miután a $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbf{R}^d$ pont valamelyik H határolta nyílt féltérbe esik, $s(\mathbf{p}) = c \neq 0$. Legyen $\varepsilon = |c|/\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_d^2}$. Ha most valamilyen $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^d$-re $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \varepsilon$, akkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget felhasználva

$$|s(\mathbf{p}) - s(\mathbf{q})| = |a_1(p_1 - q_1) + \ldots + a_d(p_d - q_d)| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_d^2} \cdot \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < |c|,$$

tehát $\mathbf{q}$ is ugyanabba a nyílt féltérbe esik, mint $\mathbf{p}$. Az így kiválasztott ε-ok legkisebbike megfelel a kívánalmaknak.

Megfordítva, ha adott az $\varepsilon > 0$ szám, akkor definiáljuk $i = 1, \ldots, d$-re az $s_i \in (\mathbf{R}^d)^\bullet$ és $t_i \in (\mathbf{R}^d)^\bullet$ affin formákat az $s_i(\mathbf{x}) = x_i - p_i - \sqrt{\varepsilon/d}$, illetve a $t_i(\mathbf{x}) = x_i - p_i + \sqrt{\varepsilon/d}$ formulával. Az $s_i < 0$ és a $t_i > 0$ egyenlőtlenségekkel definiált $2d$ darab nyílt féltérnek $\mathbf{p}$ közös pontja. Bármely további $\mathbf{q}$ közös pontjukra $|q_i - p_i| < \sqrt{\varepsilon/d}$ teljesül minden i-re, így $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \varepsilon$, ahonnan $\mathbf{q} \in S$. Emiatt S környezete $\mathbf{p}$-nek. □

1.8.16. Állítás. *Bármely szürjektív affin leképezés nyílt leképezés, azaz nyílt halmazt nyílt halmazba visz.*

Bizonyítás: Az 1.1.10-beli első példa alapján linearizálás és alkalmas koordinátarendszer bevezetése után csak azt kell meggondolni, hogy $k \leq d$ esetén az $r : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^k$ vetítés nyílt leképezés.
Legyen tehát $U \subseteq \mathbf{R}^d$ nyílt és $\mathbf{q} \in r(U)$, be kell látnunk, hogy az $r(U)$ halmaz környezete $\mathbf{q}$-nak. Válasszunk $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in U$-t úgy, hogy $r(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$. Az 1.8.15. Tétel miatt alkalmas ε-nal a $\mathbf{p}$ pont ε-környezete része U-nak. Ha most $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ és $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, akkor az $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, p_{k+1}, \ldots, p_d) \in \mathbf{R}^d$ pontra $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, ezért $\mathbf{x} \in U$, továbbá $r(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, ahonnan $\mathbf{y} \in r(U)$. □

Megjegyzés. Egyéb testek feletti véges dimenziós affin tereken is értelmezhető természetes topológia az $X = X_A = V = \mathbf{F}^d$ azonosítás útján, valahányszor az $\mathbf{F}$ test alaphalmazán adott egy olyan topológia, amelyre nézve a testbeli műveletek folytonosak. Szokás ilyen módon például a komplex affin tereket is topológiával ellátni. Egy (X, V, Φ) d-dimenziós komplex affin tér topológiájának egy „természetes” származtatása adódik abból, hogy a V vektortér $2d$-dimenziós vektortérnek tekinthető a valós test fölött, és így (X, V, Φ) automatikusan $2d$-dimenziós valós affin tér.

2. Konvex halmazok affin térben

A konvex halmazok elméletének jelentős része csak a tér affin struktúrájára támaszkodik és nem használja a tér metrikus viszonyait, azaz például távolságokat, szögeket. Itt azokat a konvex halmazokkal kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket vesszük sorra, amelyek az affinitásokkal szemben invariánsak, és így már az affin geometriában is értelmezhetők, illetve bizonyíthatók. Az alábbiakban (X, V, Φ) véges dimenziós valós affin tér, amelyet a természetes topológiával látunk el. Az X tér dimenzióját d jelöli.

2.1. Konvex halmazok, konvex kombinációk

2.1.1. Definíció (Szakasz). Adott $A, B \in X$ mellett A, B végpontú szakaszon (vagy az A, B pontokat összekötő szakaszon) az $[A, B] = \Phi_A^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{AB} : 0 \leq t \leq 1\}\big)$ halmazt értjük.

Könnyen látható, hogy $A \neq B$ esetén $[A, B] = \Phi_A^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{AB} : t \geq 0\}\big) \cap \Phi_B^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{BA} : t \geq 0\}\big)$, azaz az $[A, B]$ szakasz az $\langle A, B\rangle$ egyenesen annak a két zárt félegyenesnek a metszeteként áll elő, amelyek végpontja A, illetve B, és amelyek tartalmazzák B-t, illetve A-t. Így nyilván $[B, A] = [A, B]$. Ha $A = B$, akkor $[A, B] = \{A\}$, amelyet elfajuló szakasznak tekintünk.

Tetszőleges $O \in X$ ponttal $[A, B] = \{P \in X : \overrightarrow{OP} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}, 0 \leq t \leq 1\}$, azaz $[A, B] = \{tA + (1-t)B : 0 \leq t \leq 1\}$.

2.1.2. Definíció (Konvex halmaz). Egy $K \subseteq X$ halmaz konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza, azaz tetszőleges $A, B \in K$ esetén $[A, B] \subseteq K$.

2.1.3. Példák

- Bármely X-beli affin altér konvex, az üres halmaz konvex, bármely féltér és bármely szakasz konvex.
- A számegyenesen pontosan az intervallumok konvexek (közéjük értve az elfajuló vagy végtelenbe nyúló intervallumokat is).
- Szakasznak affin leképezésnél származó képe (esetleg elfajuló) szakasz, emiatt bármely konvex halmaznak affin leképezésnél származó képe, illetve ősképe konvex.
- Ha $K_1 \subseteq X_1$ és $K_2 \subseteq X_2$ konvex, akkor $K_1 \times K_2 \subseteq X_1 \times X_2$ is konvex.

- Ha $K \subseteq X$ konvex és $P \in X$, akkor a $C = \bigcup_{\lambda>0} H_{P,\lambda}(K)$ halmaz is konvex, ahol $H_{P,\lambda}$ jelöli a P középpontú és λ arányú homotéciát. Legyen ugyanis $A = H_{P,\lambda}(A')$, $B = H_{P,\mu}(B')$, $A', B' \in K$ és $t \in [0,1]$, ekkor közvetlen számolással adódik, hogy $tA + (1-t)B = H_{P,\nu}(uA' + (1-u)B')$, ahol $\nu = t\lambda + (1-t)\mu$ és $u = t\lambda/\nu$. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a $C \cup \{P\}$ halmaz is konvex.

  Egy valós vektortérben konvex kúpnak nevezünk egy részhalmazt, ha konvex és bármely elemével együtt annak összes pozitív skalárszorosát is tartalmazza. A fenti C és $C \cup \{P\}$ halmazok konvex kúpok az X_P vektortérben.

- Az $\mathbf{R}^d$-beli $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ metrikával definiált $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$ nyílt, illetve $\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\}$ zárt gömbtestek, továbbá ezek affinitással nyert képei, a nyílt, illetve zárt ellipszoidtestek konvex halmazok $\mathbf{R}^d$-ben.

- A $V \times V \to \mathbf{R}$ szimmetrikus bilineáris függvények vektorterében a pozitív definit (illetve a negatív definit) szimmetrikus bilineáris függvények konvex kúpot alkotnak.

- Egy négyzetes valós mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha minden eleme nemnegatív, továbbá minden sorösszege és minden oszlopösszege 1-gyel egyenlő. Jelölje B_n az $n \times n$ méretű duplán sztochasztikus mátrixok halmazát, ekkor $B_n \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ konvex halmaz.

- Konvex halmazok tetszőleges X-beli rendszerének a metszete konvex.

További érdekes példák származtathatók a következő konstrukció használatával.

2.1.4. Definíció (Minkowski-kombináció). Legyenek $K, L \subseteq X$ tetszőleges részhalmazok és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ rögzített együtthatók, melyekre $\alpha + \beta = 1$. A K és L halmazok α és β együtthatókkal vett Minkowski-kombinációján az

$$\alpha K + \beta L = \left\{\alpha P + \beta Q : P \in K,\, Q \in L\right\}$$

halmazt értjük. Ha $X = V$ vektortér, akkor a Minkowski-kombináció az $\alpha + \beta = 1$ feltétel nélkül is értelmezhető. Az $\alpha = \beta = 1$ esetben a $K + L$ Minkowski-összegről beszélünk.

2.1.5. Állítás. *Konvex halmazok tetszőleges Minkowski-kombinációja is konvex.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy K és L konvex halmazok X-ben. Legyen az $\alpha K + \beta L$ Minkowski-kombináció két tetszőleges pontja $A = \alpha P + \beta Q$ és $B = \alpha R + \beta S$, ahol $P, R \in K$ és $Q, S \in L$, továbbá legyen $C \in [A, B]$ tetszőleges, azaz $C = tA + (1-t)B$, $t \in [0,1]$. Ekkor $C = t(\alpha P + \beta Q) + (1-t)(\alpha R + \beta S) = \alpha(tP + (1-t)R) + \beta(tQ + (1-t)S)$, itt $tP + (1-t)R \in K$ és $tQ + (1-t)S \in L$, így $C \in \alpha K + \beta L$. □

2.1.6. Definíció (Konvex burok). A 2.1.3-beli utolsó példa következtében bármely $S \subseteq X$ halmazhoz az őt tartalmazó X-beli konvex halmazok között létezik legszűkebb, mégpedig az S-et tartalmazó összes X-beli konvex halmaz metszete. Ezt a halmazt nevezzük az S halmaz konvex burkának, és $\mathrm{conv}(S)$-sel jelöljük.

Például bármely szakasz a végpontjai konvex burka. Egy halmaz pontosan akkor konvex, ha azonos a konvex burkával.

2.1.7. Definíció (Konvex kombináció). Egy affin kombinációt konvex kombinációnak nevezünk, ha a benne szereplő együtthatók nemnegatívak. Tehát a $P \in X$ pont az $A_1, \ldots, A_k$ pontok konvex kombinációja, ha $P = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Például bármely szakasz pontosan a két végpont konvex kombinációiból áll.

2.1.8. Tétel. *Bármely ponthalmaz konvex burka a halmazból vett véges pontrendszerek konvex kombinációiból áll.*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq X$ tetszőleges, és jelölje $c(S)$ az S-beli véges pontrendszerek összes lehetséges konvex kombinációi halmazát. Megmutatjuk, hogy $c(S) = \mathrm{conv}(S)$.

$c(S) \subseteq \mathrm{conv}(S)$: Ha $P \in c(S)$, akkor P valamely $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációja. A pontok száma, azaz k szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $P \in \mathrm{conv}(S)$. A $k = 1$ eset triviális, a $k = 2$ esetben pedig a konvexitás definíciója szerint ez igaz. Legyen $k > 2$ és tegyük föl, hogy a k-nál kevesebb tagú konvex kombinációk $\mathrm{conv}(S)$-ben vannak. Ha a λ_i együtthatók valamelyike 0, akkor az indukciós feltevést a többi pontra alkalmazva készen vagyunk. Egyébként pedig legyen $\mu = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$ és $\mu_i = \lambda_i/\mu$ $(i = 1, \ldots k-1)$. Ekkor $B = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_{k-1} A_{k-1}$ konvex kombináció, ezért az indukciós feltevésből $B \in \mathrm{conv}(S)$. Végül P a B és az A_k pont konvex kombinációja a μ és λ_k együtthatókkal, így $P \in \mathrm{conv}(S)$.

$\mathrm{conv}(S) \subseteq c(S)$: Elég belátni, hogy $c(S)$ konvex, hiszen az egytagú konvex kombinációkkal $S \subseteq c(S)$, és így a konvex burok definíciójából $\mathrm{conv}(S) \subseteq c(S)$ következik. Legyen $A, B \in c(S)$ és álljon elő A az $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációjaként, B pedig a $B_1, \ldots, B_l \in S$ pontok $\mu_1, \ldots, \mu_l$ együtthatós konvex kombinációjaként. Ha $P \in [A, B]$,

akkor P az A és a B konvex kombinációja valamilyen α és β együtthatókkal. Ekkor a P pont előállítható az $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l \in S$ pontok konvex kombinációjaként rendre az $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_k, \beta\mu_1, \ldots, \beta\mu_l$ együtthatókkal, így $P \in c(S)$. □

2.1.9. Következmény. *Egy $S \subseteq X$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha zárt a konvex kombinációk képzésére, azaz ha bármely véges sok S-beli pont bármely konvex kombinációja is eleme S-nek.*

Bizonyítás: Ha S konvex, akkor $S = \operatorname{conv}(S)$, így a 2.1.8. Tétel miatt az S-beli pontok konvex kombinációi S-ben vannak. Megfordítva, ha S zárt a konvex kombinációk képzésére, akkor ezt az S-beli pontpárokra alkalmazva adódik, hogy minden $A, B \in S$-re $[A, B] \subseteq S$. □

2.2. Konvex halmazokra vonatkozó alaptételek

2.2.1. Tétel (Carathéodory tétele). *A d-dimenziós X affin térben egy $S \subseteq X$ halmaz konvex burkának bármely pontja előáll legfeljebb $d+1$ darab S-beli pont konvex kombinációjaként.*

Bizonyítás: A 2.1.8. Tételt alkalmazva $P \in \operatorname{conv}(S)$ előállítható valamilyen $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontoknak valamilyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációjaként. Ekkor $\lambda_1\overrightarrow{PA_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{PA_k} = \mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy k a legkisebb olyan szám, amellyel ilyen előállítás lehetséges, ekkor szükségképpen az összes λ_i pozitív. Azt állítjuk, hogy $k \leq d+1$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $k > d+1$, ekkor az $A_1, \ldots, A_k$ pontrendszer nem független, ezért léteznek olyan, nem mind 0-val egyenlő $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ valós számok, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$ és $\alpha_1\overrightarrow{PA_1} + \ldots + \alpha_k\overrightarrow{PA_k} = \mathbf{0}$. Ekkor elég kicsi $\varepsilon > 0$ mellett a $\lambda_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, \lambda_k + \varepsilon\alpha_k$ számok nemnegatívak; ehhez nyilván $\varepsilon \leq \min\{-\lambda_i/\alpha_i : \alpha_i < 0,\ 1 \leq i \leq k\}$ elegendő. Válasszuk ε-t ezzel a korláttal egyenlőnek. Ekkor a P pont az $A_1, \ldots, A_k$ pontok konvex kombinációja a $\lambda_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, \lambda_k + \varepsilon\alpha_k$ együtthatókkal, amelyek között a 0 is előfordul. P tehát előáll k-nál kevesebb S-beli pont konvex kombinációjaként, ami ellentmond k minimalitásának. □

2.2.2. Definíció (Szimplex). Az X affin térben k-dimenziós szimplexnek nevezzük $k+1$ darab független pont konvex burkát. Jelölés: ha $A_0, A_1, \ldots, A_k \in X$ függetlenek, akkor $[A_0, A_1, \ldots, A_k] = \operatorname{conv}\big(\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\big)$. Az $A_0, A_1, \ldots, A_k$ pontokat a szimplex csúcsainak nevezzük.

Könnyen meggondolható (és a 2.5. szakaszban részletesen is tárgyaljuk majd), hogy a szimplex a csúcsai halmazát egyértelműen meghatározza.

A 0-dimenziós szimplexek egypontúak, az 1-dimenziós szimplexek pontosan a nem elfajuló szakaszok, a 2-dimenziósakat háromszögnek, a 3-dimenziósakat tetraédernek nevezzük.

Miután egy szimplex a csúcsai alkotta pontrendszer nemnegatív együtthatós affin kombinációból áll, bármely d-dimenziós szimplexet elő tudunk állítani $d+1$ darab zárt féltér közös részeként. Legyenek ugyanis A_0, A_1, …, A_d a szimplex csúcsai, ekkor ezek a pontok affin bázist alkotnak X-ben. Legyenek s_0, s_1, …, $s_d \in X^*$ az ehhez az affin bázishoz tartozó duális affin formák. (Emlékeztetőül: $s_i(P)$ a P-t előállító affin kombinációban szereplő i-edik együttható.) Ekkor $[A_0, A_1, \ldots, A_d] = \bigcap_{i=0}^{d} \{P \in X : s_i(P) \geq 0\}$, és ez a formula azt mutatja, hogy a szimplex előállítható $d+1$ darab zárt féltér metszeteként.

2.2.3. Állítás. *Bármely $S \subseteq X$ halmaz konvex burka előáll azoknak a szimplexeknek az egyesítéseként, amelyeknek a csúcsai S-nek elemei.*

Bizonyítás: Bármelyik S-beli csúcsú szimplex nyilván benne fekszik $\operatorname{conv}(S)$-ben, így elég a fordított tartalmazást belátni. Legyen $P \in \operatorname{conv}(S)$ tetszőleges. A 2.1.8. Tétel szerint P benne van véges sok alkalmas S-beli pont konvex burkában; válasszunk egy olyan A_0, A_1, …, A_k minimális S-beli pontrendszert, amelynek P a konvex burkában van. Elég megmutatni, hogy ez a pontrendszer független. Ha nem így volna, akkor benne feküdne egy k-nál kisebb dimenziójú Y affin altérben, amelyre a 2.2.1. Tételt alkalmazva az adódna, hogy P előáll az A_0, A_1, …, A_k pontok közül legfeljebb k darabnak a konvex kombinációjaként is. Ez ellentmond az A_0, A_1, …, A_k pontrendszer minimalitásának. □

2.2.4. Lemma (Radon tétele). *Ha valamely $S \subseteq X$ pontrendszer nem független, akkor S-nek léteznek olyan S_1 és S_2 diszjunkt részhalmazai, amelyekre* $\operatorname{conv}(S_1) \cap \operatorname{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ véges. Léteznek olyan λ_1, λ_2, …, λ_k nem csupa zérus valós számok, amelyekre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$ és valamilyen (tetszőleges) $O \in X$ kezdőponttal $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k} = \mathbf{0}$. Legyen $I = \{i : \lambda_i > 0\}$ és $J = \{j : \lambda_j < 0\}$, továbbá $\lambda_I = \sum_{i \in I} \lambda_i$ és $\lambda_J = \sum_{j \in J} \lambda_j$. Ekkor az $\overrightarrow{OP} = \sum_{i \in I} (\lambda_i / \lambda_I) \cdot \overrightarrow{OA_i}$ egyenlőséggel definiált P pontra $\overrightarrow{OP} = \sum_{j \in J} (\lambda_j / \lambda_J) \cdot \overrightarrow{OA_j}$ is teljesül. Mindkét formulában konvex kombinációk állnak, emiatt $P \in \operatorname{conv}(S_1) \cap \operatorname{conv}(S_2)$, ahol $S_1 = \{A_i : i \in I\}$ és $S_2 = \{A_j : j \in J\}$. □

2.2.5. Tétel (Helly tétele, véges változat). *Legyen adott a d-dimenziós valós affin térben véges sok konvex halmaz. Ha közülük bármelyik legfeljebb $(d+1)$-nek van közös pontja, akkor az összesnek van közös pontja.*

Bizonyítás: Legyenek K_1, K_2, …, K_n az adott konvex halmazok. Teljes indukciót alkalmazunk n szerint. Ha $n \leq d+1$, akkor nincs mit bizonyítani; legyen $n = d+2$. Bármelyik $1 \leq m \leq d+2$ indexhez a feltevés szerint

található olyan A_m pont, amelyre $A_m \in K_i$ teljesül minden $i \neq m$, $1 \leq \leq i \leq d+2$ esetén. Az A_1, A_2, …, A_{d+2} pontok rendszere összefüggő, ezért a 2.2.4. Lemmát alkalmazva vannak olyan diszjunkt I és J indexhalmazok, hogy a $\operatorname{conv}(\{A_i : i \in I\})$ és a $\operatorname{conv}(\{A_j : j \in J\})$ halmazoknak létezik P közös pontja. Ekkor az $\{A_i : i \in I\} \subseteq \bigcap_{i \notin I} K_i$ és az $\{A_j : j \in J\} \subseteq \bigcap_{j \notin J} K_j$ tartalmazások miatt $P \in \left(\bigcap_{i \notin I} K_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \notin J} K_j\right) = \bigcap_{m=1}^{d+2} K_m$.

Tegyük fel most, hogy $n > d+2$ és az $n-1$ halmazból álló rendszerekre igaz az állítás. Legyen $m = 1, \ldots, n-1$-re $L_m = K_m \cap K_n$. Ekkor az L_m halmazok is konvexek és közülük bármely $(d+1)$-nek van közös pontja, hiszen ennek az ellenőrzéséhez a K_m halmazok közül $(d+2)$-nek kell közös ponttal bírnia, ezt pedig már beláttuk. Nyilván $\bigcap_{m=1}^{n} K_m = \bigcap_{m=1}^{n-1} L_m$, ezért az L_1, L_2, …, L_{n-1} halmazok rendszerére az indukciós feltevést alkalmazva adódik az állítás. □

A Helly-tételnek olyan változata is használatos, amelyben a konvex halmazok száma nem feltétlenül véges. Végtelen sok halmaz közös pontjának létezéséhez nem kell erősebb geometriai feltevést tennünk, ez pusztán topológiai okok következménye lesz. Az alábbi lemma az $\mathbf{R}^d$-beli kompakt (azaz korlátos és zárt) halmazok egyik gyakran használt topológiai tulajdonsága, bizonyításától itt eltekintünk. Az absztrakt topológiában éppen ezt a tulajdonságot használják a kompaktság definíciójaként.

2.2.6. Lemma. *Legyen $K \subseteq X$ kompakt halmaz. Ha X-beli nyílt halmazok egy rendszere lefedi K-t, akkor ezek közül a halmazok közül véges sok is lefedi K-t.* □

2.2.7. Tétel (Helly tétele, végtelen változat). *Legyen adott a d-dimenziós valós affin térben tetszőlegesen sok konvex zárt halmaz, amelyek között legalább az egyik korlátos. Ha a halmazok közül bármelyik legfeljebb $(d+1)$-nek van közös pontja, akkor az összesnek van közös pontja.*

Bizonyítás: Legyen K a halmazrendszer kompakt tagja. Indirekt módon tegyük fel, hogy a halmazoknak nincs közös pontja. Ekkor K-nak nyílt halmazokkal való lefedését alkotja a többi halmaz komplementere. Hivatkozva a 2.2.6. Lemmára és K kompaktságára a halmazrendszer véges sok tagjának a komplementere is lefedi K-t, azaz ennek a véges sok tagnak K-val együtt nincs közös pontja. Ez pedig ellentmond a 2.2.5. Tételnek. □

A Helly-tétel alkalmazásaként az alábbi állításban megmutatjuk, hogy egy kompakt konvex halmaz nem térhet el tetszőlegesen nagy mértékben attól, hogy középpontosan szimmetrikus legyen.

2.2.8. Állítás. *Legyen K kompakt konvex halmaz a d-dimenziós valós affin térben, $d \geq 1$. Ekkor létezik olyan $P \in K$ pont, hogy bármely P-n átmenő $E \subseteq X$ egyenesre $K \cap E = [A, B]$, $A \neq B \neq P$ esetén az (ABP) osztóviszonyra $1/d \leq (ABP) \leq d$ teljesül.*

Bizonyítás: Minden $Q \in K$ pontra készítsük el a $K_Q = H_{Q,d/(d+1)}(K)$ konvex halmazt. Állítjuk, hogy ezek közül a halmazok közül bármelyik $(d+1)$-nek van közös pontja. Legyen ugyanis Q_1, Q_2, …, $Q_{d+1} \in K$ tetszőleges. Jelöljük S-sel ezek súlypontját és S_i-vel az i-edik elhagyása után a többi pont súlypontját:

$$S = \frac{1}{d+1}Q_1 + \ldots + \frac{1}{d+1}Q_{d+1},$$
$$S_i = \frac{1}{d}Q_1 + \ldots + \frac{1}{d}Q_{i-1} + \frac{1}{d}Q_{i+1} + \ldots + \frac{1}{d}Q_{d+1};$$

ekkor $S_i \in K$ és a súlyok csoportosításával minden $i = 1, \ldots, (d+1)$-re $S = \frac{1}{d+1}Q_i + \frac{d}{d+1}S_i = H_{Q_i,d/(d+1)}(S_i) \in K_{Q_i}$ teljesül. A 2.2.6. Következményt alkalmazva válasszunk egy $P \in \bigcap\{K_Q : Q \in K\}$ pontot. Ha $[A, B]$ a K halmaz P-n átmenő húrja és $A \neq B \neq P$, akkor $P \in K_A$ miatt $P \in$ $\in H_{A,d/(d+1)}([A, B])$, ahonnan $(ABP) \leq d$. A másik egyenlőtlenség A és B szerepcseréjével adódik. □

Megjegyzés. A d-dimenziós szimplex példája mutatja, hogy d a lehető legkisebb szám, amellyel a 2.2.8-beli egyenlőtlenségek fennállnak, továbbá szimplex esetén a csúcsok súlypontja az egyetlen alkalmas P pont.

2.3. Konvex halmazok topológiai tulajdonságai

Az alábbiakban (ahogyan már 2.2.6–2.2.8-ban is) a nyílt, zárt, kompakt stb. jelzők az X affin tér természetes topológiájára vonatkoznak. Az $\mathrm{int}S$, $\overline{S}$, illetve ∂S jelöléseket is egy $S \subseteq X$ ponthalmaznak az X tér természetes topológiájára vonatkozó belsejére, lezárására és határára használjuk.

2.3.1. Állítás. *Konvex halmaz lezárása konvex.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $K \subseteq X$ konvex, legyen $A, B \in \overline{K}$ és $P \in [A, B]$. Ekkor valamilyen $t \in [0,1]$-re P az A és B konvex kombinációja t és $1 -$ $- t$ együtthatókkal. Léteznek olyan K-beli A_n és B_n sorozatok, hogy $A_n \to A$ és $B_n \to B$. Ekkor az A_n és a B_n pont t és $1 - t$ együtthatókkal vett P_n konvex kombinációja K-hoz tartozik. Affin koordinátákat használva és a vektorműveletek folytonosságára hivatkozva rögtön látható, hogy $P_n \to P$, ahonnan $P \in \overline{K}$. □

2.3.2. Állítás. *Legyen K konvex halmaz. Ekkor:*

(1) *Ha $A \in \overline{K}$ és $B \in \mathrm{int}K$, akkor $[A, B] - \{A\} \subseteq \mathrm{int}K$.*

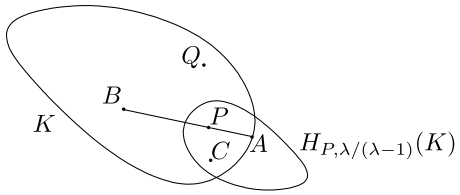
(2) $\mathrm{int}K$ *konvex.*

(3) $\mathrm{int}K$ *pontosan akkor üres, ha K benne fekszik egy hipersíkban.*

(4) $\mathrm{int}K = \mathrm{int}\overline{K}$.

(5) *Ha $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, akkor $\overline{K} = \overline{\mathrm{int}K}$.*

Bizonyítás: (1): Legyen $P \in [A, B]$, $P \neq A, B$ tetszőleges pont és definiáljuk a λ valós számot a $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ egyenlőséggel, ekkor $0 < \lambda < 1$. A P középpontú, $\lambda/(\lambda - 1)$ arányú $H_{P,\lambda/(\lambda-1)}$ homotécia a B pontot A-ba, így az $\mathrm{int}K$ nyílt halmazt A egy nyílt környezetébe viszi.



Emiatt választhatunk olyan $C \in K$ pontot, amely A-nak ebbe a környezetébe esik, azaz amelynél a $Q = H_{P,(\lambda-1)/\lambda}(C)$ pontra $Q \in \mathrm{int}K$. Tekintsük most a $H_{C,\lambda}$ homotéciát. Egyrészt $H_{C,\lambda}(Q) = P$, másrészt $C \in K$ miatt $H_{C,\lambda}(K) \subseteq$ $\subseteq K$ és annál inkább $H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K) \subseteq K$ teljesül. Tehát $P \in H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K) \subseteq K$, ahol $H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K)$ nyílt halmaz, és így $P \in \mathrm{int}K$.

(2): Rögtön következik (1)-ből.

(3): Ha K nem része semmilyen hipersíknak, akkor $\dim\langle K\rangle = d$, ezért K-ban van $d+1$ független pont: A_0, A_1, …, A_d. Ekkor K lefedi az $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ d-dimenziós szimplexet. A baricentrikus koordinátákkal adott $[1 : 1 : \ldots :$ $: 1]$ pont (azaz az A_0, A_1, …, A_d pontrendszer súlypontja) a szimplexet metszetként előállító félterek mindegyikének belső pontja, így a szimplexnek is belső pontja, annál inkább belső pontja K-nak.
Megfordítva, ha H hipersík és $K \subseteq H$, akkor $\mathrm{int}H = \emptyset$ miatt $\mathrm{int}K = \emptyset$.

(4): $K \subseteq \overline{K}$ miatt nyilván $\mathrm{int}K \subseteq \mathrm{int}\overline{K}$. Megfordítva, legyen $P \in \mathrm{int}\overline{K}$. Ekkor $\mathrm{int}K$ nem lehet üres, mert akkor (3) alkalmazásával K és így $\overline{K}$ is benne feküdne egy hipersíkban, és akkor $\mathrm{int}\overline{K}$ is üres lenne. Válasszunk egy $B \in \mathrm{int}K$ pontot. Az $\mathrm{int}\overline{K}$ halmaz nyílt volta miatt választhatunk olyan A pontot a $\langle P, B\rangle$ egyenesen, amely $\mathrm{int}\overline{K}$-ba esik és amelyre $P \in [A, B]$, $A \neq P$. Ekkor az (1) állítás alkalmazásával $P \in \mathrm{int}K$.

(5): A $\overline{K} \supseteq \overline{\mathrm{int}K}$ tartalmazás $K \supseteq \mathrm{int}K$ miatt nyilvánvaló. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $A \in \overline{K}$ pontot. Válasszunk egy A-tól különböző $B \in \mathrm{int}K$ pontot is, ekkor az A pont benne van az $[A, B] - \{A\}$ halmaz lezárásában. Ekkor az (1) állítás felhasználásával az A pont benne van az ennél bővebb $\mathrm{int}K$ halmaz lezárásában is. □

2.3.3. Állítás

(1) *Nyílt halmaz konvex burka nyílt.*

(2) *Kompakt halmaz konvex burka kompakt.*

Bizonyítás: (1): Legyen $S \subset X$ nyílt és $P \in \mathrm{conv}(S)$. Ekkor a 2.2.3. Állítás szerint vannak olyan A_0, A_1, …, $A_k \in S$ független pontok, hogy $P \in$ $\in [A_0, A_1, \ldots, A_k]$, azaz P az A_0, A_1, …, A_k pontok konvex kombinációja valamilyen λ_0, λ_1, …, λ_k együtthatókkal. Feltehető, hogy például $0 < \lambda_0 <$ < 1. Legyen $i = 1, \ldots, k$-ra $\mu_i = \lambda_i/(1 - \lambda_0)$, ekkor $Q = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k$ is konvex kombináció, így $Q \in \mathrm{conv}(S)$. A P pont A_0-nak és Q-nak λ_0 és $1 - \lambda_0$ együtthatókkal vett konvex kombinációjaként áll elő, ahonnan $\overrightarrow{QP} =$ $= \lambda_0 \cdot \overrightarrow{QA_0}$. Emiatt a Q középpontú, λ_0 arányú homotécia az A_0 pontot P-be képezi, és $Q \in \mathrm{conv}(S)$ miatt az S nyílt halmazt $\mathrm{conv}(S)$ egy részhalmazába. Ez a részhalmaz a P pontnak olyan környezete, amely $\mathrm{conv}(S)$-ben fekszik.

(2): Tekintsük az $Y = \mathbf{R}^{d+1} \times X^{d+1}$ affin téren azt a $\Delta : Y \to X$ leképezést, amelynél $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_d, A_0, \ldots, A_d) = \lambda_0 A_0 + \ldots + \lambda_d A_d$. Az X térben affin koordináták felhasználásával rögtön látható, hogy Δ affin leképezés, és így folytonos.

Ha $S \subset X$ nemüres kompakt halmaz, akkor a

$$T = \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_d, A_0, \ldots, A_d) \in Y : \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ A_i \in S\ (i = 0, \ldots, d) \right\}$$

halmaz is kompakt, hiszen korlátos és zárt az Y térben. A 2.2.1. Tétel miatt $\mathrm{conv}(S) = \Delta(T)$, így a Δ leképezés folytonossága miatt $\mathrm{conv}(S)$ kompakt. □

Megjegyzés. Zárt halmaz konvex burka nem feltétlenül zárt, amint azt a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont egyesítéseként előálló halmaz példája mutatja.

2.3.4. Definíció (Konvex halmaz dimenziója). A $K \subseteq X$ nemüres konvex halmaz dimenzióján a K affin burkának dimenzióját értjük, azaz $\dim K =$ $= \dim\langle K \rangle$.

A 2.3.2.(3) Állításból következik, hogy $\dim K = \dim X$ pontosan akkor teljesül, ha K-nak van belső pontja.

2.3.5. Példák

- Ha $A_0, \ldots, A_k$ független pontok, akkor $\dim[A_0, \ldots, A_k] = \dim\langle A_0, \ldots, A_k\rangle = k$, tehát egy k-dimenziós szimplex dimenziója a 2.3.4. Definíció értelmében is k.
- Egy n-dimenziós vektortéren a szimmetrikus bilineáris függvények $\binom{n+1}{2}$-dimenziós vektorteret alkotnak, amelyben a pozitív definit függvények alkotta konvex kúp nyílt, így szintén $\binom{n+1}{2}$-dimenziós.
- A duplán sztochasztikus $n\times n$-es mátrixok B_n halmazát $2n-1$ független egyenlet (és n^2 további egyenlőtlenség) írja le az $\mathbf{R}^{n\times n}$ térben, ezért $\dim B_n = (n-1)^2$.

2.3.6. Definíció (Konvex halmaz relatív belseje és relatív határa). Legyen $K \subseteq X$ nemüres konvex halmaz. K relatív belsejének (relatív határának) nevezzük és $\operatorname{relint} K$-val ($\operatorname{rel}\partial K$-val) jelöljük K belső pontjainak (határpontjainak) halmazát a $\langle K\rangle$ affin térre vonatkozóan.

A 2.3.2.(3) Állításból következik, hogy bármely nemüres konvex halmaz relatív belseje sem üres. Sőt, 2.3.2.(5) miatt $\overline{K} = \overline{\operatorname{relint} K}$ érvényes bármely K konvex halmazra.

2.3.7. Állítás. *Legyen $K \subset X$ legalább egydimenziós kompakt konvex halmaz. Ekkor $K = \operatorname{conv}(\operatorname{rel}\partial K)$.*

Bizonyítás: Legyen $P \in K$ tetszőleges és válasszunk egy P-n áthaladó E egyenest az $\langle K\rangle$ affin altérben. Ekkor $E \cap K$ egy (esetleg elfajuló) $[A, B]$ szakasz E-ben, ahol $A, B \in \operatorname{rel}\partial K$. Így $P \in \operatorname{conv}(\operatorname{rel}\partial K)$. □

2.3.8. Állítás. *Ha $K, L \subset X$ nemüres diszjunkt konvex zárt halmazok és legalább az egyikük kompakt, akkor léteznek diszjunkt konvex nyílt környezeteik, azaz olyan $M, N \subset X$ konvex nyílt halmazok, amelyekre $K \subset M$, $L \subset N$ és $M \cap N = \emptyset$.*

Bizonyítás: Affin koordinátarendszer bevezetésével feltehető, hogy $X = \mathbf{R}^d$. Legyen például K kompakt. A $\rho(\mathbf{x}, L) = \inf\{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in L\}$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$ függvény folytonos és L zártsága miatt L-en kívül pozitív, ezért a K kompakt halmazon pozitív minimumot vesz fel; legyen δ ez a minimumérték. Ekkor az $M = K + B(\mathbf{0}, \delta/2)$ és az $N = L + B(\mathbf{0}, \delta/2)$ Minkowski-összegek diszjunktak. M és N konvexek a 2.1.5. Állítás miatt, továbbá nyílt halmazok, hiszen a $B(\mathbf{0}, \delta/2)$ nyílt halmaz eltoltjainak uniói. □

Megjegyzés. A 2.3.8. Állításban a kompaktsági feltevés nem engedhető el. Tekintsük például ugyanis az $\mathbf{R}^2$ síkban a $K = \{(x, y) : x > 0, y \geq 1/x\}$ és az $L = \{(x, y) : y \leq 0\}$ halmazt, ezeknek nincsenek diszjunkt konvex környezeteik.

2.3.9. Tétel

(1) *Ha $M \subseteq X$ nemüres konvex nyílt halmaz, akkor M homeomorf X-szel (azaz az $\mathbf{R}^d$ térrel).*

(2) *Ha $K \subseteq X$ kompakt konvex halmaz és* $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, *akkor K homeomorf a $\overline{B}^d = \overline{B}(\mathbf{0},1) \subseteq \mathbf{R}^d$ zárt egységgömbtesttel, ∂K pedig az $\mathbf{S}^{d-1}$ egységgömbfelülettel.*

Bizonyítás: (1): Alkalmas affin koordinátarendszer választásával feltehető, hogy $X = \mathbf{R}^d$ és $\mathbf{0} \in M$. Definiáljuk a $\lambda : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ függvényt a

$$\lambda(\mathbf{x}) = \inf\left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda > 0,\ \lambda \cdot \mathbf{x} \in M\right\} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$$

formulával. Nyilván λ pozitív-homogén, azaz bármely $c > 0$-ra és $\mathbf{x}$-re $\lambda(c{\cdot}\mathbf{x}) = c \cdot \lambda(\mathbf{x})$. Állítjuk, hogy a λ függvény folytonos.
Rögtön következik a definícióból, hogy $\mathbf{x} \in M$-re $\lambda(\mathbf{x}) < 1$, $\mathbf{x} \in \partial M$-re $\lambda(\mathbf{x}) = 1$ és $\mathbf{x} \notin \overline{M}$-ra $\lambda(\mathbf{x}) > 1$ teljesül. Ezért $\lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ esetén $\lambda(\mathbf{x})$ azzal az aránnyal egyenlő, amilyen arányú origó középpontú homotéciát M-re alkalmazva az $\mathbf{x}$ pont az M képének határpontja. (Továbbá $\lambda(\mathbf{x}) = 0$ pontosan azokra az $\mathbf{x}$-ekre áll, amelyekhez nem található ilyen homotécia.) Emiatt bármely $a > 0$ valós számra $\lambda^{-1}(0, a) = H_{\mathbf{0},a}(M)$ és $\lambda^{-1}(a, +\infty) = H_{\mathbf{0},a}(\mathbf{R}^d - \overline{M})$ nyílt halmazok, így λ folytonos.
Definiáljuk az $f : M \to \mathbf{R}^d$ és a $g : \mathbf{R}^d \to M$ leképezést az

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1 - \lambda(\mathbf{x})}, \qquad g(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{1 + \lambda(\mathbf{y})}$$

formulákkal. A λ függvény folytonossága miatt f és g folytonos, továbbá $\lambda(g(\mathbf{y})) = \lambda(\mathbf{y})/(1 + \lambda(\mathbf{y})) < 1$ miatt g valóban M-be képez. A λ függvény pozitív-homogenitásának felhasználásával közvetlen számolás mutatja, hogy f és g egymás inverzei.
(2): Legyen $M = \mathrm{int}K$, a fentiekhez hasonlóan tegyük föl, hogy$X = \mathbf{R}^d$, $\mathbf{0} \in M$, és definiáljuk a $\lambda : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ függvényt. Most a ∂K halmaz kompaktsága és $\mathbf{0} \notin \partial K$ miatt alkalmas $c, C > 0$ konstansokkal $c < \lambda(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| < C$ fennáll minden $\mathbf{x} \in \partial K$-ra, így λ pozitív-homogenitása miatt minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra is. Ezért az $F, G : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$,

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}, & \text{ha } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \text{ha } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad G(\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\lambda(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{y}, & \text{ha } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \text{ha } \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases}$$

leképezések folytonosak (a $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$ pontban is). Nyilván F és G egymás inverzei, továbbá $F(K) = \overline{B}^d$ és $F(\partial K) = \mathbf{S}^{d-1}$. $\square$

2.3.10. Következmény. *Bármely k-dimenziós konvex halmaz relatív belseje homeomorf $\mathbf{R}^k$-val. Bármely k-dimenziós korlátos konvex halmaz lezárása homeomorf $\overline{B}^k$-val, határa homeomorf $\mathbf{S}^{k-1}$-gyel.*

Bizonyítás: Ha L konvex és $\dim L = k$, akkor $\operatorname{relint} L$ nemüres és nyílt a k-dimenziós $\langle L \rangle$ affin altérben. Így $M = \operatorname{relint} L$-re és $X = \langle L \rangle$-re alkalmazható a 2.3.9.(1) Tétel. Ha L még korlátos is, akkor a 2.3.9.(2) Tételt alkalmazzuk $K = \overline{L}$-ra. □

2.4. Elválasztás, támaszhipersíkok

2.4.1. Definíció (Elválasztható halmazok). Legyen $A, B \subseteq X$. Azt mondjuk, hogy a $H \subset X$ hipersík elválasztja A-t és B-t, ha A és B a H szerinti két különböző zárt féltérbe esik. Két X-beli ponthalmaz elválasztható, ha található hozzájuk olyan hipersík, amely elválasztja őket.
Azt mondjuk, hogy a H hipersík szigorúan elválasztja A-t és B-t, ha A és B a H szerinti két különböző nyílt féltérbe esik. Két X-beli ponthalmaz szigorúan elválasztható, ha található hozzájuk olyan hipersík, amely szigorúan elválasztja őket.

Ha A és B konvex halmazok X-ben, akkor bármely $\operatorname{relint} A$-t és $\operatorname{relint} B$-t elválasztó hipersík a 2.3.6. Definíciót követő észrevétel alapján egyúttal $\overline{A}$-t és $\overline{B}$-t, és így A-t és B-t is elválasztja.

A szigorúan elválasztható halmazok szükségképpen diszjunktak, míg az elválasztható halmazok nem feltétlenül azok. Szélsőséges példaként bármely hipersík elválasztja saját magát saját magától.

2.4.2. Lemma (Banach–Hahn-tétel). *Legyen $M \subset X$ nyílt konvex halmaz és $Y \subset X$ affin altér, melyekre $M \cap Y = \emptyset$. Ekkor létezik olyan H hipersík X-ben, hogy $Y \subseteq H$ és $M \cap H = \emptyset$.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $M \neq \emptyset$. Először belátjuk a lemmát a sík esetére, azaz abban a speciális esetben, amikor $\dim X = 2$ és $Y = \{P\}$ egypontú. Tekintsük az $N = \bigcup_{\lambda > 0} H_{P,\lambda}(M)$ nyílt halmazt. A 2.1.3-beli ötödik példa szerint az N halmaz konvex, és nyilván $P \in \partial N$. Az N halmaznak van további $Q \neq P$ határpontja, hiszen $\{P\}$ semmilyen síkbeli konvex nyílt halmaz határával nem lehet azonos. Állítjuk, hogy az $E = \langle P, Q \rangle$ egyenes ekkor diszjunkt N-től, és így M-től is. Ellenkező esetben ugyanis válasszunk egy $R \in E \cap N$ pontot. Ha R az E egyenesen a Q-t tartalmazó P szerinti félegyenesre esik, akkor $Q = H_{P,\lambda}(R)$ valamilyen $\lambda > 0$-val, ahonnan $Q \in N$ következik, ami lehetetlen, hiszen N nyílt és $Q \in \partial N$. Ha pedig R a másik félegyenes pontja, akkor a 2.3.2.(1) Állítást N-re, Q-ra és R-re alkalmazva következik, hogy $P \in N$, ami szintén lehetetlen.

Tekintsük most az általános esetet; feltehetjük, hogy $d = \dim X \geq 3$ és azt is, hogy $\dim Y \leq d-2$. Legyen $Z \supseteq Y$ maximális dimenziós M-től diszjunkt affin altér X-ben, belátjuk, hogy Z hipersík. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\dim Z \leq d-2$. Faktorizáljuk X-et a $\overrightarrow{Z}$ altér szerint és legyen $q : X \to X/\overrightarrow{Z}$ a faktorizáló leképezés. Ekkor a $q(M) \subset X/\overrightarrow{Z}$ halmaz konvex, nyílt és a $q(Z)$ pont nem tartozik hozzá. Válasszunk egy tetszőleges $S \subseteq X/\overrightarrow{Z}$ kétdimenziós affin alteret a $q(Z)$ ponton át. Alkalmazzuk a lemma már bizonyított speciális esetét a $q(Z)$ pontra és az $S \cap q(M)$ konvex nyílt halmazra az S affin síkban. Ha $E \subset S$ egyenes, melyre $q(Z) \in E$ és $E \cap q(M) = \emptyset$, akkor $q^{-1}(E)$ egy Z-nél magasabb dimenziós, Y-t tartalmazó, M-től diszjunkt affin altér X-ben, ami ellentmond Z maximalitásának. □

2.4.3. Állítás. *Legyenek M és N nemüres diszjunkt konvex halmazok X-ben, amelyek közül legalább az egyik nyílt. Ekkor M és N elválaszthatók. Ha mindkét halmaz nyílt, akkor szigorúan is elválaszthatók.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy M nyílt. Tetszőlegesen választott origóval azonosítsuk X-et a V vektortérrel, majd képezzük az $N-M$ Minkowski-kombinációt. $N-M$ nyílt halmaz, hiszen $N-M = \bigcup_{\mathbf{x}\in N}(\mathbf{x}-M)$ és itt mindegyik $\mathbf{x}-M$ tag az M középpontos szimmetriával származó képének egy eltoltja, tehát nyílt. Továbbá $M \cap N = \emptyset$ miatt $N-M$ nem tartalmazza az origót, ezért a 2.4.2. Lemma felhasználásával található olyan $s \in V^*$ lineáris forma, amely minden $N-M$-beli vektoron pozitív értéket vesz fel. Emiatt az $s(M) \subset \mathbf{R}$ intervallum minden eleme kisebb az $s(N) \subset \mathbf{R}$ intervallum minden eleménél. Válasszunk egy elválasztó pontot, azaz a $[\sup s(M), \inf s(N)]$ zárt intervallum egy tetszőleges c elemét. Ekkor a $\mathbf{v} \mapsto s(\mathbf{v}) - c$ affin forma zéróhalmaza olyan hipersík, amely elválasztja M-et és N-et. Ha M és N is nyílt halmaz, akkor $s(M)$ és $s(N)$ nyílt intervallumok és így $c \notin s(M) \cup s(N)$, emiatt ez a hipersík szigorúan választja el M-t és N-et. □

2.4.4. Következmény. *Legyenek K és L nemüres diszjunkt konvex zárt halmazok, amelyek közül legalább az egyik kompakt. Ekkor K és L szigorúan elválaszthatók.*

Bizonyítás: Rögtön következik a 2.3.8. és a 2.4.3. Állításokból. □

Megjegyzés. A 2.4.4. Következményben a kompaktsági feltevés nem engedhető el, tekintsük ugyanis például a 2.3.8. Állítást követő megjegyzésben szereplő K és L halmazokat.

2.4.5. Következmény. *Az X affin tér egy részhalmaza pontosan akkor konvex és zárt, ha előáll zárt félterek metszeteként. A konvex zárt halmazok is és a konvex nyílt halmazok is előállnak nyílt félterek metszeteként.*

Bizonyítás: Zárt félterek metszete nyilván konvex és zárt. Megfordítva, legyen $K \subseteq X$ konvex zárt halmaz. Válasszunk a 2.4.4. Következmény alapján

minden $P \in X - K$ ponthoz egy P-t és K-t szigorúan elválasztó hipersíkot és annak a K-t tartalmazó F_P zárt félterét. Ekkor $K = \bigcap_{P \in X-K} F_P$.
Ha a fenti konstrukcióban F_P-nek a megfelelő nyílt félteret választjuk, akkor K nyílt félterek metszeteként áll elő. Végül, ha K nyílt, akkor a 2.4.3. Állításra hivatkozva választjuk a hipersíkokat, majd a nyílt féltereket. □

2.4.6. Állítás. *Ha $K, L \subseteq X$ diszjunkt konvex halmazok, akkor bármely $P \in X$ pontra K diszjunkt* $\operatorname{conv}\big(\{P\} \cup L\big)$*-től, vagy L diszjunkt* $\operatorname{conv}\big(\{P\} \cup \cup K\big)$*-tól.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $P \notin K \cup L$. Ha $A \in K \cap \operatorname{conv}\big(\{P\} \cup L\big)$, akkor valamilyen $B \in L$ pontra $A \in [P, B]$. Hasonlóképpen ha $C \in L \cap \operatorname{conv}\big(\{P\} \cup \cup K\big)$, akkor $C \in [P, D]$ alkalmas $D \in K$-val. Az A, B, C, D, P pontok mindannyian egy síkban vannak, ahol az $\langle A, D\rangle$ egyenes elválasztja B-t C-től, valamint a $\langle B, C\rangle$ egyenes elválasztja A-t D-től. Emiatt az $[A, D] \subseteq \subseteq K$ és $[B, C] \subseteq L$ szakaszok metszik egymást, ami ellentmond K és L diszjunktságának. □

2.4.7. Tétel. *Legyenek $K, L \subset X$ nemüres konvex halmazok, melyekre* $\operatorname{relint} K$ *és* $\operatorname{relint} L$ *diszjunktak. Ekkor K és L elválaszthatók.*

Bizonyítás: Nyilván elegendő $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ elválaszthatóságát megmutatni.
Ha K és L közül legalább az egyik d-dimenziós, akkor $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ közül legalább az egyik nyílt, ezért a 2.4.3. Állítást alkalmazva készen vagyunk.
Ha K és L mindketten d-nél alacsonyabb dimenziósak, akkor elég tehát megmutatni, hogy $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ belefoglalhatók olyan diszjunkt konvex halmazokba, amelyek közül legalább az egyik d-dimenziós. Ezt pedig a 2.4.6. Állítás ismételt alkalmazásával érjük el. Ha ugyanis M és N d-nél alacsonyabb dimenziójú diszjunkt konvex halmazok, akkor valamely $P \in X - \big(\langle M\rangle \cup \langle N\rangle\big)$ pontot választva 2.4.6 szerint M kibővíthető a $\operatorname{conv}\big(\{P\} \cup M\big)$ halmazzá vagy N kibővíthető a $\operatorname{conv}\big(\{P\} \cup N\big)$ halmazzá úgy, hogy továbbra is két diszjunkt konvex halmazt kapjunk. E lépés során az egyik halmaz dimenziója eggyel nőtt, ezért ilyen kibővítések véges egymásutánjával előbb-utóbb egyikük d-dimenziós lesz. □

2.4.8. Definíció (Támaszhipersík, támaszféltér). Legyen $S \subseteq X$ tetszőleges ponthalmaz. Egy $H \subset X$ hipersíkot az S halmaz támaszhipersíkjának mondunk, ha S része az egyik H szerinti zárt féltérnek, és nincs olyan ennél a féltérnél valódi módon szűkebb zárt féltér, amely S-et tartalmazza. Az S halmaz támaszfélterének mondjuk a H szerinti zárt félterek közül az S-et tartalmazót (illetve mindkettőt, ha $S \subseteq H$).
Például ha S része az egyik H szerinti zárt féltérnek és ugyanakkor $H \cap \cap \overline{S} \neq \emptyset$, akkor H szükségképpen támaszhipersík. Lehetséges azonban még

konvex halmazok esetében is, hogy egy támaszhipersík nem tartalmazza a halmaz egyetlen határpontját sem, l. pl. a 2.3.8. Állítást követő megjegyzésben szereplő K halmazt és az x-tengelyt mint K támaszegyenesét.
Az S halmaz támaszhipersíkjait zéróhalmazként előállító $s \in X^\bullet$ affin formákat nyilván az a tulajdonság jellemzi, hogy az $s(S)$ halmaz része a számegyenes pozitív vagy negatív zárt félegyenesének, és $0 \in \overline{s(S)}$.

2.4.9. Tétel. *Konvex halmaz bármely határpontjához található olyan támaszhipersík, amely ezt a pontot tartalmazza.*

Bizonyítás: Legyen $K \subset X$ konvex és $P \in \partial K$. Ha létezik K-t tartalmazó hipersík, akkor az támaszhipersík is. Ezért feltehető, hogy $\dim K = d$. Mivel ekkor $P \notin \operatorname{relint} K$, alkalmazhatjuk a 2.4.7. Tételt a K és az $L = \{P\}$ halmazokra. Bármely elválasztó hipersík egyúttal P-n átmenő támaszhipersík. □

2.4.10. Állítás. *Ha K konvex halmaz és $H \cap \operatorname{relint} K \neq \emptyset$ teljesül K-nak valamely H támaszhipersíkjára, akkor $K \subseteq H$.*

Bizonyítás: $\dim K = d$ esetén $H \cap \operatorname{relint} K \neq \emptyset$ lehetetlen, hiszen ilyenkor $\operatorname{relint} K = \operatorname{int} K$ nyílt. Ha pedig $\dim K < d$, térjünk át a $\langle K \rangle$ affin altérre és a $\langle K \rangle$-beli $H \cap \langle K \rangle$ támaszhipersíkra. □

2.4.11. Állítás. *Bármely konvex zárt halmaz azonos a támaszféltereinek a metszetével.*

Bizonyítás: Jelölje L a K konvex zárt halmaz támaszféltereinek a metszetét. A $K \subseteq L$ tartalmazás nyilvánvaló. Megfordítva, ha $A \in X - K$, akkor a 2.4.5. Következményt alkalmazva található olyan $s \in X^\bullet$ affin forma, hogy $s(A) < 0$ és minden $B \in K$-ra $s(B) \geq 0$. Legyen $c = \inf s(K)$, ekkor az $s'(P) = s(P) - c \ \ (P \in X)$ képlettel adott affin forma által definiált $\{P \in X : s'(P) \geq 0\}$ támaszféltér nem tartalmazza A-t, így $A \notin L$. Tehát $L \subseteq K$ is érvényes. □

2.5. Határpontok

2.5.1. Definíció (Határpont rendje, csúcs, lap, hiperlap). Legyen $A \in \partial K$, ahol $K \subset X$ konvex halmaz és $\dim K = d$. Az A határpont rendjén az $r(A) = \dim Y$ számot értjük, ahol Y a K halmaz A-t tartalmazó összes támaszhipersíkjának a metszeteként előálló affin altér. Bármely $A \in \partial K$-ra $0 \leq r(A) \leq d - 1$.
Jegyezzük itt meg, hogy a határpont rendjének fenti definíciója a $\dim K < d$ esetben is értelemmel bír, és K relatív határpontjaira vonatkoztatva ugyanezt a számot eredményezi, K relatív belső pontjaira pedig $\dim K$-t.

Az A pontot a K konvex halmaz csúcsának nevezzük, ha $r(A) = 0$. Az $L \subseteq \subseteq K$ halmazt K lapjának nevezzük, ha $L = \emptyset$, $L = K$, vagy $L = H \cap K$, ahol H a K egy támaszhipersíkja. Az $\emptyset$-tól és K-tól különböző lapokat K valódi lapjainak hívjuk, ezek dimenziója d-nél kisebb szám. A $(d-1)$-dimenziós lapokat hiperlapoknak nevezzük.

Nyilván bármely $L \subseteq K$ nemüres lapra $L = \langle L \rangle \cap K$.

2.5.2. Példák

- Egy $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ d-dimenziós szimplex esetében valamely határpont rendje akkor és csak akkor r, ha benne van az A_0, A_1, …, A_d pontok közül $(r+1)$-nek a konvex burkában és nincs benne $(r+1)$-nél kevesebbnek a konvex burkában. A szimplexnek a 2.5.1. Definíció értelmében vett csúcsai tehát éppen a 2.2.2. Definícióbeli szóhasználat szerinti csúcsai.

- Az $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ szimplex valódi lapjai az $[A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}]$ alakú részhalmazok $(0 \le k < d,\ 0 \le i_0 < i_1 < \ldots < i_k \le d)$, amelyek maguk is szimplexek.

- Ha $A \in \partial K$ a K konvex halmaz csúcsa, akkor $\{A\}$ lapja K-nak. (Indoklás: $r(A) = 0$ miatt léteznek olyan s_1, …, s_d lineárisan független affin formák, melyekre $s_i(A) = 0$ és $s_i(K) \ge 0$ minden $i = 1, \ldots d$-re; ekkor az $s = s_1 + \ldots + s_d$ affin formával $\mathcal{Z}(s)$ támaszhipersík és $\mathcal{Z}(s) \cap K = \{A\}$. Ha ugyanis valamely $B \in K$-ra $s(B) = 0$ teljesül, akkor szükségképpen minden i-re $s_i(B) = 0$, viszont $r(A) = 0$ miatt $\bigcap_{i=1}^{d} \mathcal{Z}(s_i) = \{A\}$ és így $B = A$.) Az egyelemű lapok viszont nem feltétlenül csúcsok: például egy ellipszoid minden valódi lapja egypontú.

2.5.3. Állítás. *Ha $K \subseteq X$ d-dimenziós konvex zárt halmaz, akkor ∂K egyenlő a K valódi lapjainak egyesítésével.*

Bizonyítás: Rögtön adódik a 2.4.9. Tételből. □

2.5.4. Állítás. *Ha L_1 és L_2 a $K \subseteq X$ konvex halmaz két különböző lapja, akkor* $\operatorname{relint} L_1 \cap \operatorname{relint} L_2 = \emptyset$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy L_1 és L_2 valódi lapok; legyen $i = 1{,}2$-re $L_i = H_i \cap \cap K$, ahol H_i támaszhipersík, legyen továbbá F_i a H_i-hez tartozó támaszféltér. Tegyük fel, hogy $A \in \operatorname{relint} L_1 \cap \operatorname{relint} L_2$. Ekkor $L_1 \subset K \subseteq F_2$ és $A \in \in H_2 = \partial F_2$. Ezért 2.4.10-re hivatkozva $A \in \operatorname{relint} L_1$ csak úgy lehetséges, ha $L_1 \subseteq H_2$. Hasonló módon $L_2 \subseteq H_1$ is következik. Ekkor viszont $L_1 = H_1 \cap \cap H_2 \cap K = L_2$. □

2.5.5. Tétel. *Bármely konvex halmaz csúcsainak a halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás: Legyen $A \in \partial K$ a $K \subset X$ d-dimenziós konvex halmaz egy csúcsa. Tekintsük a $C(A) = \{s \in X^\bullet : s(A) = 0, s(K) \geq 0\}$ halmazt a $(d+1)$-dimenziós $X^\bullet$ vektortérben. Nyilván $C(A)$ konvex kúp, és mivel A csúcs, a 2.5.2-beli harmadik példa szerinti okoskodással $\dim C(A) = d$.

Az $L : X^\bullet \to V^*$ linearizáló leképezés magja a konstans affin formákból áll. Emiatt $(\operatorname{Ker} L) \cap \langle C(A) \rangle = \{\mathbf{0}\}$, és L a $C(A)$ halmazt injektíven képezi a d-dimenziós V^* vektortérbe. Így az $L(C(A))$ képhalmaz szintén d-dimenziós konvex halmaz.

Elegendő megmutatni, hogy a K halmaz két különböző A és A' csúcsára az $L(C(A))$ és az $L(C(A'))$ halmaz belseje diszjunkt, ugyanis megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nyílt halmaz nem fér el a V^* térben. (Ez utóbbihoz annyit elegendő tudni V^*-ról, hogy szeparábilis, azaz létezik benne megszámlálható sűrű ponthalmaz. Ez valóban így van a $V^* \cong \mathbf{R}^d$ térben.) Tegyük fel, hogy $s \in C(A)$, $s' \in C(A')$ és $L(s) = L(s')$, azaz $s - s' \in \operatorname{Ker} L$. Ekkor $0 = s(A) \leq s(A')$ és $0 = s'(A') \leq s'(A)$ miatt $s - s'$ csak úgy lehet konstans, hogy $s(A') = s'(A) = 0$ is fennáll. Ekkor viszont s és s' nem relatív belső pontja $C(A)$-nak, illetve $C(A')$-nek, és így L-képeik sem belső pontok. □

2.5.6. Definíció (Extremális pont). A $P \in K$ pontot a K konvex halmaz extremális pontjának nevezzük, ha a $K - \{P\}$ halmaz konvex. (Ez azzal egyenértékű, hogy P nem áll elő semmilyen K-ban fekvő végpontú szakasz felezőpontjaként, vagy akár csak relatív belső pontjaként.) A K konvex halmaz extremális pontjainak halmazát $\mathcal{E}(K)$-val jelöljük. Nyilván $\dim K > 0$ esetén $\mathcal{E}(K) \subseteq \operatorname{rel}\partial K$.

2.5.7. Példák

- Szakasz extremális pontjai a végpontok.
- Ha A a K konvex halmaz csúcsa, akkor $A \in \mathcal{E}(K)$.
- Egy ellipszoidtest bármely relatív határpontja extremális pont.
- Ha egy konvex zárt halmaz tartalmaz egyenest, akkor könnyen látható módon nincs extremális pontja. (Érvényes a megfordítás is, de nehezebb bizonyítani: ha a K nemüres konvex zárt halmazra $\mathcal{E}(K) = \emptyset$, akkor van K-ban fekvő egyenes.)
- Az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok B_n halmazának (l. 2.1.3.) extremális pontjai az $n \times n$-es permutációmátrixok.

2.5.8. Lemma. *Legyen $K \subseteq X$ konvex.*

(1) *Ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor $Y \cap \mathcal{E}(K) \subseteq \mathcal{E}(Y \cap K)$.*

(2) *Ha H a K konvex halmaz támaszhipersíkja, akkor $H \cap \mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(H \cap \cap K)$.*

Bizonyítás: (1): Ha $P \in Y \cap \mathcal{E}(K)$, akkor $(Y \cap K) - \{P\} = Y \cap (K - \{P\})$ konvex.
(2): Elég az (1)-hez képest fordított irányú tartalmazást belátni. Legyen $P \in \in \mathcal{E}(H \cap K)$. Egyrészt ekkor $P \in H$ és $P \in K$, másrészt ha P előállna valamely $A, B \in K$-val az $[A, B]$ szakasz belső pontjaként, akkor ez csak $A, B \in H$ mellett volna lehetséges, hiszen A és B ugyanabban a H szerinti zárt féltérben vannak. Ekkor viszont P nem lenne a $H \cap K$ halmaz extremális pontja, mert $[A, B] \subseteq H \cap K$. □

2.5.9. Tétel (Krein–Milman-tétel). *Bármely kompakt konvex halmaz azonos az extremális pontjai konvex burkával.*

Bizonyítás: A $K \subseteq X$ kompakt konvex halmaz dimenziója szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $K = \operatorname{conv}(\mathcal{E}(K))$. Legyen $k = \dim K$.
Az állítás nyilvánvaló $k = 0$ esetén. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ és k-nál kisebb dimenziójú kompakt konvex halmazokra az állítás igaz. A 2.3.7. Állításra hivatkozva elég belátni, hogy $\operatorname{rel}\partial K \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{E}(K))$. Legyen $A \in \operatorname{rel}\partial K$ és a 2.4.9. Tétel alapján válasszunk olyan H támaszhipersíkot K számára a $\langle K \rangle$ affin térben, amelyre $A \in H$. Ekkor az indukciós feltevést és 2.5.8.(2)-t használva $A \in H \cap K = \operatorname{conv}(\mathcal{E}(H \cap K)) = \operatorname{conv}(H \cap \mathcal{E}(K)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{E}(K))$. □

2.5.10. Állítás. *Legyen $\alpha K + \beta L$ a K és L konvex halmazok tetszőleges Minkowski-kombinációja. Ekkor $\mathcal{E}(\alpha K + \beta L) \subseteq \alpha\mathcal{E}(K) + \beta\mathcal{E}(L)$.*

Bizonyítás: Legyen $C \in \mathcal{E}(\alpha K + \beta L)$, ekkor $C = \alpha A + \beta B$ alkalmas $A \in K$, $B \in L$ pontokkal. Állítjuk, hogy $A \in \mathcal{E}(K)$ és $B \in \mathcal{E}(L)$. Ha például A nem volna K-nak extremális pontja, akkor létezne olyan $S \subseteq K$ szakasz, amelyre $A \in \operatorname{relint} S$. Ekkor $\alpha S + \beta\{B\} \subseteq \alpha K + \beta L$ olyan szakasz volna, amelynek C relatív belső pontja, ami ellentmond annak, hogy C extremális pont az $\alpha K + \beta L$ halmazban. Ugyanígy látható be, hogy $B \in \mathcal{E}(L)$. □

3. Konvex poliéderek és politópok

Olyan ponthalmazokat vizsgálunk, amelyek véges sok lineáris egyenlőtlenséggel vannak megadva valamely valós affin térben. Ezek a halmazok egyrészt az egyenlőtlenség-rendszerekkel kapcsolatos alkalmazások szempontjából fontosak, másrészt – elsősorban kombinatorikai szerkezetük folytán – a matematika legtöbbet vizsgált tárgyai közé tartoznak. Célunk ennek a kombinatorikai

szerkezetnek a tisztázása. Az alábbiakban (X, V, Φ) véges dimenziós valós affin teret jelöl, $d = \dim X$.

3.1. Konvex poliéderek és lapjaik

3.1.1. Definíció (Konvex poliéder). A $P \subseteq X$ halmazt konvex poliédernek nevezzük, ha előállítható véges sok X-beli zárt féltér metszeteként.

Egy $P \subseteq X$ részhalmaz nyilván akkor és csak akkor konvex poliéder, ha léteznek s_1, s_2, …, $s_n \in X^\bullet$ affin formák úgy, hogy $P = \bigcap_{i=1}^n \{A \in X : s_i(A) \geq 0\}$.

3.1.2. Példák

- Nyilván $\emptyset$, az egész X (mint félterek üres rendszerének a metszete), és bármely X-beli affin altér konvex poliéder.
- Bármely szimplex konvex poliéder.
- Konvex poliéderek tetszőleges véges rendszerének a metszete konvex poliéder.
- Az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok B_n halmaza konvex poliéder az $\mathbf{R}^{n \times n}$ térben, hiszen véges sok lineáris egyenlet és egyenlőtlenség definiálja.
- Konvex poliéder bármely lapja szintén konvex poliéder, hiszen a nem valódi lapokra ez nyilvánvaló, egy valódi lap pedig előáll a poliéder és egy affin altér (támaszhipersík) metszeteként.

3.1.3. Állítás. *Legyen $d \geq 1$ és $P \subseteq X$ konvex poliéder, melyre $\operatorname{int} P \neq \emptyset$ (azaz $\dim P = d$). Állítsuk elő a P halmazt X-beli zárt félterek metszeteként $P = \bigcap_{i=1}^n F_i$ alakban úgy, hogy n a legkisebb szám, amelyre ilyen előállítás lehetséges. Legyen $H_i = \partial F_i$. Ekkor:*

(1) *$L_i = H_i \cap P$ a P hiperlapja ($i = 1, \ldots, n$).*

(2) *$\partial P = \bigcup_{i=1}^n L_i$.*

(3) *Ha H olyan támaszhipersíkja P-nek, amely a H_i-k mindegyikétől különbözik, akkor $\dim(H \cap P) < d - 1$.*

(4) *A P halmaz a sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározza az F_1, …, F_n féltereket.*

(5) *Ha P valahogyan előáll véges sok zárt féltér metszeteként, akkor ezek között a félterek között szerepelniük kell az $F_1, \ldots, F_n$ féltereknek.*

Bizonyítás: (1): Rögzített i mellett legyen $Q = \bigcap_{j \neq i} F_j$, ekkor n minimalitása miatt Q szigorúan bővebb P-nél; válasszunk egy $A \in Q - F_i$ pontot. Legyen $B \in \operatorname{int} P$ tetszőleges, ekkor az $[A, B]$ szakasz belseje és így az $[A, B] \cap H_i$ metszéspont is Q belsejéhez tartozik. Emiatt a H_i affin térre vonatkozóan $\operatorname{int}(H_i \cap Q) \neq \emptyset$, azaz $\dim L_i = d - 1$.

(2): Egy A pontra $A \in \partial P = \partial\big(\bigcap_{i=1}^n F_i\big)$ pontosan akkor teljesül, ha $A \in P$ és legalább egy i-re $A \in \partial F_i = H_i$. Emiatt $\partial P = P \cap \big(\bigcup_{i=1}^n H_i\big) = \bigcup_{i=1}^n (P \cap \cap H_i) = \bigcup_{i=1}^n L_i$.

(3): Az $L = H \cap P = H \cap \partial P = \bigcup_{i=1}^n (H \cap L_i)$ előállításban mindegyik $H \cap L_i$ tag dimenziója $H \neq H_i$ miatt $(d-1)$-nél kisebb, így $\dim L < d - 1$.

(4): Az (1) és a (3) állítás miatt az L_i halmazok éppen P hiperlapjai, ezért P őket, és így az F_i féltereket is egyértelműen meghatározza.

(5): Legyen $A \in \operatorname{relint} L_i$. Ekkor $A \in \partial P$ miatt $A \in \partial F$, ahol F a metszetelőállításban szereplő félterek egyike. Ezért $L_i \subseteq \partial F$, ahonnan $F = F_i$ következik. □

3.1.4. Állítás. *Legyen P konvex poliéder és L a P valódi lapja. Ekkor:*

(1) *P-nek létezik olyan hiperlapja, amelynek L lapja.*

(2) *Ha $\dim L = \dim P - 2$, akkor P-nek pontosan két L-et tartalmazó hiperlapja létezik, és ezeknek L a metszete.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $\operatorname{int} P \neq \emptyset$. Legyen $L = H \cap P \subseteq \partial P$ valódi lap, ahol H támaszhipersík. Használjuk a 3.1.3. Állítás jelöléseit: L_i, H_i és F_i $(i = 1, \ldots, n)$ a P hiperlapjai és a hozzájuk tartozó támaszhipersíkok, illetve támaszfélterek. Ekkor $L \subseteq \partial P = \bigcup_{i=1}^n L_i$.

(1): Belátjuk először, hogy L részhalmaza valamelyik L_i-nek. Ha nem így volna, akkor minden i-re válasszunk egy $A_i \in L - L_i = L - H_i$ pontot. Legyen A ezek súlypontja, azaz $A = \frac{1}{n}A_1 + \ldots + \frac{1}{n}A_n$. Ekkor bármelyik i-re $A \notin H_i$, hiszen az A_j pontok mindannyian ugyanabban a H_i szerinti zárt féltérben vannak, és legalább egy közülük (mégpedig A_i) nincs a H_i hipersíkban. Ezért A a P konvex poliéder belső pontja, ami lehetetlen, hiszen $A \in L \subseteq \partial P$.
Végül $L \subseteq L_i$ esetén L lapja is L_i-nek, hiszen vagy $H = H_i$, amikor $L = L_i$, vagy pedig $H \cap H_i$ az L_i támaszhipersíkja a H_i affin térben, és $L = H \cap P = = (H \cap H_i) \cap L_i$.

(2): Először megmutatjuk, hogy L legalább két különböző hiperlapnak lapja. Az (1) állítás alapján választhatunk olyan L_i hiperlapot, amelynek L lapja.

Alkalmazzuk a 3.1.3. Állítást a H_i affin térbeli L_i konvex poliéderre úgy, hogy az $L_i = H_i \cap P = H_i \cap \left(\bigcap_{j\neq i} F_j\right) = \bigcap_{j\neq i}(H_i \cap F_j)$ metszetelőállításból kiválasztjuk a minimális előállítást. Az L_i-beli L hiperlap tehát azonos az $L_i \cap H_j$ halmazzal valamilyen i-től különböző j-re. Így $L \subseteq H_j \cap P = L_j$.
Most belátjuk, hogy L nem lehet kettőnél több hiperlapnak is része. Indirekt módon tegyük fel, hogy L_i, L_j és L_k három különböző hiperlap, amelyek mindannyian tartalmazzák L-et. Tekintsük az F_i, F_j, F_k féltereket, ezek határoló hipersíkjai mindannyian tartalmazzák a $(d-2)$-dimenziós $\langle L\rangle$ affin alteret. Ekkor a három féltér közül valamelyik kettőnek a metszete része a harmadiknak (ez rögtön látható a $\overrightarrow{\langle L\rangle}$ altérrel való faktorizálás után adódó síkban a három félsíkról), ami ellentmond annak, hogy az F_i félterek rendszere minimális.
Tegyük föl végül, hogy az L lap az L_i és L_j különböző hiperlapoknak részhalmaza. Ekkor $\langle L\rangle \subseteq H_i \cap H_j$ és $\dim\langle L\rangle = d-2$, így $H_i \neq H_j$ miatt $\langle L\rangle = H_i \cap H_j$. Ezért $L = \langle L\rangle \cap P = (H_i \cap H_j) \cap P = (H_i \cap P) \cap (H_j \cap P) = = L_i \cap L_j$. □

3.1.5. Következmény. *Bármely konvex poliédernek véges sok lapja van.*

Bizonyítás: Legyen $P \neq \emptyset$ konvex poliéder, $d = \dim P$. Teljes indukciót alkalmazunk d szerint. Ha $d = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $d > 0$ és minden d-nél kisebb dimenziós konvex poliédernek csak véges sok lapja van. A 3.1.3 Állítás alapján P-nek véges sok hiperlapja van, így az indukciós feltevés miatt ezeknek összesen véges sok lapja van. Így a 3.1.4.(1) Állítást alkalmazva következik, hogy P-nek is véges sok lapja van. □

3.1.6. Következmény. *Ha P konvex poliéder, akkor P lapjai tetszőleges rendszerének a metszete szintén lapja P-nek.*

Bizonyítás: Elég véges sok lappal foglalkozni a 3.1.5. Következmény miatt. Legyenek L_1, L_2, …, $L_k \subseteq P$ lapok, feltehetjük, hogy mindannyian valódi lapok és $L = \bigcap_{i=1}^{k} L_i \neq \emptyset$. Legyen $L_i = H_i \cap P$, $H_i = \mathcal{Z}(s_i)$, ahol $s_i \in X^\bullet$ és $s_i(P) \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Ekkor $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$, $H = \mathcal{Z}(s)$ választással H támaszhipersík és $L = H \cap P$. □

3.1.7. Állítás. *Legyen $P \subseteq X$ konvex poliéder.*

(1) *Bármely $L \subseteq \partial P$ valódi lap egyenlő az L-et tartalmazó hiperlapok metszetével, az $\langle L\rangle$ affin altér pedig ezen hiperlapokat tartó támaszhipersíkok metszetével.*

(2) *Bármely $A \in \partial P$ esetén az A-t tartalmazó támaszhipersíkok metszete azonos az A-t tartalmazó hiperlapokat tartó hipersíkok metszetével.*

Bizonyítás: (1): Nyilván elég azt belátni, hogy L előáll bizonyos P-beli hiperlapok metszeteként, és hogy $\langle L\rangle$ előáll bizonyos P-beli hiperlapokhoz tartozó támaszhipersíkok metszeteként.
Legyen $d = \dim P$ és $k = \dim L$, teljes indukciót alkalmazunk a $t = d - k$ különbség („kodimenzió") szerint. Ha $t = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük föl, hogy $t > 1$ és minden konvex poliéderben minden $t-1$ kodimenziós lap esetében igaz az állítás.
A 3.1.4.(1) Állítás szerint L lapja P valamely M hiperlapjának. A $\dim M - \dim L = (d-1) - k = t - 1 > 0$ egyenlőtlenség miatt L valódi lapja az M konvex poliédernek, valamint M-re és L-re alkalmazható az indukciós feltevés. Eszerint $L = \bigcap_{i=1}^{s} N_i$, ahol az N_i halmazok M hiperlapjai. Az M hiperlapjai viszont 3.1.4.(2) miatt előállnak P egy-egy hiperlapja és M metszeteként, így $N_i = M \cap L_i$, ahol $L_i \subset P$ hiperlap, $L_i \neq M \quad (i = 1, \ldots, s)$. Ezért $L = \bigcap_{i=1}^{s}(M \cap L_i) = M \cap L_1 \cap \ldots \cap L_s$ mutatja, hogy L előáll P alkalmas hiperlapjainak metszeteként.
Minden i-re $\langle M\rangle$ és $\langle L_i\rangle$ különböző hipersíkok és $\dim N_i = d-2$, ezért $\langle N_i\rangle = \langle M\rangle \cap \langle L_i\rangle$. Az indukciós feltevés miatt $\langle L\rangle = \langle N_1\rangle \cap \ldots \cap \langle N_s\rangle$, így $\langle L\rangle = \big(\langle M\rangle \cap \langle L_1\rangle\big) \cap \ldots \cap \big(\langle M\rangle \cap \langle L_s\rangle\big) = \langle M\rangle \cap \langle L_1\rangle \cap \ldots \cap \langle L_s\rangle$.
(2): Jelölje Y az A-t tartalmazó összes támaszhipersík metszeteként előálló affin alteret, Z pedig jelölje az A-t tartalmazó hiperlapok hipersíkjainak metszetét. Nyilván $Y \subseteq Z$. A fordított irányú tartalmazáshoz tekintsük az $L = Y \cap P$ halmazt, amely a 3.1.6. Következményre hivatkozva lapja P-nek, hiszen az összes olyan $H \cap P$ lap metszetével egyenlő, ahol $A \in H$ és H támaszhipersík. Az (1) állítást felhasználva $L = L_1 \cap \ldots \cap L_s$, ahol az L_i halmazok hiperlapok, továbbá $\langle L\rangle = \bigcap_{i=1}^{s}\langle L_i\rangle$. Ekkor $Z \subseteq \bigcap_{i=1}^{s}\langle L_i\rangle = \langle L\rangle \subseteq Y$. □

3.1.8. Állítás. *Legyen M a P konvex poliéder lapja. Egy $L \subseteq M$ részhalmaz pontosan akkor lapja M-nek, ha P-nek lapja.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $L \neq \emptyset, M$. Ha L lapja P-nek, akkor $L = H \cap P$ a P alkalmas H támaszhipersíkjával; ekkor vagy $\langle M\rangle \subseteq H$, amikor $L = M$, vagy pedig $H \cap \langle M\rangle$ az M támaszhipersíkja és $L = L \cap M = \big(H \cap \langle M\rangle\big) \cap M$ mutatja, hogy L az M lapja.
Megfordítva, tegyük fel, hogy L lapja M-nek. A $t = \dim P - \dim M$ kodimenzió szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy L lapja P-nek is.
Legyen először $t = 1$, azaz M hiperlap. A 3.1.7(1) Állítás szerint L előáll M bizonyos hiperlapjai metszeteként, ezek a hiperlapok pedig a 3.1.4(2) Állítás miatt P két-két hiperlapja metszeteként állnak elő. Így L előáll P bizonyos hiperlapjai metszeteként, a 3.1.6. Következmény szerint tehát lapja P-nek.
Tegyük fel most, hogy $t > 1$ és hogy az állítás t-nél kisebb kodimenzió esetében igaz, azaz bármely Q konvex poliéder bármely t-nél kisebb kodimenziós lapjának bármely lapja egyúttal Q-nak is lapja. Válasszunk a 3.1.4(1) Állítás alapján olyan N hiperlapot P-ben, melynek M lapja. Ekkor $\dim N -$

$-\dim M = t-1$, így az indukciós feltevés alkalmazható $Q = N$ választással, ahonnan következik, hogy L lapja N-nek. Ekkor viszont újra a $t = 1$ eset alkalmazásával L a P-nek is lapja. □

3.1.9. Állítás. *Legyen $P \subset X$ konvex poliéder,* $\dim P = d$ *és $A \in \partial P$. Ekkor:*

(1) *$r(A) = k$ esetén létezik olyan $L \subset P$ lap, melyre $A \in \operatorname{relint} L$ és* $\dim L = k$.

(2) *A pontosan akkor extremális pont P-ben, ha csúcs.*

Bizonyítás: (1): Legyen L a legszűkebb olyan lapja P-nek, amely tartalmazza A-t, azaz L az A pontot tartalmazó összes P-beli lap metszete. 3.1.7.(1) miatt L egyenlő az A-t tartalmazó P-beli hiperlapok metszetével, 3.1.7.(1) és 3.1.7.(2) miatt pedig $k = \dim L$. Állítjuk, hogy $A \in \operatorname{relint} L$. Ha $A \in \operatorname{rel}\partial L$ volna, akkor L egy valódi lapjához tartozna, amely 3.1.8 miatt P-nek is lapja. Ezért 3.1.7.(1) miatt A-t P-nek olyan hiperlapja is tartalmazná, amelynek L nem része; ez ellentmond L minimalitásának.

(2): Bármely konvex halmazban a csúcsok extremális pontok, így csak a megfordítást kell belátnunk. Ha A nem csúcs, akkor (1) miatt valamely legalább egydimenziós lap relatív belső pontja. Ekkor A nyilvánvalóan nem lehet extremális pont. □

3.1.10. Következmény. *Bármely konvex poliéderben a nemüres lapok relatív belsejei partíciót alkotnak.*

Bizonyítás: Bármely konvex halmazban a lapok relatív belsejei páronként diszjunktak, konvex poliéder esetében pedig 3.1.9.(1) következtében lefedik az egész poliédert. □

3.1.11. Következmény. *Bármely korlátos konvex poliéder a csúcsai halmazának a konvex burkával egyenlő.*

Bizonyítás: Ha P korlátos konvex poliéder, akkor P kompakt, ezért a Krein–Milman-tétel miatt az extremális pontjai konvex burka. Így 3.1.9.(2)-ből adódik az állítás. □

3.1.12. Definíció (Lapháló). Tetszőleges P konvex poliéderre jelölje $\mathcal{L}(P)$ a P lapjai halmazát. Jelölje továbbá $L, M \in \mathcal{L}(P)$-re $L \leq M$ (illetve $L < M$), ha L lapja az M konvex poliédernek (illetve, ha emellett még $L \neq M$ is fennáll). A 3.1.8. Állítás következtében ez a $\leq$ reláció tranzitív, ezen kívül nyilván reflexív és antiszimmetrikus, így részben rendezést létesít a $\mathcal{L}(P)$ halmazon. A $\leq$ reláció szerint részben rendezett $\mathcal{L}(P)$ halmazt P laphálójának nevezzük. (Könnyű meggondolni, hogy nemüres P esetében $\mathcal{L}(P)$ valóban háló a szó algebrai értelmében.)

3.2. Politópok

3.2.1. Definíció (Politóp). Az X valós affin térben véges sok pont konvex burkát politópnak nevezzük.
Például az üres halmaz politóp, és bármely szimplex politóp. A 2-dimenziós politópokat konvex sokszögeknek nevezzük, a 3-dimenziósak pedig azok az idomok, amelyeket az elemi térgeometria hagyományos szóhasználatában konvex poliédernek szokás nevezni.
Miután kompakt halmazok konvex burka – és így speciálisan véges halmazok konvex burka is – kompakt, a politópok kompakt halmazok. Bármely két politóp egyesítésének a konvex burka szintén politóp.

3.2.2. Tétel. *Legyen $P = \operatorname{conv}\big(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}\big) \subseteq X$ politóp. Ekkor P konvex poliéder, amelynek a csúcsai az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok közül kerülnek ki.*
Bizonyítás: Legyen $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Állítjuk, hogy P bármely H támaszhipersíkjára $H \cap P = \operatorname{conv}(H \cap V)$. Legyen ugyanis $s \in X^\bullet$ olyan affin forma, hogy $H = \mathcal{Z}(s)$ és $s(P) \geq 0$. Ekkor P kompaktsága miatt $0 \in s(P)$ és $H \cap P = s^{-1}(0)$. Az s függvény, affin leképezés lévén, bármely konvex kombinációt a képpontok ugyanolyan együtthatós konvex kombinációjába képez. Ezért ha egy $A \in H \cap P$ pontot V-beli pontok konvex kombinációjaként állítunk elő, akkor $s(A) = 0$ miatt ebben a kombinációban H-hoz nem tartozó pontok csak zérus együtthatóval szerepelhetnek. Így $A \in \operatorname{conv}(H \cap V)$. Speciálisan, ha A csúcsa P-nek, akkor, miután $H \cap P = \{A\}$, szükségképpen $A \in V$.
A fentiekből következik, hogy P-nek véges sok lapja van, hiszen $H \cap V$ alakú halmazból csak véges sok van. Válasszunk P mindegyik hiperlapjához egy-egy őt P-ből kimetsző támaszhiperhipersíkot. Megmutatjuk, hogy P előáll az ezekhez tartozó támaszfélterek metszeteként, így P konvex poliéder.
Feltehetjük, hogy $\dim P = d$, azaz $\operatorname{int} P \neq \emptyset$. Legyen $A \in X - P$ tetszőleges pont. Válasszunk olyan $B \in \operatorname{int} P$ pontot, hogy az $\langle A, B\rangle$ egyenes ne legyen része semelyik olyan $\langle A, L\rangle$ affin altérnek, ahol L a P legfeljebb $(d-2)$-dimenziós lapja. Ilyen B pont létezik, mert véges sok legfeljebb $(d-1)$-dimenziós affin altér egyesítése nem fedheti le az $\operatorname{int} P$ nemüres nyílt halmazt. Az $[A, B]$ szakasz metszi ∂P-t egy C pontban. A B pont megválasztása folytán P-nek a C-t tartalmazó lapja csak hiperlap lehet, és az ehhez tartozó támaszféltér nem tartalmazza az A pontot. □

3.2.3. Következmény. *Egy X-beli részhalmaz pontosan akkor politóp, ha korlátos konvex poliéder.*
Bizonyítás: Azonnal adódik 3.1.5, 3.1.11 és 3.2.2 összevetésével. □

3.2.4. Következmény. *Ha két konvex poliéder metszete korlátos, akkor politóp. Speciálisan, bármely két politóp közös része politóp.* □

Megjegyzés. Politópok esetében tehát kétféle, egymáshoz képest „duális" származtatási eljárás is alkalmazható: egyrészt a definíció szerinti, véges pontrendszer konvex burkaként történő előállítás, másrészt a konvex poliéderek esetén (általánosabb körben) érvényes, véges sok féltér metszeteként történő előállítás. Ennek a dualitásnak a pontos matematikai jelentését a 3.4. szakaszban járjuk majd körül.

3.2.5. Példák. Politópok néhány konkrét típusát vesszük sorra.

- Affinitás erejéig egyetlen nulla-, illetve egydimenziós politóp létezik, a pont, illetve a (nemelfajuló) szakasz.
- Bármely $d \geq 0$-ra az $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ szimplex, ahol $A_0, A_1, \ldots, A_d \in X$ tetszőleges független pontok, d-dimenziós politóp.
- Parallelotóp: Legyenek $A_0, A_1, \ldots, A_d \in X$ független pontok. Az ezekre a pontokra épített parallelotópnak a

$$P = \Phi_{A_0}^{-1}\Big(\Big\{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \,:\, \lambda_i \in [0,1] \;\; (i = 1, \ldots, d)\Big\}\Big)$$

  halmazt nevezzük. P nyilván d-dimenziós politóp és $\mathbf{R}^d$ egységkockájának affin izomorfizmusnál származó képe. P csúcsai az $A_I = \Phi_{A_0}^{-1}(\mathbf{v}_I)$ pontok, ahol $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$ tetszőleges részhalmaz és $\mathbf{v}_I = \sum_{i \in I} \overrightarrow{A_0A_i}$. Így tehát $P = \operatorname{conv}\big(\{A_I : I \subseteq \{1, \ldots, d\}\big)$. P nemüres lapjai maguk is parallelotópok, mégpedig $P_{I,J} = \operatorname{conv}\big(\{A_K : I \subseteq K \subseteq J\}\big)$ alakúak, ahol $I \subseteq J \subseteq \{1,2, \ldots, d\}$ indexhalmazok. (Például $P = P_{\emptyset,\{1,\ldots,d\}}$, $\{A_I\} = P_{I,I}$.) Nyilván $P_{I,J} \leq P_{I',J'}$ pontosan akkor teljesül, ha $I \supseteq I'$ és $J \subseteq J'$.

  A két-, illetve háromdimenziós parallelotópokat hagyományosan parallelogrammáknak, illetve parallelepipedonoknak nevezzük.

- Keresztpolitóp: Legyenek $O, A_1, \ldots, A_d \in X$ független pontok. Az ezek által generált keresztpolitópon a $Q = \operatorname{conv}\big(\{A_1, A_1{}', A_2, A_2{}', \ldots, A_d, A_d{}'\}\big)$ politópot értjük, ahol $A_i{}'$ az A_i pontnak az O pontra vonatkozó középpontos tükörképe ($i = 1,2, \ldots, d$). A keresztpolitóp valódi lapjai mind szimplexek, mégpedig azok, amelyek előállnak $Q_{I,J} = [A_i \; (i \in I), A_j{}' \; (j \in J)]$ alakban, ahol $I, J \subseteq \{1,2, \ldots, d\}$ diszjunkt indexhalmazok és $I \cup J \neq \emptyset$. Nyilván $Q_{I,J} \leq Q_{I',J'}$ pontosan akkor teljesül, ha $I \subseteq I'$ és $J \subseteq J'$.

A kétdimenziós keresztpolitópok parallelogrammák, a háromdimenziós keresztpolitópok hagyományos neve pedig oktaéder.

- Gúla: Legyen $Q \subset X$ tetszőleges $(d-1)$-dimenziós politóp és $C \in X - \langle Q \rangle$ tetszőleges pont. A Q alapú, C csúcsú gúlán a $P = \operatorname{conv}\big(Q \cup \{C\}\big)$ d-dimenziós politópot értjük. A Q alapú, C csúcsú gúlára a $[Q, C]$ jelölést is alkalmazhatjuk. $P = [Q, C]$ lapjai gyanánt egyrészt Q lapjai, másrészt a Q lapjaira mint alapra állított C csúcsú gúlák és $\{C\}$ szolgálnak. Bármely legalább 1-dimenziós szimplex egyúttal gúla is, amelynek alapjául bármelyik hiperlap, csúcsául a fennmaradó csúcs választható. Emiatt a szimplexek előállíthatók az egypontú politópból a gúlaképzés iterálásával.

- Hasáb: Legyen $Q \subset X$ tetszőleges $(d-1)$-dimenziós politóp és legyen $f : X \to X$ eltolás olyan vektorral, amely nem fekszik a $\overrightarrow{\langle Q \rangle}$ altérben. A $P = \operatorname{conv}\big(Q \cup f(Q)\big)$ politópot Q alapú d-dimenziós hasábnak nevezzük. A d-dimenziós parallelotópok ($d \geq 1$ esetén) pontosan a $d-1$-dimenziós parallelotópokra állított hasábok, ezért a parallelotópok felfoghatók iterált hasábokként. A Q alapú d-dimenziós hasáb lapjai egyrészt Q és $f(Q)$ lapjai, másrészt a Q valódi lapjaira állított hasábok.

- Kettős gúla: Legyen $Q \subset X$ tetszőleges $(d-1)$-dimenziós politóp és $A, B \in X$ két különböző pont úgy, hogy $\operatorname{relint} Q \cap \operatorname{relint} [A, B]$ egyetlen pontból álljon. A $P = \operatorname{conv}\big(Q \cup [A, B]\big)$ politópot Q-ra állított d-dimenziós kettős gúlának nevezzük. P nemüres lapjai egyrészt Q valódi lapjai, másrészt az ezekre állított A csúcsú és B csúcsú gúlák, valamint $\{A\}$ és $\{B\}$. Egy d-dimenziós keresztpolitóp olyan kettős gúla, amely egy $(d-1)$-dimenziós keresztpolitópra van állítva, ezért a keresztpolitópok felfoghatók iterált kettős gúlákként.

- A duplán sztochasztikus mátrixok korlátos halmazt alkotnak az $\mathbf{R}^{n \times n}$ térben, így a 3.2.3. Következmény alapján a B_n konvex poliéder politóp, amelynek a csúcsai az $n \times n$-es permutációmátrixok. B_n-et Birkhoff-politópnak nevezik.

További érdekes példák nyerhetők a következő állítás alkalmazásával.

3.2.6. Állítás. *Két politóp tetszőleges Minkowski-kombinációja is politóp.*

Bizonyítás: Bármely politópnak véges sok csúcsa, így 3.1.9.(2) miatt véges sok extremális pontja van. A Minkowski-kombináció extremális pontjai a különkülön vett extremális pontok kombinációi közül kerülnek ki, ezért ezekből is csak véges sok van. Két kompakt halmaz tetszőleges Minkowski-kombinációja

is kompakt, hiszen egy kompakt halmaznak (a két halmaz direkt szorzatának) folytonos leképezésnél (a rögzített együtthatójú kombináció képzésénél) származó képe. A két politóp Minkowski-kombinációja tehát olyan kompakt konvex halmaz, amelynek véges sok extremális pontja van, ezért a Krein–Milman-tétel alapján politóp. □

A 3.2.5-beli példák közül a hasábok előállnak mint egy eggyel alacsonyabb dimenziójú politóp (az alap) és egy szakasz Minkowski-összege. A d-dimenziós parallelotópok ($d \geq 1$ esetén) pontosan a d darab független irányú szakasz Minkowski-összegeként előálló politópok.

Politópok felhasználásával halmazok korlátosságát az alábbi módon jellemezhetjük.

3.2.7. Állítás. *Egy X-beli részhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha belefoglalható egy alkalmas X-beli politópba.*

Bizonyítás: Vegyünk fel egy $\mathbf{x} : X \to \mathbf{R}^d$ affin koordinátarendszert. Ha $M \subseteq \subseteq X$ korlátos, akkor létezik olyan c pozitív valós szám, hogy minden $A \in M$-re és $i = 1, \ldots, d$-re $|\mathbf{x}(A)_i| \leq c$, azaz az $\mathbf{x}(A)$ halmaz benne fekszik abban az $\mathbf{R}^d$-beli $2c$ élű K kockában, amelyet a $-c \leq x_i \leq c$ egyenlőtlenségek definiálnak. Ekkor $P = \mathbf{x}^{-1}(K)$ parallelotóp X-ben, és P magában foglalja az M halmazt. □

Most rátérünk a politópok lapjai által alkotott kombinatorikai rendszer vizsgálatára.

3.2.8. Állítás. *Ha P politóp és $\dim P = d$, akkor a P lapjai alkotta $\mathcal{L}(P)$ részben rendezett halmazban bármely maximális rendezett lánc hossza $d+2$.*

Bizonyítás: Legyen $L_{-1} < L_0 < \ldots < L_k$ a P lapjainak maximális lánca. A maximalitás következtében nyilvánvalóan $L_{-1} = \emptyset$ és $L_k = P$. Az L_0 lapnak 3.1.11 miatt van csúcsa, így, ha L_0 maga nem csúcs volna, a lánc bővíthető volna L_0 egy csúcsával. Tehát $\dim L_0 = 0$. A 3.1.7.(1) Állítást az $L_{i-1} < L_i$ párra alkalmazva adódik, hogy minden $i = 1, \ldots, k$-ra L_{i-1} az L_i-nek hiperlapja, hiszen különben a lánc bővíthető volna L_i-nek egy L_{i-1}-et tartalmazó hiperlapjával. Ezért $\dim L_i = i \quad (i = 0, \ldots, k)$ és így $k = d$. □

3.2.9. Definíció (Kombinatorikai szerkezet, α_k). Egy P politóp esetében az $\mathcal{L}(P)$ laphálót szokás P kombinatorikai szerkezetének nevezni. Azt mondjuk, hogy P és Q azonos kombinatorikai szerkezetű (vagy kombinatorikailag ekvivalens) politópok, ha $\mathcal{L}(P)$ és $\mathcal{L}(Q)$ izomorf részben rendezett halmazok, azaz létezik közöttük rendezéstartó bijekció. P-t és Q-t duális kombinatorikai szerkezetű politópoknak mondjuk, ha $\mathcal{L}(P)$ és $\mathcal{L}(Q)$ duálisan izomorfak, azaz létezik közöttük rendezésfordító bijekció.

Például ha a Q politóp P-nek valamely affin izomorfizmusnál származó képe (azaz P és Q affin-ekvivalens), akkor P és Q kombinatorikailag ekvivalens.

Tetszőleges P politóp és $k \geq 0$ egész szám esetén jelölje $\alpha_k = \alpha_k(P)$ a P politóp k-dimenziós lapjai számát. A 3.2.8. Állítás következtében P lapjainak dimenziója $\mathcal{L}(P)$-ből felismerhető, ezért kombinatorikailag ekvivalens P és Q esetében minden k-ra $\alpha_k(P) = \alpha_k(Q)$. Hasonlóképpen, ha P és Q duális kombinatorikai szerkezetű d-dimenziós politópok, akkor minden $k \leq (d-1)$-re $\alpha_k(P) = \alpha_{d-k-1}(Q)$.

Például bármely konvex sokszög esetében $\alpha_0 = \alpha_1$ a sokszög oldalszámával egyenlő; két konvex sokszög pontosan akkor kombinatorikailag ekvivalens, ha az oldalszámuk egyenlő. (Történetesen ilyenkor duális kombinatorikai szerkezetűek is.)

3.2.10. Példák. Áttekintjük néhány politóptípus kombinatorikai szerkezetét.

- Bármely két egyenlő dimenziójú szimplex azonos kombinatorikai szerkezetű (hiszen affin-ekvivalens), és duális kombinatorikai szerkezetű is. A d-dimenziós szimplex laphálója egy $(d+1)$-elemű halmaz részhalmazhálójával izomorf, és $\alpha_k = \binom{d+1}{k+1}$.

- Bármely két egyenlő dimenziójú parallelotóp, illetve bármely két egyenlő dimenziójú keresztpolitóp kombinatorikusan ekvivalens (sőt, affin-ekvivalens). Egy d-dimenziós parallelotóp és egy d-dimenziós keresztpolitóp duális kombinatorikai szerkezetű. Ezt a 3.2.5-beli P paralellotóp és Q keresztpolitóp esetében a valódi lapok közötti $P_{I,J} \mapsto Q_{I,\{1,2,\ldots,d\}-J}$ megfeleltetés mutatja.

  A P parallelotóp esetében $\alpha_k(P) = 2^{d-k} \cdot \binom{d}{k}$, a Q keresztpolitópra pedig ($k < d$ esetén) $\alpha_k(Q) = \alpha_{d-k-1}(P) = 2^{k+1} \cdot \binom{d}{k+1}$.

- Kombinatorikailag ekvivalens alapú gúlák egymással is kombinatorikailag ekvivalensek. Ha P egy Q alapú gúla, akkor $\alpha_0(P) = 1 + \alpha_0(Q)$ és $k \geq 1$-re $\alpha_k(P) = \alpha_k(Q) + \alpha_{k-1}(Q)$.

- Kombinatorikailag ekvivalens alapú tetszőleges hasábok is kombinatorikailag ekvivalensek. Ha P egy Q alapú hasáb, akkor $\alpha_0(P) = 2\alpha_0(Q)$ és $k \geq 1$-re $\alpha_k(P) = 2\alpha_k(Q) + \alpha_{k-1}(Q)$.

- Kombinatorikailag ekvivalens politópokra állított kettős gúlák egymással is kombinatorikailag ekvivalensek. Ha P a Q-ra állított d-dimenziós kettős gúla, akkor $\alpha_0(P) = 2 + \alpha_0(Q)$, $1 \leq k \leq d-2$-re $\alpha_k(P) = \alpha_k(Q) + 2\alpha_{k-1}(Q)$, és $\alpha_{d-1}(P) = 2\alpha_{d-2}(Q)$.

- Ha Q és R duális kombinatorikai szerkezetű politópok, akkor a Q alapú hasáb és az R-re állított kettős gúla is duális kombinatorikai szerkezetűek. (Ennek az észrevételnek az iterálásával újra megkapjuk a korábban már megállapított dualitási viszonyt a parallelotópok és a keresztpolitópok között.)

3.3. Euler tétele

Az alábbi tétel a politópok kombinatorikájának legalapvetőbb összefüggése. A háromdimenziós politópokra vonatkozó esetét az elemi térgeometriában Euler-féle poliédertételnek szokás nevezni. Az egy-, illetve kétdimenziós esetben a tétel annyit állít, hogy bármely szakasznak két végpontja van, illetve hogy bármely konvex sokszögben a csúcsok száma egyenlő az oldalak számával.

3.3.1. Tétel (Euler-formula). *Bármely nemüres politópra érvényes a*

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\alpha_k = 1$$

egyenlőség.

Bizonyítás: A tételben szereplő előjeles összeg nyilván egyenlő a

$$\sum_{\emptyset\neq L\leq P}(-1)^{\dim L}$$

összeggel; erről az utóbbiról látjuk be, hogy 1-gyel egyenlő.

Legyen $P \subseteq X$ tetszőleges d-dimenziós politóp. Teljes indukciót alkalmazunk d szerint; $d = 0$ esetén (sőt, $d \leq 2$-re is) tudjuk, hogy az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $d > 0$ és bármely d-nél alacsonyabb dimenziójú politópra a tétel állítása igaz.

Válasszunk olyan $s \in X^\bullet$ affin formát, amely P csúcsain csupa különböző értéket vesz föl. Ilyen affin forma létezik, mert $A, B \in X$ és $A \neq B$ esetén az A-n és B-n egyenlő értéket felvevő affin formák lineáris hipersíkot alkotnak az $X^\bullet$ vektortérben, és s-nek csak véges sok ilyen hipersíkot kell elkerülnie. Az $s^{-1}(a) \subset X$ $(a \in \mathbf{R})$ halmazok párhuzamos affin hipersíkok, amelyek, ha van közös pontjuk P belsejével, $(d-1)$-dimenziós politópot metszenek ki P-ből. Ilyen hipersíkok egy véges rendszerével „szeleteljük föl" P-t és annak lapjait.

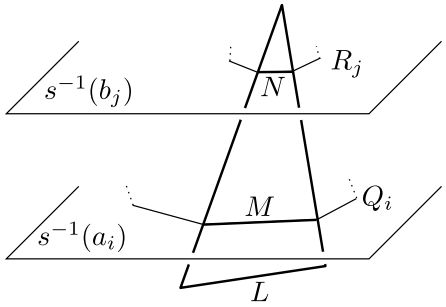
Legyen $n = \alpha_0$ és legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ az s affin forma értékei P csúcsain. Legyen A_i az a csúcs, amelyre $a_i = s(A_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Válasszuk

a b_1, …, b_{n-1} számokat úgy, hogy $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n$ teljesüljön. Legyen $Q_i = P \cap s^{-1}(a_i)$ és $R_j = P \cap s^{-1}(b_j)$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots n-1)$, ekkor Q_1 és Q_n egypontú, a többi Q_i és R_j pedig $(d-1)$-dimenziós politóp.

Alkalmazzuk az indukciós feltevést a Q_i és R_j politópokra az alábbi formában:

$$\begin{aligned} 1 = n - (n-1) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \alpha_k(Q_i) - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \alpha_k(R_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\emptyset \neq M \leq Q_i} (-1)^{\dim M} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\emptyset \neq N \leq R_j} (-1)^{\dim N} \end{aligned}$$

Most ennek az összegnek a tagjait a P politóp lapjai szerint csoportosítjuk. Vegyük észre, hogy az $M \leq Q_i$ és $N \leq R_j$ lapok előállnak $L \cap Q_i$, illetve $L \cap R_j$ alakban, ahol $L \leq P$. Ilyen L általában egyértelműen található, ez alól csak az az eset kivétel, amikor M a P valamelyik csúcsa. Ezért a számolásban célszerű különválasztani P csúcsait.



Tetszőleges $L \leq P$ nemüres lapra $s(L) = [a_{m(L)}, a_{n(L)}]$, ahol $1 \leq m(L) \leq n(L) \leq n$. (Például $m(P) = 1$ és $n(P) = n$, illetve egy $L \leq P$ lap pontosan akkor csúcs, ha $m(L) = n(L)$.) Ezzel a jelöléssel $L \cap Q_i \neq \emptyset$ (illetve $L \cap R_j \neq \emptyset$) azzal egyenértékű, hogy $m(L) \leq i \leq n(L)$ (illetve $m(L) \leq j \leq n(L)$). Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{\substack{\emptyset \neq M \leq Q_i \\ M \neq \{A_i\}}} (-1)^{\dim M} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\emptyset \neq N \leq R_j} (-1)^{\dim N} = \\ &= n + \sum_{\substack{L \leq P \\ \dim L > 0}} \left(\sum_{i=m(L)+1}^{n(L)-1} (-1)^{\dim(L \cap Q_i)} - \sum_{j=m(L)}^{n(L)-1} (-1)^{\dim(L \cap R_j)} \right) \end{aligned}$$

Itt minden $m(L) < i < n(L)$-re $\dim(L \cap Q_i) = \dim L - 1$, valamint minden $m(L) \leq j < n(L)$-re $\dim(L \cap R_j) = \dim L - 1$, így a zárójelben lévő tagok egy híján kiesnek és

$$1 = n + \sum_{\substack{L \leq P \\ \dim L > 0}} \left(-(-1)^{\dim(L \cap R_{m(L)})} \right) = \sum_{\emptyset \neq L \leq P} (-1)^{\dim L},$$

amit bizonyítani akartunk. □

Most megmutatjuk, hogy az $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}$ számokra vonatkozóan nincs más, az Euler-formulától független lineáris összefüggés, amelyet bármely d-dimenziós politóp adatai teljesítenek.

3.3.2. Definíció (Euler-hipersík, $\alpha(P)$). $d \geq 1$ esetén az $\mathbf{R}^d$ térben (ahol a koordinátákat most $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ jelöli) tekintsük az

$$e_d(\mathbf{x}) = x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^{d-1} x_{d-1} + (-1)^d - 1$$

képlettel adott $e_d \in (\mathbf{R}^d)^\bullet$ affin formát. Euler-hipersíknak nevezzük a $\mathcal{Z}(e_d) \subset \subset \mathbf{R}^d$ affin hipersíkot. A 3.3.1. Tétel következtében tetszőleges d-dimenziós P politóp esetén az $\alpha(P) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in \mathbf{R}^d$ pont illeszkedik az Euler-hipersíkra.

3.3.3. Állítás. *Legyen $d \geq 1$. Az összes d-dimenziós P politóphoz tartozó $\alpha(P)$ pontok affin burka az $\mathbf{R}^d$-beli Euler-hipersík.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy ha $s \in (\mathbf{R}^d)^\bullet$ affin forma, melyre $s(\alpha(P)) = = 0$ minden d-dimenziós P politópra, akkor $s = \lambda \cdot e_d$ alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}$-rel. Ez nyilván egyenértékű a bizonyítandó állítással.

Teljes indukciót alkalmazunk d szerint. A $d = 1$ esetben az állítás igaz, hiszen az Euler-hipersík az egyetlen $x_0 = 2$ pontból áll. Tegyük fel most, hogy $d \geq 2$ és $d - 1$ dimenzióban az állítás igaz. Legyen

$$s(\mathbf{x}) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{d-1} x_{d-1} + b$$

az s affin forma koordinátás alakja. Válasszunk egy tetszőleges $(d-1)$-dimenziós Q politópot és legyen P_1 egy Q alapú gúla, valamint P_2 egy Q-ra állított kettős gúla. Ekkor a 3.2.10-beli megállapítások szerint

$$\begin{aligned} \alpha(P_1) &= \big(\alpha_0(Q) + 1\,,\, \alpha_1(Q) + \alpha_0(Q)\,,\, \ldots\,,\, 1 + \alpha_{d-2}(Q)\big) \\ \text{és} \quad \alpha(P_2) &= \big(\alpha_0(Q) + 2\,,\, \alpha_1(Q) + 2\alpha_0(Q)\,,\, \ldots\,,\, 2\alpha_{d-2}(Q)\big) \end{aligned}$$

érvényes. Így

$$0 = s(\alpha(P_2)) - s(\alpha(P_1)) = a_0 + a_1\alpha_0(Q) + \ldots + a_{d-2}\alpha_{d-3}(Q) + a_{d-1}(\alpha_{d-2}(Q) - 1).$$

Tekintsük azt az $s' \in (\mathbf{R}^{d-1})^\bullet$ affin formát, amelyet az

$$s'(\mathbf{y}) = a_1 y_0 + \ldots + a_{d-1} y_{d-2} + a_0 - a_{d-1} \qquad (\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{d-1})$$

képlet definiál, ekkor a fenti eredmény alapján $s'(\alpha(Q)) = 0$. Miután ez minden $(d-1)$-dimenziós Q politópra teljesül, az indukciós feltevés alapján s' az e_{d-1} affin forma skalárszorosa. Mivel e_{d-1} első együtthatója 1-gyel, s'-é pedig a_1-gyel egyenlő, ez a skalár csak a_1 lehet. Ennek alapján az

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_1 \cdot (-1)^i \qquad (i = 0,1,\ldots,d-2) \\ a_0 - a_{d-1} &= a_1 \cdot ((-1)^{d-1} - 1) \end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk, melyekből a két utolsó összevetésével $a_0 = -a_1$ is következik. Az s affin forma koordinátás alakja tehát

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}) &= a_0 x_0 - a_0 x_1 + \ldots + (-1)^{d-1} a_0 x_{d-1} + b = \\ &= a_0 \cdot \big(x_0 - x_1 + \ldots + (-1)^{d-1} x_{d-1}\big) + b. \end{aligned}$$

Ha most valamely (tetszőleges) d-dimenziós P politópot választva $\alpha(P)$-t s-be helyettesítjük, akkor a 3.3.1. Tételt is felhasználva

$$0 = s(\alpha(P)) = a_0 \cdot \big(\alpha_0 - \alpha_1 + \ldots + (-1)^{d-1} \alpha_{d-1}\big) + b = a_0 \cdot (1 - (-1)^d) + b,$$

ahonnan $b = a_0 \cdot ((-1)^d - 1)$ következik. Így $s = a_0 \cdot e_d$. □

3.4. Poláris halmazok

Felvetődik a kérdés, vajon található-e bármely P politóphoz olyan politóp, amely P-hez képest duális kombinatorikai szerkezetű. Az igenlő válasz tisztázása céljából ebben a szakaszban egy ilyen, ún. poláris politóp konstrukcióját tárgyaljuk. Ennek a P^* politópnak a „természetes” helye nem ugyanaz az X affin tér, ahol P található, hanem a duális tér. Miután a konstrukcióban az origó kitüntetett szerepet játszik, X helyett eleve egy V véges dimenziós valós vektortérben fekvő halmazokra és politópokra szorítkozunk.

3.4.1. Definíció (Poláris halmaz). Jelölje V^* a V duális vektorterét. Tetszőleges nemüres $S \subseteq V$ halmazra definiáljuk az $S^* \subseteq V^*$ halmazt, amelyet az S poláris halmazának nevezünk:

$$S^* = \{\alpha \in V^* \,:\, \text{minden } \mathbf{v} \in S\text{-re } \alpha(\mathbf{v}) \leq 1\}.$$

A definícióban α-ra kirótt követelményt jelölhetjük $\alpha(S) \leq 1$-gyel is.

Nyilván a $\mathbf{0} \in V$ origó (mint egyelemű halmaz) poláris halmaza az egész V^*, továbbá az egész V vektortér poláris halmaza csak a $\mathbf{0} \in V^*$ pontból áll. (Itt jegyezzük meg, hogy a * jelölés már foglalt a vektorterek duálisa számára. Most ezzel valamelyest ellentmondásba kerülünk, de csak akkor, amikor magának V-nek vagy lineáris altereinek a poláris halmazairól akarunk beszélni. Miután a poláris halmazok iránt elsősorban politópok esetében érdeklődünk, ez a kétértelműség nem fog később sem zavart okozni.)

A $\mathbf{v} \in V$ vektorok mint egyelemű részhalmazok poláris halmazát jelöljük $F_{\mathbf{v}}$-vel, azaz legyen $F_{\mathbf{v}} = \{\alpha \in V^* : \alpha(\mathbf{v}) \leq 1\}$.

3.4.2. Állítás

(1) *Ha $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor $F_{\mathbf{v}}$ zárt affin féltér V^*-ban, amelynek az origó belső pontja.*

(2) $S^* = \bigcap_{\mathbf{v} \in S} F_{\mathbf{v}}$.

(3) *Ha $H_{\mathbf{v}}$ jelöli az $F_{\mathbf{v}}$ félteret határoló hipersíkot, azaz $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $H_{\mathbf{v}} = \{\alpha \in V^* : \alpha(\mathbf{v}) = 1\}$, akkor $H_{\mathbf{v}_1}, \ldots, H_{\mathbf{v}_k}$ pontosan akkor független hipersíkok, ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan független vektorok.*

(4) *$F_{\mathbf{u}} \subsetneqq F_{\mathbf{v}}$ akkor és csak akkor áll, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és létezik olyan $0 \leq \lambda < 1$ skalár, hogy $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$.*

Bizonyítás: Használjuk a $V^{**} = V$ természetes azonosítást, amelynél a $\mathbf{v} : V^* \to \mathbf{R}$ lineáris forma $\alpha \in V^*$-on az $\alpha(\mathbf{v})$ értéket veszi föl, azaz $\mathbf{v}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})$.

(1): A $\mathbf{v}(\alpha) \leq 1$ (azaz az $F_{\mathbf{v}}$ definíciójában szereplő $\alpha(\mathbf{v}) \leq 1$) egyenlőtlenség zárt affin félteret definiál V^*-ban. Miután $\alpha(\mathbf{0}) = 0 < 1$, a $\mathbf{0}$ pont valóban belső pontja az $F_{\mathbf{v}}$ féltérnek.

(2): Nyilvánvaló S^* és $F_{\mathbf{v}}$ definíciójából.

(3): Rögtön következik abból, hogy a $H_{\mathbf{v}}$ hipersík a V^* téren értelmezett $\mathbf{v} - \mathbf{1}$ affin forma zéróhalmaza.

(4): Az „akkor” implikáció magától értetődik. A fordított irányhoz feltehetjük, hogy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $F_{\mathbf{u}} \subseteq F_{\mathbf{v}}$ esetén szükségképpen $H_{\mathbf{u}} \parallel H_{\mathbf{v}}$ és így $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ alkalmas λ-val. Ha most $F_{\mathbf{u}} \neq F_{\mathbf{v}}$, akkor tetszőleges $\alpha \in F_{\mathbf{v}}$ választásával $\alpha \notin F_{\mathbf{u}}$, ahonnan $1 < \alpha(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v})/\lambda = 1/\lambda$, azaz $0 < \lambda < 1$. □

3.4.3. Állítás. *Legyen $S, T \subseteq V$. Ekkor:*

(1) *S^* konvex zárt halmaz V^*-ban és $\mathbf{0} \in S^*$.*

(2) *Ha $S \subseteq T$, akkor $S^* \supseteq T^*$.*

(3) $S^* = \big(\mathrm{conv}(S)\big)^*$.

(4) *Ha* $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\, S$, *akkor* S^* *korlátos.*

(5) *Ha* S *korlátos, akkor* $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\, S^*$.

Bizonyítás: (1): A 3.4.2.(2) szerinti $S^* = \bigcap_{\mathbf{v}\in S} F_{\mathbf{v}}$ előállításban mindegyik $F_{\mathbf{v}}$ az origót tartalmazó konvex zárt halmaz.

(2): Nyilvánvaló.

(3): A $\supseteq$ tartalmazás (2) alapján magától értetődik. A fordított irányhoz vegyük észre, hogy tetszőleges $\alpha \in V^*$ mellett $\alpha\big(\mathrm{conv}(S)\big) = \mathrm{conv}\big(\alpha(S)\big)$, ezért ha $\alpha(S) \leq 1$, akkor $\alpha\big(\mathrm{conv}(S)\big) \leq 1$ is teljesül.

(4): Legyen s tetszőlegesen adott affin forma a V^* téren, azt kell belátni, hogy az $s(S^*) \subseteq \mathbf{R}$ halmaz korlátos. A $V^{**} = V$ azonosítás mellett tetszőleges $\alpha \in$ $\in V^*$-ra $s(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}) + c$ valamilyen rögzített $\mathbf{v} \in V$-vel és $c \in \mathbf{R}$ konstanssal. Miután az origó belső pontja S-nek, létezik olyan $r \in \mathbf{R}$, hogy $\mathbf{v} = r\mathbf{v}_0$ és $\pm\mathbf{v}_0 \in S$. Ekkor bármely $\alpha \in A^*$-ra

$$|s(\alpha)| = |\alpha(\mathbf{v}) + c| \leq |r\alpha(\mathbf{v}_0)| + |c| \leq |r| + |c|,$$

felhasználva, hogy $\pm\mathbf{v}_0 \in S$ miatt $|\alpha(\mathbf{v}_0)| \leq 1$. Ezért $s(S^*)$ valóban korlátos számhalmaz.

(5): Ha S korlátos, akkor 3.2.7 alapján létezik olyan $P \subseteq V$ politóp, melyre $S \subseteq P$. Ezért S benne fekszik véges sok V-beli pont (nevezetesen P csúcsai) konvex burkában: $S \subseteq \mathrm{conv}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\})$. Ebből (2) és (3) alkalmazásával adódik, hogy $S^* \supseteq F_{\mathbf{v}_1} \cap \ldots \cap F_{\mathbf{v}_k}$. Az itt szereplő $F_{\mathbf{v}_i}$ félterek mindegyike 3.4.2.(1) szerint a belsejében tartalmazza az origót, ezért $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\, S^*$. □

3.4.4. Következmény. *Ha* $K \subseteq V$ *kompakt konvex halmaz, amely az origót a belsejében tartalmazza, akkor* K^* *is ilyen tulajdonságú: kompakt, konvex, és* V^* *origóját a belsejében tartalmazza. Emellett bármely* $\mathbf{v} \in \partial K$*-ra* $F_{\mathbf{v}}$ *támaszféltere* K^**-nak.*

Bizonyítás: Az első mondat csupán egyesíti a 3.4.3-ban tisztázottakat, így csak az utolsó állítást kell bebizonyítanunk. Miután $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\, K$ $\mathbf{v} \in \partial K$, a $[\mathbf{0}, \mathbf{v}]$ szakasz nem hosszabbítható meg $\mathbf{v}$-n túl K-ban, ezért 3.4.2.(3) miatt $F_{\mathbf{v}}$ minimális a K^*-ot tartalmazó félterek között a tartalmazásra nézve, azaz valóban támaszféltér. □

Megjegyzés. Azokat a kompakt konvex halmazokat, amelyeknek van belső pontja, konvex testeknek nevezik. Azt kaptuk tehát, hogy konvex test poláris halmaza is konvex test, ha az origó a test belsejében van.

A K^* halmaz poláris halmaza a V^* vektortér duálisában, azaz $V^{**} = V$-ben fekszik. Nevezetes tény, hogy a 3.4.4-beli feltevések mellett ilyen módon magát K-t kapjuk vissza.

3.4.5. Tétel. *Ha $K \subseteq V$ kompakt konvex halmaz, amely az origót a belsejében tartalmazza, akkor $K^{**} = K$.*

Bizonyítás: A $K \subseteq K^{**}$ tartalmazás tetszőleges $K \subseteq V$ részhalmazra automatikusan fönnáll, ugyanis ha $\mathbf{v} \in K$ és $\alpha \in K^*$, akkor $\mathbf{v}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}) \leq 1$, ezért $\mathbf{v} \in K^{**}$.

A fordított irányú tartalmazáshoz tegyük föl, hogy $\mathbf{v} \notin K$. Ekkor K-nak létezik olyan F támaszféltere, amelyre $\mathbf{v} \notin F$. Alkalmas $\beta \in V^*$ lineáris formával és $c \in \mathbf{R}$ konstanssal az F féltér $F = \{\mathbf{u} \in V : \beta(\mathbf{u}) \leq c\}$ alakban írható. Ekkor tehát $\beta(\mathbf{v}) > c$. Itt $c > 0$, mert $\mathbf{0} \in \operatorname{int} K$ miatt az origó F-nek is a belsejében van. Ezért az $\alpha = \beta/c$ formára érvényes, hogy minden $\mathbf{u} \in$ $\in F$-re, és így speciálisan minden $\mathbf{u} \in K$-ra is $\alpha(\mathbf{u}) \leq 1$. Eszerint $\alpha \in K^*$, ugyanakkor $\mathbf{v}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}) > 1$, ami azt mutatja, hogy $\mathbf{v} \notin K^{**}$. □

Érdemes kiemelni, hogy 3.4.4 és 3.4.5 politópokra szorítkozva is érvényes:

3.4.6. Tétel. *Ha a $P \subseteq V$ politóp a belsejében tartalmazza V origóját, akkor a P^* poláris halmaz is politóp V^*-ban, amely az origót a belsejében tartalmazza, továbbá $P^{**} = P$.*

Bizonyítás: Csak azt kell bizonyítanunk, hogy P^* is politóp, hiszen az összes többi állítás 3.4.4, illetve 3.4.5 speciális esete. Tudjuk, hogy P^* korlátos, ezért 3.2.3 alapján elég annyit ellenőrizni hogy konvex poliéder, azaz véges sok féltér metszete. Ezt pedig 3.4.3.(5) bizonyításához hasonlóan a P csúcsaihoz tartozó poláris féltereket szerepeltetve látjuk. □

Most kapcsolatot teremtünk P és P^* lapjai között. Legyen tehát a továbbiakban P rögzített konvex politóp V-ben, melyre $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$.

3.4.7. Definíció ($L^\diamond$). Legyen L a P tetszőleges valódi lapja. Definiáljuk az $L^\diamond \subseteq P^*$ halmazt az

$$L^\diamond = P^* \cap \bigcap_{\mathbf{v} \in L} H_{\mathbf{v}}$$

formulával. Itt 3.4.4 miatt mindegyik $F_{\mathbf{v}}$ támaszféltere, és így $P^* \cap H_{\mathbf{v}}$ pedig lapja P^*-nak. Az $L^\diamond$ halmaz tehát lapok metszeteként állítható elő, ezért maga is lap. Ha $L \leq P$ nem valódi lap, azaz $L = \emptyset$ vagy $L = P$, akkor legyen $\emptyset^\diamond = P^*$ és $P^\diamond = \emptyset$.

Nyilvánvaló, hogy ha a P-beli L_1, L_2 lapokra $L_1 \subseteq L_2$, akkor ${L_1}^\diamond \supseteq {L_2}^\diamond$.

3.4.8. Tétel. *Bármely $L \leq P$ lapra* $\dim L^\diamond = d - \dim L - 1$.

Bizonyítás: A nem valódi lapokra ez nyilvánvaló a definícióból. Legyen a továbbiakban $L \leq P$ valódi lap és $k = \dim L$. Először megmutatjuk, hogy $\dim L^\diamond \leq d - k - 1$. Válasszunk $k + 1$ darab affin-független pontot L-ben, legyenek ezek $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, …, $\mathbf{v}_k$. Ekkor $\mathbf{0} \notin \langle L \rangle$ miatt a $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, …, $\mathbf{v}_k$ vektorok

lineárisan függetlenek. Ezért a $H_{\mathbf{v}_0}$, $H_{\mathbf{v}_1}$, …, $H_{\mathbf{v}_k}$ hipersíkok függetlenek, és így a $H_{\mathbf{v}_0} \cap \ldots \cap H_{\mathbf{v}_k}$ affin altér dimenziója $(d-k-1)$-gyel egyenlő. Az $L^\diamond$ lap benne fekszik ebben az altérben, ezért valóban $\dim L^\diamond \leq d-k-1$.
A fordított egyenlőtlenség igazolása céljából állítsuk elő az L által kifeszített affin alteret, $\langle L \rangle$-et, mint támaszhipersíkok metszetét. Válasszunk ki ezek közül a támaszhipersíkok közül $d-k$ független, M_1-et, M_2-t, …, M_{d-k}-t úgy, hogy $\langle L \rangle = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{d-k}$ legyen. Válasszuk minden $i = 1, \ldots, d-$ $-k$-ra M_i-hez az $\alpha_i \in V^*$ lineáris formát úgy, hogy az $\{\mathbf{x} \in V : \alpha(\mathbf{x}) \leq 1\}$ halmaz éppen a P-t tartalmazó M_i szerinti féltér legyen. Ekkor α_1, …, α_{d-k} lineárisan függetlenek. Azt állítjuk, hogy mindannyian hozzátartoznak $L^\diamond$-hez. Valóban, egyrészt nyilván $\alpha_i \in P^*$, másrészt ha $\mathbf{v} \in L$, akkor $\mathbf{v} \in M_i$ (azaz $\alpha_i(\mathbf{v}) = 1$) miatt $\alpha_i \in H_{\mathbf{v}}$. □

Úgy tekinthetjük, hogy az $L \mapsto L^\diamond$ hozzárendelés bármely olyan politóp lapjaira értelmezve van, amely valamely véges dimenziós valós vektortérben az origót a belsejében tartalmazza. Alkalmazhatjuk tehát másodszor is, ezúttal P^* lapjaira. Ekkor újra P lapjaihoz jutunk.

3.4.9. Tétel. *Bármely $L \leq P$ lapra $L^{\diamond\diamond} = L$.*

Bizonyítás: 3.4.8 kétszeri felhasználásával $\dim L^{\diamond\diamond} = \dim L$, ezért elég belátni, hogy $L \subseteq L^{\diamond\diamond}$. Legyen $\mathbf{v} \in L$ tetszőleges pont, azt kell megmutatnunk, hogy minden $\alpha \in L^\diamond$-re $\mathbf{v} \in H_\alpha$. Ha $\alpha \in L^\diamond$, akkor speciálisan $\alpha \in H_{\mathbf{v}}$, azaz $\alpha(\mathbf{v}) = 1$ is érvényes. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{v}(\alpha) = 1$, azaz valóban $\mathbf{v} \in H_\alpha$. □

3.4.10. Következmény. *P és P^* duális kombinatorikai szerkezetű politópok.*

Bizonyítás: Valóban, a laphálók közötti $^\diamond : \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^*)$ és $^\diamond : \mathcal{L}(P^*) \to \mathcal{L}(P)$ megfeleltetések rendezésfordítók és 3.4.9 szerint egymás inverzei, így bijektívek. Tehát P és P^* laphálói duálisan izomorfak. □

3.4.11. Példa. Az origó P-n belüli elhelyezkedése lényegesen befolyásolja P^* alakját. Ha például P keresztpolitóp és az origó a középpontja, akkor P^* parallelotóp. Viszont ha az origó a középponttól különböző belső pontja P-nek, akkor bár P^* kombinatorikailag ekvivalens egy parallelotóppal, szemközti hiperlapjai általában nem párhuzamosak, és így P^* nem parallelotóp.

Megjegyzés. A poláris test konstrukciója a politópoktól különböző konvex testek esetében is érdekes geometriai jelenségekhez kapcsolódik. Megmutatható például, hogy ha K ellipszoidtest, amelynek az origó a középpontja, akkor K^* is az. Erről a projektív geometriában fontos szerepet játszó polaritás kapcsán lesz még szó, l. 9.2.17.

A poláris halmazok használatának másik érdekes esete, amikor a V vektortér egy konvex kúpjára alkalmazzuk a konstrukciót. Tegyük fel most tehát, hogy $K \subseteq V$ konvex kúp. Vegyük észre, hogy a poláris halmaz elemeit 3.4.1-ben definiáló $\alpha(\mathbf{v}) \leq 1$ egyenlőtlenség helyett ilyenkor $\alpha(\mathbf{v}) \leq 0$ is írható, azaz $K^* = \{\alpha \in V^* : \text{minden } \mathbf{v} \in K\text{-ra } \alpha(\mathbf{v}) \leq 0\}$. Valóban, egyrészt az így definiált halmaz nyilvánvalóan része K^*-nak. Másrészt pedig ha valamilyen $\alpha \in V^*$ lineáris forma nem tartozik hozzá, akkor valamilyen $\mathbf{v} \in K$ vektoron $\alpha(\mathbf{v}) = a > 0$, ekkor $(2/a)\mathbf{v} \in K$ és $\alpha\big((2/a)\mathbf{v}\big) = 2$ mutatja, hogy $\alpha \notin K^*$.

3.4.12. Definíció (Poláris kúp). Ha K konvex kúp a V valós vektortérben, akkor a

$$K^* = \{\alpha \in V^* : \text{minden } \mathbf{v} \in K\text{-ra } \alpha(\mathbf{v}) \leq 0\}$$

halmazt K poláris kúpjának nevezzük.

3.4.13. Állítás

(1) *K^* zárt konvex kúp V^*-ban.*

(2) *Ha K zárt, akkor $K^{**} = K$.*

Bizonyítás: (1): Ha most $\mathbf{v} \in K$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$-ra $F_{\mathbf{v}}$ az $\alpha(\mathbf{v}) \leq 0$ egyenlőtlenséggel adott zárt félteret jelöli V^*-ban, akkor ismét $K^* = \bigcap_{\mathbf{v} \in K} F_{\mathbf{v}}$, de most az itt szereplő félterek mindegyike az origót a határán tartalmazza, ezért metszetük zárt konvex kúp.

(2): A $K \subseteq K^{**}$ tartalmazás 3.4.5 mintájára automatikus. A fordított irányhoz elég annyit észrevenni, hogy ha $\mathbf{v} \notin K$, akkor létezik olyan K-t tartalmazó, origón áthaladó határú zárt féltér, amelyben $\mathbf{v}$ nincs benne, azaz létezik olyan $\alpha \in K^*$, amelyre $\alpha(\mathbf{v}) > 0$. Egy ilyen α éppen azt tanúsítja, hogy $\mathbf{v} \notin K^{**}$. □

A továbbiakban tegyük föl, hogy K valódi konvex kúp V-ben, azaz V-től különbözik. Ilyenkor az origó relatív határpontja K-nak. A következő állítás a poláris kúp dimenzióját állítja kapcsolatba az origónak mint határpontnak a rendjével, l. 2.5.1.

3.4.14. Állítás. *Bármely $K \subseteq V$ valódi konvex kúpra* $\dim K^* = d - r(\mathbf{0})$ *érvényes.*

Bizonyítás: K bármely támaszhipersíkja tartalmazza az origót, tehát K azonos az origóhoz tartozó támaszféltereinek a metszetével. Ha Y jelöli a támaszhipersíkok metszetét, akkor egyrészt definíció szerint $r(\mathbf{0}) = \dim Y$, másrészt Y a K-ban fekvő legbővebb lineáris altér V-ben.

A K^* halmaz nyilván benne fekszik Y annullátorában, ami $d - r(\mathbf{0})$ dimenziós lineáris altér V^*-ban. Másrészt ha K^* egy ennél valódi módon szűkebb altérben is benne volna, akkor ez az altér egy Y-nál valódi módon bővebb

$Z \leq V$ altérnek volna az annullátora. Ebből viszont $Z \subseteq K^{**}$ következne, ami ellentmond 3.4.13.(2)-nek. □

3.4.15. Állítás. *Ha K konvex poliéderkúp (azaz olyan konvex kúp, amely egyúttal konvex poliéder), akkor K^* is az.*

Bizonyítás: K valódi lapjai között létezik egy tartalmazásra nézve legkisebb, mégpedig a támaszhipersíkok metszeteként adódó Y lineáris altér V-ben. Válasszunk bázist az Y altérben és soroljuk föl a bázisvektorok ± 1-szereseit egy $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ sorozatban. (Lehetséges, hogy $\dim Y = 0$, ekkor ebben a lépésben egyetlen vektort sem választunk.) A $\dim Y$-nál eggyel nagyobb dimenziójú lapok relatív belsejéből szemeljünk ki egy-egy további vektort: $\mathbf{v}_{k+1}$, $\mathbf{v}_{k+2}$, …, $\mathbf{v}_m$.

Azt állítjuk, hogy $K^* = \{\alpha \in V^* : \alpha(\mathbf{v}_i) \leq 0 \ (i = 1,2,\dots m)\}$. Ha ezt belátjuk, akkor ezzel K^*-ot előállítottuk véges sok féltér metszeteként (nevezetesen az $F_{\mathbf{v}_i} = \{\alpha \in V^* : \alpha(\mathbf{v}_i) \leq 0\}$ félterek metszeteként), azaz K^*-ról bebizonyítottuk, hogy konvex poliéderkúp.

Vegyük észre, hogy bármely $\mathbf{v} \in K$ vektor előállítható a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$ vektorok nemnegatív együtthatós kombinációjaként. Ez könnyen meggondolható a $\mathbf{v}$-t tartalmazó lap dimenziója szerinti indukcióval.

Nyilván $K^* \subseteq \{\alpha \in V^* : \alpha(\mathbf{v}_i) \leq 0 \ (i = 1,2,\dots m)\}$. A fordított tartalmazás pedig a fenti észrevétel következménye: ha α nempozitív értéket vesz fel mindegyik $\mathbf{v}_i$ vektoron, akkor ugyancsak nempozitív értéket vesz fel ezek bármely nemnegatív együtthatós kombinációján is, azaz K minden elemén, és ezért K^*-hoz tartozik. □

Megjegyzések. (1) A konvex poliéderkúpok és poláris kúpjaik lapstruktúrája között a politópok esetéhez hasonló dualitási viszony áll fönn. A 3.4.7–3.4.10-beli definíciók és tételek csekély módosításokkal átfogalmazhatók a kúpok esetére. A konvex poliéderkúpok körében a laphálót úgy érdemes definiálni, hogy az üres halmazt nem tekintjük lapnak. Ekkor K és K^* laphálói duálisan izomorfak.

(2) A konvex kúpok és poliéderkúpok érdekes, geometrián belüli alkalmazási területe a gömbi geometriában a konvex halmazok és poliéderek elmélete. A gömbi konvex halmazokat, illetve gömbi konvex poliédereket ugyanis éppen a konvex kúpok, illetve konvex poliéderkúpok metszik ki egy euklideszi vektortér origó körüli gömbjéből. A gömbháromszögekkel kapcsolatban 0.3.6-ban megismert polaritás is így származik a poláris kúp konstrukciójából a háromdimenziós tér triédereire mint poliéderkúpokra vonatkozóan.

Euklideszi geometria

Az euklideszi tér hagyományosan a geometria tudományának első számú célpontja és terepe. A geometria sok évszázados története hatalmas ismeretanyagot halmozott föl az euklideszi térről. Ennek csak igen kis részét tudjuk itt érinteni. Elsősorban az általános, tetszőleges dimenziójú euklideszi terek matematikai kezeléséhez szükséges apparátus kidolgozását, és egy-két jellemző eredmény bemutatását tűzzük ki célul. A magasabb dimenziós euklideszi térfogalom az affin geometriára és a lineáris algebra eszközeire épül. A tér és transzformációi szerkezetének áttekintése után az inverzióval, szabályos testekkel, és konvex testek metrikus tulajdonságaival foglalkozunk.

4. Euklideszi terek és transzformációik

Az euklideszi tér struktúrájában az affin térhez képest a mértékviszonyok (távolság, szög, terület, térfogat stb.) jelentik a többletet. Mindezt egyetlen, a lineáris algebrából ismert fogalomnak, a vektorok skaláris szorzásának a felhasználásával származtatjuk. Az euklideszi terek szekezetének megismerésében először az egybevágósági és hasonlósági transzformációkat és azok csoportjait vizsgáljuk meg.

4.1. Euklideszi vektorterek és ortogonális transzformációk

Ebben a szakaszban emlékeztetünk a skaláris szorzat fogalmával kapcsolatos lineáris algebrai előismeretekre.

4.1.1. Emlékeztető (Euklideszi vektortér). A (V, B) párt euklideszi vektortérnek nevezzük, ha V véges dimenziós valós vektortér, és $B : V \times V \to \mathbf{R}$ pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény. Ezt a függvényt V-beli skaláris szorzásnak nevezzük, és az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektorokon felvett értékét $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ helyett inkább $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$-vel (vagy pusztán $\mathbf{uv}$-vel) jelöljük.

A továbbiakban a B jelölést általában nem tüntetjük fel, ha egyértelmű, hogy mely skaláris szorzásról beszélünk. Így például gyakran magát V-t nevezzük euklideszi vektortérnek; ilyenkor mindig hozzáértjük a skaláris szorzást is.

Az $\mathbf{R}^d$ koordinátateret az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ skaláris szorzat automatikusan euklideszi vektortérré teszi; ezt nevezzük standard d-dimenziós euklideszi vektortérnek.

Bármely euklideszi vektortérben bármely lineáris altér maga is euklideszi vektortér, ha a skaláris szorzást megszorítjuk az altérre.

4.1.2. Emlékeztető (Vektorok normája, szöge). Az $\mathbf{u} \in V$ vektor normáján (vagy hosszán) az $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ számot értjük. Ha $\|\mathbf{u}\| = 1$, akkor $\mathbf{u}$-t egységvektornak hívjuk.

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-re $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq$ $\leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ nemzérus vektorok V-ben, akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szögén azt az egyértelműen meghatározott 0 és π közötti α szöget értjük, amelyre $\cos\alpha =$ $= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|)$. (Ha a két vektor között a $\mathbf{0}$ is szerepel, akkor szögüket határozatlannak tekintjük.) A $\pi/2$ szöget bezáró (azaz zérus skaláris szorzatot adó) vektorokat merőlegesnek vagy ortogonálisnak mondjuk.

4.1.3. Emlékeztető (Ortonormált vektorrendszer). A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in$ $\in V$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, ha páronként merőleges egységvektorok, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ha $i \neq j$, és $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 1$, ha $i = j$.

Könnyű ellenőrizni, hogy bármely ortonormált vektorrendszer lineárisan független. A lineáris algebrából ismert Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást használva látjuk, hogy bármely ortonormált vektorrendszer kiegészíthető ortonormált bázissá. Ezért V-ben az ortonormált bázisok pontosan a maximális ortonormált vektorrendszerek.

4.1.4. Emlékeztető (Ortogonális felbontás). A V euklideszi vektortér a V_1, V_2 alterek ortogonális direkt összege, ha $V = V_1 + V_2$ és bármely $\mathbf{v}_1 \in V_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_2$ esetén $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ (azaz $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 0$).

Ha a V euklideszi vektortérben adott az $U \leq V$ lineáris altér, akkor egyértelműen létezik olyan altér, amely U-val együtt V ortogonális direktösszegfelbontását adja, mégpedig az

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ minden } \mathbf{u} \in U\text{-ra}\}$$

altér. Ezt az alteret az U ortogonális komplementerének nevezzük V-ben. Érvényes az $(U^\perp)^\perp = U$ egyenlőség.

4.1.5. Emlékeztető (Ortogonális lineáris transzformációk). Az euklideszi vektorterek mint algebrai struktúrák közötti izomorfizmusokat ortogonális transzformációknak nevezzük. Tehát ha (V, B) és (V', B') euklideszi vektorterek, akkor egy $\varphi : V \to V'$ leképezés ortogonális transzformáció, ha φ lineáris izomorfizmus és φ tartja a skaláris szorzatot, azaz minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-re $\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Emlékeztetünk arra a lineáris algebrából ismert tényre, hogy egy lineáris izomorfizmus pontosan akkor ortogonális, ha a vektorok normáját megőrzi, illetve akkor, ha bármely (vagy akár csak egyetlen) ortonormált bázist ortonormált bázisba képez. Ebből az is következik, hogy bármely adott dimenzióban izomorfizmus erejéig pontosan egy euklideszi vektortér létezik.

4.1.6. Emlékeztető (Ortogonális csoport, ortogonális mátrixok). A V euklideszi vektorteret saját magába képező, skalárisszorzat-tartó lineáris leképezéseket V ortogonális transzformációinak nevezzük. Ezek a $GL(V)$ általános lineáris csoportnak egy $O(V)$-vel jelölt részcsoportját, a V ortogonális csoportját alkotják.
A standard skaláris szorzással ellátott $\mathbf{R}^d$ koordinátatér ortogonális csoportjára az $O(d)$ jelölést használjuk, ennek elemei a $d \times d$ méretű ortogonális mátrixok. Felidézzük az ortogonális mátrixok lineáris algebrából ismert jellemzését:

Bármely $A \in \mathbf{R}^{d\times d}$ mátrixra az alábbi feltételek egyenértékűek:

(i) $A \in O(d)$;

(ii) *minden* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$*-re* $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$;

(iii) *A oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak* $\mathbf{R}^d$*-ben;*

(iv) *A sorvektorai ortonormált bázist alkotnak* $\mathbf{R}^d$*-ben;*

(v) $A^\top A = I$;

(vi) $AA^\top = I$.

Bármely ortogonális transzformáció determinánsa ± 1. Az előjel aszerint pozitív vagy negatív, hogy a szóban forgó transzformáció irányítástartó vagy irányításváltó. A pozitív determinánsú ortogonális transzformációk alkotják $O(V)$-ben a 2 indexű $SO(V)$ részcsoportot, a V euklideszi vektortér speciális ortogonális csoportját. A $V = \mathbf{R}^d$ esetben az $SO(d)$ jelölést használjuk a $d\times d$ méretű speciális ortogonális mátrixok csoportja számára.

4.2. Euklideszi terek és izometriák

4.2.1. Definíció (Euklideszi affin tér). Az (E, V, Φ) véges dimenziós valós affin teret euklideszi affin térnek (vagy rövidebben csak euklideszi térnek) nevezzük, ha V euklideszi vektortér, azaz ha V-n adott egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény, amelyet V-beli skaláris szorzatnak nevezünk.

Az egyszerűség kedvéért a tér jelölésében nem tüntetjük föl a skaláris szorzatot, mint a struktúra alkotóelemét, hanem azt beleértjük a V jelölésbe. Gyakran magát az E alaphalmazt nevezzük euklideszi térnek, ha egyértelmű, hogy mely struktúrával van ellátva.

4.2.2. Példa. Ha az axiomatikusan értelmezett klasszikus euklideszi teret a geometriai úton definiált skaláris szorzással látjuk el, akkor háromdimenziós példát kapunk euklideszi affin térre.

4.2.3. Definíció (Ortonormált koordinátarendszer). Legyen $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ affin koordinátarendszer E-ben. Tekintsük az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_d$ standard bázisvektorokat $\mathbf{R}^d$-ben és állítsuk elő az $A_0 = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{0})$ és $A_i = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, \ldots, d)$ inverz képeket. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x}$ ortonormált (vagy Descartes-féle) koordinátarendszer E-ben, ha az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_0A_d}$ vektorok ortonormált bázist alkotnak a V vektortérben.

Tudjuk (l. 4.1.5), hogy két egyenlő dimenziójú euklideszi vektortér között egy lineáris leképezés pontosan akkor skalárisszorzat-tartó, ha bármely (vagy egyenértékű módon legalább egy) ortonormált bázist ortonormált bázisba képez. Ennek alapján valamely $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ affin koordinátarendszer pontosan akkor ortonormált, ha az $\mathbf{x}$ affin leképezés $L(\mathbf{x}) : V \to \mathbf{R}^d$ linearizáltja skalárisszorzat-tartó.

4.2.4. Definíció (Izomorfizmus). Két euklideszi teret izomorfnak nevezünk, ha létezik közöttük olyan affin izomorfizmus, amelynek a linearizáltja skalárisszorzat-tartó.

Bármely d-dimenziós euklideszi tér izomorf a természetes affin struktúrával és skaláris szorzattal ellátott $\mathbf{R}^d$ koordinátatérrel (azaz a standard d-dimenziós euklideszi vektortérrel); az izomorfizmust egy ortonormált koordinátarendszer felvétele szolgáltatja.

4.2.5. Definíció (Az euklideszi tér metrikája). Értelmezzük $A, B \in E$-re A és B távolságát a $\rho(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$ formulával. Az $\mathbf{R}^d$ standard euklideszi térben koordinátákkal kifejezve ezt a távolságot a szokásos

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_d - y_d)^2}$$

képlet adja meg.
A ρ távolságfüggvény az E euklideszi teret metrikus térré teszi (és ez a metrika a tér természetes topológiáját származtatja, l. 1.8.15). A háromszögegyenlőtlenség és annak az alábbi szigorú változata is a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből következik Descartes-féle koordinátákat használva.

4.2.6. Állítás. $\rho(A,B)+\rho(B,C)\geq\rho(A,C)$. *Egyenlőség csak* $B\in[A,C]$ *esetén áll fönn.* □

4.2.7. Definíció (Izometria, izometriacsoport). Legyenek (X,ρ) és (X',ρ') metrikus terek. Egy $f:X\to X'$ leképezést izometriának nevezünk X és X' között, ha bijektív és minden $x,y\in X$-re $\rho'\big(f(x),f(y)\big)=\rho(x,y)$ teljesül, azaz f távolságtartó. Két metrikus tér izometrikus, ha létezik közöttük izometria. Például a d-dimenziós euklideszi tér izometrikus a standard metrikával ellátott $\mathbf{R}^d$ térrel (hiszen az ortonormált koordinátarendszerek izometriák). Ezért $\mathbf{R}^d$ metrikus tulajdonságai átöröklődnek az euklideszi terekre; így például bármely euklideszi tér teljes metrikus tér.
Ha X rögzített metrikus tér, akkor az X-et saját magába képező izometriák csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot X izometriacsoportjának nevezzük és $I(X)$-szel jelöljük.

Az euklideszi terekkel kapcsolatos vizsgálataink egy része az $I(E)$ csoport megismerésére irányul, ahol E euklideszi tér. Az euklideszi terek közötti izometriákat egybevágóságoknak vagy egybevágósági transzformációknak is nevezzük. Az $I(E)$ csoport tehát az E euklideszi tér egybevágóságainak a csoportja. Két euklideszi térben fekvő ponthalmazt egybevágónak mondunk, ha létezik olyan egybevágóság a befoglaló terek között, amely az egyiket a másikra képezi.

Rátérünk az $I(E)$ csoport részletes vizsgálatára. Példaként először az euklideszi izometriák két konkrét típusát tekintjük.

4.2.8. Példa (Eltolások). Legyen $t:E\to E$ tetszőleges eltolás, azaz olyan $t\in\operatorname{Aff}(E)$, amelyre $L(t)=id_V$. Ekkor $A,B\in E$-re $\rho(t(A),t(B))=$ $=\|\overrightarrow{t(A)t(B)}\|=\|L(t)(\overrightarrow{AB})\|=\|\overrightarrow{AB}\|=\rho(A,B)$ mutatja, hogy t izometria. Tudjuk (már az affin terek elméletéből), hogy az eltolások egy a V vektortér additív csoportjával izomorf részcsoportot alkotnak $\operatorname{Aff}(E)$-ben, így $I(E)$-ben is.

4.2.9. Példa (Ortogonális izometriák). Válasszunk az E euklideszi affin térben egy tetszőleges $O\in E$ kezdőpontot, és ezáltal (az affin geometriából megismert „vektorizálás” útján) azonosítsuk E-t az E_O vektortérrel, illetve magával V-vel. Ha $f\in O(V)$ tetszőleges ortogonális lineáris transzformáció, akkor $A,B\in E$-re $\rho(f(A),f(B))=\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|=\|L(f)(\overrightarrow{AB})\|=$ $=\|f(\overrightarrow{AB})\|=\|\overrightarrow{AB}\|=\rho(A,B)$ mutatja, hogy f izometria.

Mind a 4.2.8-beli, mind a 4.2.9-beli példák olyan izometriák, amelyek egyúttal affin transzformációk az E euklideszi térben. Ezek felhasználásával könnyen meggondolható például, hogy E-ben bármely két egyenlő dimenziójú affin altér egybevágó.

Az alábbi tétel a lineáris algebra nyelvén jellemzi E izometriáit, és a fő tartalma az, hogy E bármely izometriája affinitás.

4.2.10. Tétel. *Egy euklideszi tér izometriái pontosan azok az affinitások, amelyeknek a linearizáltja ortogonális.*

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy $f \in \mathrm{Aff}(E)$ és $L(f) \in O(V)$. Egy E-beli ortonormált koordinátarendszer kiválasztásával feltehető, hogy $E = \mathbf{R}^d$. Miután f affinitás, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$ alakban írható, ahol $A = L(f) \in$ $\in O(d)$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$. Ekkor f az A által létesített ortogonális izometria és a $\mathbf{b}$ vektorral történő eltolás kompozíciója, tehát f izometria.

A fordított irány bizonyításához legyen adott az $f \in I(E)$ izometria. Válasszunk E-ben egy tetszőleges $A_0 \in E$ kezdőpontot és jelöljük t-vel az $\overrightarrow{f(A_0)A_0}$ vektorral történő eltolást. Ekkor a $g = t \circ f$ izometriának A_0 fixpontja. Azt akarjuk belátni, hogy $g \in O(E_{A_0})$.

Válasszunk E-ben egy A_0 kezdőpontú ortonormált koordinátarendszert, azaz az A_1, A_2, …, A_d pontokat úgy, hogy az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, …, $\overrightarrow{A_0A_d}$ vektorok ortonormált bázist alkossanak V-ben. Legyen $B_i = g(A_i)$ $(i = 1,2,\ldots,d)$. Állítjuk, hogy az $\overrightarrow{A_0B_1}$, $\overrightarrow{A_0B_2}$, …, $\overrightarrow{A_0B_d}$ vektorok is ortonormált bázist alkotnak V-ben. Ehhez azt tudjuk kihasználni, hogy két egységvektor pontosan akkor merőleges, ha közös kezdőpontú reprezentánsaik végpontjai egymástól $\sqrt{2}$ távol vannak. Valóban, g távolságtartó volta miatt egyrészt minden i-re $\rho(A_0, B_i) = \rho(g(A_0), g(A_i)) = \rho(A_0, A_i) = 1$, másrészt $i \neq j$ esetén $\rho(B_i, B_j) = \rho(g(A_i), g(A_j)) = \rho(A_i, A_j) = \sqrt{2}$.

Létezik tehát olyan $h \in O(E_{A_0})$ ortogonális lineáris transzformáció, amely az utóbbi ortonormált bázist az előbbibe viszi. Ekkor $h \in I(E)$ olyan izometria, amelyre $h(A_0) = A_0$ és $h(B_i) = A_i$ $(i = 1,\ldots,d)$. Állítjuk, hogy $h \circ g =$ $= id_E$. Innen már valóban következik, hogy g ortogonális izometria (hiszen a h ortogonális izometria inverze), továbbá innen a tétel állítása is következik, hiszen $f = t^{-1} \circ g$ affinitás, amelynek (az $E_{A_0} = V$ azonosítás után) g a linearizáltja.

A $j = h \circ g \in I(E)$ izometriára $j(A_i) = A_i$ $(i = 0,1,\ldots,d)$ teljesül, azaz j egy E-beli affin bázis minden pontját helyben hagyja. Ekkor az alábbi lemma szerint j csak az identikus leképezés lehet. A lemmát felhasználva tehát a tételt bebizonyítottuk. □

4.2.11. Lemma. *Tegyük fel, hogy az E euklideszi tér valamely $j \in I(E)$ izometriája fixen hagy egy E-beli affin bázist. Ekkor $j = id_E$.*

Bizonyítás: Miután valamely pontnak és e pont j-képének a fixen maradó pontoktól mért távolságai rendre egyenlők, tulajdonképpen azt kell bebizonyítanunk, hogy a tér bármely pontját egy rögzített affin bázis elemeitől mért távolságainak a rendszere egyértelműen meghatározza.

A koordinátarendszer alkalmas megválasztásával feltehetjük, hogy $E = \mathbf{R}^d$ és a szóban forgó affin bázis az origót tartalmazza; álljon tehát az affin bázis az $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_d$ pontokból, ahol $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy valamely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d$-re $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{a}_i)$ $(i = 0, \ldots, d)$. Az $i = 0$ esetben ez azt jelenti, hogy $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, $i > 0$-ra pedig $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_i\|$. Négyzetre emelve és átrendezve

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}_i) &= (\mathbf{y} - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}_i) \\
\|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i + \|\mathbf{a}_i\|^2 &= \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i + \|\mathbf{a}_i\|^2 \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i \\
(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_i &= 0
\end{aligned}$$

adódik minden $i = 1,2, \ldots, d$-re. Eszerint az $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ vektor merőleges egy bázis minden elemére a V euklideszi vektortérben, így csak $\mathbf{0}$ lehet. □

4.2.12. Következmény. *Az E euklideszi tér eltolásai normálosztót alkotnak az $I(E)$ csoportban, amely szerint vett faktorcsoport az $O(V)$ ortogonális csoporttal izomorf.*

Bizonyítás: Valóban, az $L : \mathrm{Aff}(E) \to GL(V)$ linearizáló homomorfizmust az $I(E)$ részcsoportra megszorítva szürjektív $I(E) \to O(V)$ homomorfizmust kapunk, amelynek a magja az eltolásokból áll. □

4.2.13. Definíció (Szemidirekt kiegészítő, szemidirekt szorzat). Tegyük fel, hogy N normálosztó a G csoportban. Azt mondjuk, hogy a $H \leq G$ részcsoport az N egy szemidirekt kiegészítője, ha $N \cap H = \{1\}$ és $NH = G$. Ilyenkor G-t az N és a H szemidirekt szorzatának nevezzük és erre a $G = N \rtimes H$ jelölést használjuk. (Könnyen látható, hogy a direkt kiegészítő, illetve a direkt szorzat fogalmát kapjuk abban a speciális esetben, amikor H is normálosztó.)

Megjegyezzük, hogy – a direkt szorzat esetétől eltérően – a szemidirekt szorzatot az N és H önmagukban nem határozzák meg egyértelműen; ugyanabból az N-ből és H-ból általában többféle, egymással nem izomorf szemidirekt szorzatot lehet előállítani. Ezek egyike a direkt szorzat.

4.2.14. Következmény. *Az $I(E)$ csoportban az eltolások normálosztójának létezik szemidirekt kiegészítője, amely az $O(V)$ ortogonális csoporttal izomorf.*

Bizonyítás: Valóban, tetszőleges $O \in E$ pont rögzítésével kijelölhetjük az $O(E_O) \leq I(E)$ részcsoportot, amelyet L izomorfan képez $O(V)$-re. Az $O(E_O)$ részcsoport nyilván csak a triviális eltolást tartalmazza, továbbá a 4.2.10. Tétel alapján bármely izometria egy $O(E_O)$-beli elem és egy eltolás kompozíciója. □

Megjegyzések. (1) Látható, hogy bármelyik $O \in E$ pont kiszemelésével egyaránt szemidirekt kiegészítőhöz jutunk, azaz nincsen egyértelmű „természetes" választás a kiegészítő részcsoport konkrét megadásakor. Ez a jelenség szoros összhangban van azzal, hogy a kiegészítő nem normálosztó, hanem csak részcsoport. Könnyen meggondolható ugyanis, hogy az $O(E_O)$ alakú részcsoportok mind egymás konjugáltjai az $I(E)$ csoportban.

(2) Érdemes feltérképezni az $I(E)$ csoport szerkezetét egy ilyen szemidirekt felbontás segítségével. Legyen $E = \mathbf{R}^d$ és $O = \mathbf{0}$ az origó. Ekkor $I(\mathbf{R}^d) = \mathbf{R}^d \rtimes O(d)$ és bármely $f \in I(\mathbf{R}^d)$ izometria egyértelműen írható $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ alakban, ahol $A \in O(d)$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$. Feleltessük meg f-nek az $(A, \mathbf{b})$ párt, ezáltal bijektív kapcsolatot létesítettünk $I(\mathbf{R}^d)$ és az $O(d) \times \mathbf{R}^d$ szorzat között. (Az utóbbit nem csoportok direkt szorzataként, hanem csak a két halmaz Descartes-szorzataként fogjuk fel.) Ennek a bijekciónak az útján az $I(\mathbf{R}^d)$-beli csoportstruktúra az $O(d) \times \mathbf{R}^d$ szorzatot csoporttá teszi. Meghatározzuk a szorzás műveletét, azaz $(A_1, \mathbf{b}_1)$, $(A_2, \mathbf{b}_2) \in O(d) \times \mathbf{R}^d$ esetén az $(A_1, \mathbf{b}_1) \cdot (A_2, \mathbf{b}_2)$ szorzat komponenseit. Legyenek f_1 és f_2 a megfelelő izometriák, ekkor

$$(f_1 \circ f_2)(\mathbf{x}) = A_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1 = A_1A_2\mathbf{x} + A_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1,$$

vagyis $(A_1, \mathbf{b}_1) \cdot (A_2, \mathbf{b}_2) = (A_1A_2, \mathbf{b}_1 + A_1\mathbf{b}_2)$. Látszik, hogy a második komponensben megjelenő A_1 szerepe miatt ez a csoportművelet eltér a direkt szorzatban használatos művelettől.

4.2.15. Példák. Több, az algebrai vagy geometriai tanulmányainkból ismert csoport ad további példákat szemidirekt szorzatra: a $D_n = \mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2$ diédercsoport, az $S_n = A_n \rtimes \mathbf{Z}_2$ szimmetrikus csoport, bármely (X, V, Φ) affin tér esetén az $\mathrm{Aff}(X) = V \rtimes GL(V)$ affin csoport, az $O(d) = SO(d) \rtimes \mathbf{Z}_2$ ortogonális csoport (l. 4.5.2). A 4.2.10. Tétel következményeként beszélhetünk az E euklideszi tér irányítástartó izometriáinak $I^+(E) = I(E) \cap \mathrm{Aff}^+(E)$ csoportjáról; nyilván bármely X véges dimenziós valós affin térre $\mathrm{Aff}^+(X) = V \rtimes GL^+(V)$ és bármely E euklideszi térre $I^+(E) = V \rtimes SO(V)$, ahol $GL^+(V)$ a pozitív determinánsú $V \to V$ lineáris leképezések csoportja, az $SO(V) = O(V) \cap GL^+(V)$ csoport pedig a V euklideszi vektortér irányítástartó ortogonális transzformációiból áll.

4.3. Alterek, merőlegesség, szög, tükrözések

Bármely euklideszi affin térben bármely affin altér maga is euklideszi térré válik a skaláris szorzat leszűkítése útján.

4.3.1. Definíció (Ortogonális komplementer). Legyen S affin altér az E euklideszi térben, és legyen $U = \overrightarrow{S} \leq V$. Az U lineáris altérnek a V euklideszi vektortérben képezett $U^\perp$ komplementerét az S ortogonális komplementerének nevezzük, és a továbbiakban erre is az $S^\perp$ jelölést használjuk. Nyilvánvalóan érvényes az $(S^\perp)^\perp = U$ egyenlőség.

Vegyük észre, hogy euklideszi térben egy altér ortogonális komplementere nem valamely jól meghatározott altér ugyanabban a térben, hanem csak alterek egy párhuzamossági osztályának felel meg. Ha az ortogonális komplementert mint egyetlen konkrét alteret kívánjuk megadni, akkor az eddigieken túlmenően még legalább egy pontját is elő kell írnunk.

Ha E_1 és E_2 euklideszi terek, akkor a V_1 és V_2 euklideszi vektorterek V ortogonális direkt összege euklideszi térré teszi az $E = E_1 \times E_2$ direkt szorzatot. Ekkor tetszőleges $A_1 \in E_1$ és $A_2 \in E_2$ pontokat kiszemelve $E_1 \times \{A_2\}$ és $\{A_1\} \times E_2$ ortogonális komplementer irányú affin alterek E-ben.

4.3.2. Definíció (Irányvektor, normálvektor). Ha $L \subseteq E$ egyenes, akkor az egydimenziós $\overrightarrow{L} \subset V$ lineáris altér tetszőleges generátorelemét L irányvektorának nevezzük. Ha pedig $H \subset E$ hipersík, akkor H normálvektorán az egydimenziós $H^\perp \subset V$ lineáris altér tetszőleges $\mathbf{u}$ generátorelemét (azaz $H^\perp$ irányvektorát) értjük. Ha $\|\mathbf{u}\| = 1$, akkor normális egységvektorról beszélünk.

Tegyük fel, hogy H valamely $s \in E^\bullet$ affin forma zéróhalmazaként áll elő. Vegyünk fel E-ben egy ortonormált koordinátarendszert, ekkor s az $s(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \ldots + a_dx_d + b$ alakban írható (azaz a H hipersík egyenlete $a_1x_1 + \ldots + a_dx_d + b = 0$). Ekkor az $\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_d)$ vektor H-nak normálvektora.

4.3.3. Definíció (Ortogonális vetítés, ortogonális szimmetria). Legyen $S \subseteq E$ affin altér, amelynek az U lineáris altér az iránya, azaz $U = \overrightarrow{S} \leq V$. Az S altérre történő ortogonális vetítésnek (vagy merőleges vetítésnek) nevezzük az $U^\perp$ irányú $p : E \to S$ affin vetítést.

Az S altérre vonatkozó ortogonális szimmetriának nevezzük az $U^\perp$ irányú $\sigma_S : E \to E$ affin szimmetriát. Egy S-ben felvett origóval történő vektorizálás útján rögtön látható, hogy $\sigma_S \in I(E)$. Nyilván $\sigma_S^2 = id_E$.

Az alábbi állítás az ortogonális vetítés fontos távolsággeometriai jellemzését mondja ki, bizonyításához csak annyit kell felidézni, hogy derékszögű háromszögben az átfogó hosszabb a befogóknál.

4.3.4. Állítás. *Legyen $S \subseteq E$ affin altér és legyen $B = p(A) \in S$ az $A \in$ $\in E$ pont ortogonális vetülete S-en. Ekkor bármely $C \in S$, $C \neq B$ pontra $\rho(A, B) < \rho(A, C)$. Tehát B az egyetlen olyan S-beli pont, amelyre $\rho(A, S) =$ $= \rho(A, B)$.* □

4.3.5. Definíció (Egyenes és affin altér merőlegessége, szöge). Legyen $L \subset E$ egyenes, $S \subset E$ affin altér, $\dim S \geq 1$. Azt mondjuk, hogy L és S merőlegesek (jelben $L \perp S$ vagy $S \perp L$), ha az $\overrightarrow{L}$ és $\overrightarrow{S} \leq V$ lineáris alterekre $\overrightarrow{L} \leq \left(\overrightarrow{S}\right)^{\perp}$ (illetve, ezzel egyenértékű módon, ha $\overrightarrow{S} \leq \left(\overrightarrow{L}\right)^{\perp}$) teljesül. Két egyenes nyilván akkor és csak akkor merőleges, ha $\mathbf{v}_1$, illetve $\mathbf{v}_2$ irányvektoraikra $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$.

Az E-beli L_1 és L_2 egyenesek $\sphericalangle(L_1, L_2)$ szögén az irányvektoraik által bezárt két lehetséges (egymást π-re kiegészítő) szög közül a nem nagyobbat értjük. Két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha a szögük 0, és pontosan akkor merőleges, ha a szögük $\pi/2$.

Legyen $L \subset E$ egyenes, $S \subset E$ affin altér, $\dim S \geq 1$. Értelmezzük L és S szögét a következő módon. Ha $L \perp S$, akkor $\sphericalangle(L, S) = \pi/2$. Ha L és S nem merőleges, akkor az S-re történő ortogonális vetítésnél L képe egy L' egyenes, így L és S szögét definiálhatjuk az $\sphericalangle(L, S) = \sphericalangle(L, L')$ egyenlőséggel.

Az alábbi állítás tekinthető a 4.3.4. Állítás szögekre vonatkozó analogonjának.

4.3.6. Állítás. *Legyen $L \subset E$ egyenes, $S \subset E$ affin altér. Ha $L \perp S$, akkor L merőleges az összes S-ben fekvő egyenesre, ha pedig L nem merőleges S-re és M olyan S-ben fekvő egyenes, amely nem párhuzamos L-nek az S-beli vetületével, akkor $\sphericalangle(L, S) < \sphericalangle(L, M)$.*

Bizonyítás: A merőlegesség esete magától értetődő. Egyébként pedig szorítkozhatunk V-nek arra a háromdimenziós alterére, amelyet az L-hez, az L vetületéhez és az M-hez választott irányvektorok feszítenek ki. Ezeket az irányvektorokat választhatjuk olyan módon, hogy páronként legfeljebb derékszöget zárjanak be. A szóban forgó háromdimenziós altérnek az egységgömbjén az irányvektorok derékszögű gömbháromszöget jelölnek ki. A gömbi szinusztételből egyszerűen következik, hogy bármely olyan derékszögű gömbháromszögben, amelynek az oldalai legfeljebb $\pi/2$ hosszúságúak, az átfogó hosszabb bármelyik befogójánál. Ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget jelenti. □

Megjegyzések. (1) Az alterek (vagy vektorok) viszonyára vonatkoztatva az „ortogonális” és a „merőleges” jelzőket egymás szinonimáiként használhatjuk.

(2) A merőlegesség és a szög fenti definíciójában közömbös, hogy a szóban forgó két altér metszi-e egymást. A szög nyilván változatlan marad, ha a két alteret (nem feltétlenül egyenlő vektorokkal vett) eltoltjaikkal helyettesítjük.

(3) Ugyanezzel a módszerrel egyenes és affin altér helyett két tetszőleges affin altér esetére is értelmezhetnénk a merőlegesség fogalmát. Ezzel az ún. totálisan merőleges alterek definícióját kapnánk, ami nem egyezik meg mindenben a merőlegességről alkotott intuitív képünkkel (például háromdimenziós térben két sík nem lehetne merőleges).

(4) Két tetszőleges affin altér esetében a köztük fellépő szög fogalmán nem pusztán egyetlen számszerű mennyiséget szokás érteni; a pontos definíciótól itt eltekintünk. Céljainknak megfelel a szög fogalmának bevezetése azokban a speciális esetekben, amikor a két affin altér egyike egyenes, vagy pedig mindkettő hipersík.

4.3.7. Definíció (Affin altér és hipersík merőlegessége, két hipersík szöge). Legyen $d \geq 2$ és legyenek H_1 és H_2 hipersíkok E-ben. Azt mondjuk, hogy H_1 és H_2 merőleges hipersíkok (jelben $H_1 \perp H_2$), ha a V euklideszi vektortérben $\overrightarrow{H_1}^{\perp} \leq \overrightarrow{H_2}$ (illetve ezzel egyenértékű módon, ha $\overrightarrow{H_2}^{\perp} \leq \overrightarrow{H_1}$) teljesül.

Ezt a definíciót kézenfekvő módon ki lehet terjeszteni tetszőleges affin altér és hipersík esetére: az S affin altér merőleges a H hipersíkra (jelben $S \perp H$), ha $\overrightarrow{H}^{\perp} \leq \overrightarrow{S}$.

Ha $H_1, H_2 \subset E$ tetszőleges hipersíkok, válasszunk tetszőleges $L_1, L_2 \subset E$ ortogonális komplementer egyeneseket H_1-hez, illetve H_2-höz. Ezekre $L_1 \perp \perp L_2$ pontosan akkor áll fönn, ha $H_1 \perp H_2$. Általában pedig értelmezzük H_1 és H_2 szögét a $\sphericalangle(H_1, H_2) = \sphericalangle(L_1, L_2)$ egyenlőséggel. Két hipersík nyilván akkor és csak akkor merőleges, ha $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ normálvektoraikra $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = 0$.

Ugyanezt a $\sphericalangle(H_1, H_2)$ szöget a következőképpen is lehet értelmezni. Ha $H_1 \parallel \parallel H_2$, akkor $\sphericalangle(H_1, H_2) = 0$. Egyébként válasszunk M_1, illetve M_2 ortogonális komplementer altereket a $H_1 \cap H_2$ altér számára a H_1, illetve a H_2 altérben. Ekkor $\dim M_1 = \dim M_2 = 1$ és $\sphericalangle(H_1, H_2)$ az M_1 és M_2 egyenesek szögével egyenlő. (Ez rögtön látszik például a $H_1 \cap H_2$ altér E-re vonatkozó (2-dimenziós) ortogonális komplementerére történő ortogonális vetítés segítségével.)

4.3.8. Állítás. *Az euklideszi tér bármely izometriája megőrzi a 4.3.5-ben és 4.3.7-ben definiált szögeket.*

Bizonyítás: Az izometriák linearizáltja ortogonális, tehát vektorok szögét megtartja. Ezért az állítás rögtön következik abból, hogy a szóban forgó szögeket vektorok szögén keresztül definiáltuk. □

4.3.9. Definíció (Tükrözés, lineáris tükrözés). Ha $H \subseteq E$ affin hipersík E-ben, akkor a σ_H ortogonális szimmetriát (l. 4.3.3) H-ra vonatkozó tükrözésnek nevezzük. A σ_H tükrözést lineáris tükrözésnek mondjuk, ha $E = V$ és $\mathbf{0} \in H$.

Rögzített H mellett σ_H az egyetlen olyan nem-identikus izometria E-ben, amely a H hipersíkot pontonként fixen hagyja. Ez abból látható, hogy egy ilyen izometria linearizáltjának a $H^\perp$ egydimenziós alteret kell ortogonálisan önmagára képeznie.

Megjegyzés. A szakirodalomban előfordul, hogy tükrözésnek nevezik a σ_S ortogonális szimmetriát tetszőleges S affin altér (nem csak hipersík) esetében. Mi a tükrözés szót fenntartjuk a hipersíkra vonatkozó tükrözés megnevezésére. Ez alól kivételt csak a két- és háromdimenziós geometriában teszünk, ahol hagyományosan középpontos tükrözésnek nevezik az egypontú altérre vonatkozó affin szimmetriát.

4.3.10. Példa. Ha H lineáris hipersík a V euklideszi vektortérben és $\mathbf{u}$ normális egységvektor H számára (azaz $H = \mathbf{u}^\perp$ és $\|\mathbf{u}\| = 1$), akkor a σ_H leképezést a

$$\sigma_H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{u}\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (\mathbf{x} \in V)$$

formula adja meg. Ez rögtön látható abból, hogy az $(\mathbf{u}\mathbf{x})\mathbf{u}$ vektor az $\mathbf{x}$ vektornak a H hipersíkra merőleges komponense. A formula segítségével közvetlen számolással is könnyen ellenőrizhető, hogy σ_H megőrzi a vektorok skalárnégyzetét, ahonnan 4.1.6 alapján $\sigma_H \in O(V)$ következik.

4.3.11. Állítás. *Az $I(E)$ csoportban*

(1) *bármely tükrözésnek bármely csoportelemmel vett konjugáltja szintén tükrözés, továbbá*

(2) *bármely két tükrözés konjugált; pontosabban, ha $H_1, H_2 \subset E$ hipersíkok és az $f \in I(E)$ izometriánál $f(H_1) = H_2$, akkor $\sigma_{H_2} = f \circ \sigma_{H_1} \circ f^{-1}$.*

Bizonyítás: (1): Legyen H tetszőleges hipersík E-ben, és tekintsük az $f \circ \circ \sigma_H \circ f^{-1}$ izometriát, ahol $f \in I(E)$ tetszőleges. Ez az izometria pontonként fixen hagyja az $f(H)$ hipersíkot, és nyilván különbözik az identitástól, ezért a 4.3.9. Definíciót követő észrevétel szerint a $\sigma_{f(H)}$ tükrözéssel azonos.

(2): Az (1) állítás bizonyítása egyúttal (2)-t is adja. □

Ennek a szakasznak a hátralevő részében megmutatjuk, hogy a tükrözések generátorrendszert alkotnak az $I(E)$ csoportban (l. 4.3.15). Ehhez először egy elemi geometriából ismerős konstrukciót általánosítunk, ami maga után vonja elegendően sok tükrözés létezését.

4.3.12. Állítás. *$A, B \in E$, $A \neq B$ esetén a $H = \{P \in E : \rho(P, A) = \rho(P, B)\}$ halmaz hipersík E-ben, amelynél $\sigma_H(A) = B$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ olyan ortonormált koordinátarendszer E-ben, amelynél az $[A, B]$ szakasz felezőpontja az origóba, A és B pedig a d-edik koordinátatengelyre esik, például $\mathbf{x}(A) = (0, \ldots, 0, a)$ és $\mathbf{x}(B) = (0, \ldots, 0, -a)$ (ahol $a \neq 0$). Az $\mathbf{x}$ leképezés távolságtartása miatt

$$\mathbf{x}(H) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d : \rho\big(\mathbf{y}, \mathbf{x}(A)\big) = \rho\big(\mathbf{y}, \mathbf{x}(B)\big)\}.$$

Azt akarjuk megmutatni, hogy ez a halmaz az $\mathbf{R}^{d-1}$ koordináta-hipersíkkal azonos. Ez a koordinátákkal és a távolságokkal történő követlen számolással könnyen ellenőrizhető: $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$-re $\rho\big(\mathbf{y}, \mathbf{x}(A)\big) = \rho\big(\mathbf{y}, \mathbf{x}(B)\big)$ pontosan akkor érvényes, ha

$$\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{d-1}^2 + (y_d - a)^2} = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{d-1}^2 + (y_d + a)^2}\,,$$

azaz ha $y_d = 0$.

Az $\mathbf{R}^{d-1}$ hipersíkra vonatkozó $\mathbf{R}^d$-beli tükrözés nyilván fölcseréli az $\mathbf{x}(A)$ pontot az $\mathbf{x}(B)$ ponttal. A konstrukció folytán $\sigma_H = \mathbf{x}^{-1} \circ \sigma_{\mathbf{R}^{n-1}} \circ \mathbf{x}$, ezért $\sigma_H(A) = B$. □

4.3.13. Definíció (Felező merőleges hipersík). A 4.3.12-ben értelmezett H hipersíkot az A és B pontok felező merőleges hipersíkjának nevezzük.

4.3.14. Tétel. *$O(V)$ bármely eleme előállítható legfeljebb d darab lineáris tükrözés szorzataként.*

Bizonyítás: Azt az erősebb állítást bizonyítjuk be, hogy ha a $\varphi \in O(V)$ ortogonális transzformáció identikus egy i-dimenziós $U \leq V$ altéren, akkor φ előállítható legfeljebb $d - i$ darab lineáris tükrözés szorzataként. A tétel ennek az állításnak az $i = 0$ speciális esete.

Teljes indukciót alkalmazunk a $k = d - i$ kodimenzió szerint. A $k = 0$ esetben $\varphi = id_V$, így az állítás triviálisan igaz. Tegyük föl, hogy $k > 0$ és k-nál kisebb kodimenzió esetére az állítás igaz. Legyen adott egy $\varphi \in O(V)$ transzformáció, amely pontonként fixen hagy egy U alteret, melyre $\dim U = d - k$. Válasszunk olyan $\mathbf{x} \in V$ vektort, amelyre $\varphi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, és legyen H az $\mathbf{x}$ és $\varphi(\mathbf{x})$ felező merőleges hipersíkja. Ekkor φ távolságtartó volta miatt $U \subseteq H$. Így σ_H lineáris tükrözés, és a $\sigma_H \circ \varphi \in O(V)$ kompozíció egy U-nál határozottan bővebb altéren identikus (hiszen $\mathbf{x}$-et is fixen tartja). Alkalmazzuk az indukciós feltevést $\sigma_H \circ \varphi$-re: $\sigma_H \circ \varphi = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_j$, ahol $j < k$. Innen $\varphi = \sigma_H \circ \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_j$ legfeljebb k tükrözés szorzata. □

Megjegyzés. Tükrözések egy szorzata nyilvánvalóan elemenként fixen tartja a tükörhipersíkok metszetét, ezért ha $\varphi \in O(V)$ fixpontjainak a halmaza i-dimenziós altér, akkor φ-t nem lehet $(d-i)$-nél kevesebb tükrözés szorzataként előállítani.

4.3.15. Következmény. *$I(E)$ bármely eleme előállítható legfeljebb $d+1$ darab tükrözés szorzataként.*

Bizonyítás: Legyen $f \in I(E)$ tetszőleges. Vegyük észre, hogy ha f-nek van fixpontja, akkor egy fixpontot origónak választva vektorizálással 4.3.14-ből következik, hogy már d tükrözés is elegendő. Ha nincs fixpont, akkor egy tetszőleges $A \in E$ pontot kiszemelve tekintsük az A és $f(A)$ pontok H felező merőleges hipersíkját, és alkalmazzuk az előző észrevételt a $\sigma_H \circ f$ izometriára, amelynek az A pont fixpontja. □

Megjegyzés. Miután a tükrözések irányításváltók, a 4.3.15-beli előállításban páros sok tükrözésnek kell szerepelnie, ha a transzformáció irányítástartó, és páratlan soknak, ha irányításváltó.

4.4. Az izometriák szerkezete és osztályozása

Az euklideszi tér izometriáit koordinátásan, mátrixok felírásával vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a transzformációhoz alkalmasan illesztett koordinátarendszerben ez a felírás áttekinthetővé válik (l. 4.4.6), és alacsony dimenzióban elvezet az izometriák geometriai osztályozásához (l. 4.4.9).

Az elemi sík- és térgeometriából jól ismert az eltolás, síkban a pont körüli forgatás és tengelyes tükrözés, térben az egyenes körüli forgatás és síkra vonatkozó tükrözés fogalma. Később (l. 4.4.2, 4.4.8) további transzformációtípusokat is bevezetünk.

Először E-ben rögzítünk egy ortonormált koordinátarendszert, ezáltal feltehetjük, hogy eleve $E = \mathbf{R}^d$. Ha $f \in I(\mathbf{R}^d)$ tetszőleges izometria, akkor a 4.2.10. Tétel alapján $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, ahol $A \in O(d)$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$.

Tekintsük először a $d = 1$ és a $d = 2$ esetet:

- $d = 1$:

  $O(1) = \{\pm 1\}$ és $SO(1) = \{1\}$, így ha $f \in I(\mathbf{R})$, akkor vagy $f(x) = x + b$ (eltolás b-vel), vagy pedig $f(x) = b - x$ (tükrözés a $b/2$ pontra).

- $d = 2$: Ha $A \in O(2)$, akkor A oszlopai merőleges egységvektorok, ezért alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett

  $$A = R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{vagy} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

  Ezekről a mátrixokról rögtön leolvasható, hogy geometriailag milyen transzformációt létesítenek $\mathbf{R}^2$-ben: forgatást az origó körül α szöggel, illetve tükrözést az origón átmenő $\alpha/2$ irányszögű egyenesre.

Az általános esetben – amikor d tetszőleges – felidézzük az ortogonális transzformációk invariáns altereiről szóló lineáris algebrai tételt:

Egy euklideszi vektortér tetszőlegesen adott ortogonális transzformációja esetén a vektorteret fel lehet bontani legfeljebb 2-dimenziós invariáns alterek ortogonális direkt összegére.

4.4.1 Következmény. *Bármely ortogonális transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban a következő alakú:*

$$\begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R_{\alpha_p} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Itt a 2×2-es R_{α_i} forgatási blokkokon és az átlóbeli ± 1 elemeken kívül minden mátrixelem zérus. Ez az alak a blokkok és a ± 1 átlóelemek sorrendjétől eltekintve egyértelmű, ha megköveteljük, hogy minden $i = 1, \ldots, p$-re $0 < \alpha_i < \pi$ legyen. □

Ha a dimenzió 3, akkor forgatási blokkból legfeljebb egy szerepelhet. Aszerint, hogy a fennmaradó diagonális elem 1 vagy -1, tengely körüli forgatást, vagy forgatás és a tengelyre merőleges síkra történő tükrözés kompozícióját kapjuk.

4.4.2. Definíció (Forgatva tükrözés). A 3-dimenziós euklideszi térben forgatva tükrözésnek nevezzük valamely tengely körüli nem-identikus forgatásnak és egy a tengelyre merőleges síkra történő tükrözésnek a kompozícióját.

A két komponálandó transzformáció sorrendje közömbös; könnyen látható, hogy merőleges sík és tengely esetében ez a két izometria felcserélhető. Bármely forgatva tükrözésnek egyetlen fixpontja van. A középpontos tükrözések is tekinthetők forgatva tükrözésnek, ilyenkor a forgatási szög π. Vegyük észre, hogy a középpontos tükrözés esetétől eltekintve a forgatva tükrözés a tengelyét és a síkját egyértelműen meghatározza (ugyanis ilyenkor a tükörsík az egyetlen invariáns sík).

4.4.3. Következmény. *Az $O(3)$ csoport minden (identitástól különböző) eleme vagy origón átmenő tengely körüli forgatás, vagy origón átmenő síkra vonatkozó tükrözés, vagy pedig forgatva tükrözés.*

Bizonyítás: Ha a determináns pozitív (azaz $SO(3)$ egy eleméről van szó), akkor a 4.4.1-beli felírásban vagy $p = 1$ és a fennmaradó diagonális elem 1, vagy pedig $p = 0$ és a diagonális elemek között egy darab 1 és két darab -1 szerepel. Mindkét esetben tengely körüli forgatásról van szó.

Tegyük föl, hogy a determináns negatív. Ha $p = 1$, akkor a fennmaradó diagonális elem -1, így forgatva tükrözést kapunk. Ha $p = 0$, akkor a diagonális elemek közül vagy egy, vagy mindhárom -1, az első esetben síkra vonatkozó, a másodikban középpontos tükrözésről van szó. □

A következőkben megállapítjuk, hogy az euklideszi tér adott izometriáját egyértelműen lehet felbontani egy hozzá „a lehető legjobban illeszkedő" ortogonális lineáris transzformáció és egy eltolás szorzatára. (Eltolásra csak akkor lesz szükség, ha a transzformációnak nincs fixpontja, hiszen egy fixpontot origónak választva a transzformáció rögtön ortogonálissá tehető.) Ehhez az eljáráshoz nem célszerű előre rögzíteni a koordinátarendszert, ezért most nem is használunk koordinátákat.

4.4.4. Definíció (Fix (g))**.** Az E euklideszi tér tetszőleges $g \in I(E)$ izometriája esetén $\mathrm{Fix}\,(g) = \{A \in E : g(A) = A\}$ a g fixpontjaiból álló halmaz. Vektorizálással rögtön látható, hogy ha $\mathrm{Fix}\,(g) \neq \emptyset$, akkor $\mathrm{Fix}\,(g)$ affin altér E-ben.

4.4.5. Lemma. *Ha V euklideszi vektortér, akkor bármely $\varphi : V \to V$ ortogonális transzformációnál V előáll mint a* $\mathrm{Ker}\,(\varphi - id_V)$ *altér és az* $\mathrm{Im}\,(\varphi - id_V)$ *altér ortogonális direkt összege.*

Bizonyítás: A két altér dimenziójának az összege egyenlő V dimenziójával, ezért elegendő az ortogonalitást ellenőrizni. Legyen $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - id_V)$ és $\mathbf{y} \in V$, ekkor $\mathbf{x} \cdot \big(\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\big) = \mathbf{x} \cdot \varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. □

4.4.6. Tétel (Az izometriák természetes felbontása). *Bármely $f \in$ $\in I(E)$ izometriához egyértelműen található olyan $\mathbf{v} \in V$ vektor és olyan $g \in I(E)$ izometria, hogy*

(1) $X = \mathrm{Fix}\,(g) \neq \emptyset$,

(2) $\mathbf{v} \in \overrightarrow{X}$ *és*

(3) $f = t_{\mathbf{v}} \circ g$, *ahol $t_{\mathbf{v}}$ jelöli a $\mathbf{v}$ vektorral történő eltolást E-ben.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a 4.4.5. Lemmát a $\varphi = L(f) : V \to V$ ortogonális transzformációra. Válasszunk egy tetszőleges $A \in E$ pontot és bontsuk fel az $\overrightarrow{Af(A)}$ vektort a lemma szerinti merőleges komponensekre: $\overrightarrow{Af(A)} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, ahol $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ és $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\,(\varphi - id_V)$. Legyen végül $g = t_{-\mathbf{v}} \circ f$.

Állítjuk, hogy $\mathbf{v}$ és g eleget tesz a tétel követelményeinek. A konstrukció miatt $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{z}) - \mathbf{z}$ valamilyen $\mathbf{z} \in V$ vektorral. Tekintsük a $B = t_{-\mathbf{z}}(A)$ pontot, ezzel

$$\overrightarrow{Bf(B)} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(B)} = \mathbf{z} + \big(\mathbf{v} + \varphi(\mathbf{z}) - \mathbf{z}\big) + \varphi(-\mathbf{z}) = \mathbf{v},$$

ahonnan egyrészt adódik, hogy $g(B) = B$, azaz $B \in X$, másrészt $\overrightarrow{f(B)f\big(f(B)\big)} = \varphi\Big(\overrightarrow{Bf(B)}\Big) = \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ miatt $g\big(f(B)\big) = f(B)$, azaz $f(B) \in X$, és így $\mathbf{v} \in \overrightarrow{X}$ is következik.

A felbontás egyértelműségének igazolásához tegyük föl, hogy $f = t_{\mathbf{v}_1} \circ g_1$ és $f = t_{\mathbf{v}_2} \circ g_2$ a tétel szerinti felbontások. Legyen mint előbb $\varphi = L(f)$, és jelölje U a $\operatorname{Ker}(\varphi - id_V)$ alteret V-ben. Ekkor egyrészt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U$, másrészt $L(g_1) = L(g_2) = \varphi$ miatt a hozzájuk tartozó X_1 és X_2 alterekre $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_2} = U$, ahonnan $X_1 \parallel X_2$. Miután g_1 az X_1 alteret, g_2 az X_2 alteret pontonként fixen tartja, az ezekhez képest ortogonális komplementer állású alterek, azaz az $U^\perp$ irányú affin alterek mind invariáns alterei g_1-nek is és g_2-nek is. De akkor a $t_{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2} = g_2 \circ g_1^{-1}$ eltolásnak is invariáns alterei, azaz $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in U^\perp$. Viszont $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U$, ezért csak $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ lehet, ahonnan végül $g_1 = g_2$ következik. □

Megjegyzések. (1) Könnyen látható, hogy $t_{\mathbf{v}} \circ g = g \circ t_{\mathbf{v}}$.

(2) Az f izometria egyértelműen meghatározza az X affin alteret. X-et az f tengelyének szokás nevezni. Nyilván X maximális olyan affin altér E-ben, amelyet f önmagában eltolással mozgat. Ha f-nek van fixpontja, akkor persze $g = f$ és $X = \operatorname{Fix}(f)$.

(3) A tengely ismeretében meghatározható, hogy f-et minimálisan hány tükrözés szorzataként lehet előállítani:

$d - \dim X$, ha f-nek van fixpontja,

$d - \dim X + 2$, ha f-nek nincs fixpontja.

4.4.7. Következmény. *Bármely $f \in I(E)$ izometria alkalmas ortonormált koordinátarendszerben $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ alakú, ahol az A mátrix a 4.4.1-ben leírt alakú, és a $\mathbf{b}$ vektornak csak azok a koordinátái lehetnek zérustól különbözők, ahol az A mátrix átlójában* 1*-es szerepel.*

Bizonyítás: A koordinátarendszert válasszuk úgy, hogy az origó illeszkedjen f tengelyére, és a 4.4.6 szerinti g ortogonális transzformációhoz válasszuk a 4.4.1-beli bázist. □

4.4.8. Definíció (Csúsztatva tükrözés, csavarmozgás). Csúsztatva tükrözésnek nevezzük egy tetszőleges, legalább 2-dimenziós euklideszi tér olyan

izometriáját, amely előáll egy hipersíkra vonatkozó tükrözésnek és egy a hipersíkkal párhuzamos nemzérus vektorral történő eltolásnak a kompozíciójaként.

Csavarmozgást csak a 3-dimenziós euklideszi térben értelmezünk: egy egyenes körüli nem-identikus forgatásnak és egy a tengellyel párhuzamos nemzérus vektorral történő eltolásnak a kompozícióját nevezzük így.

Könnyen látható, hogy mindkét esetben a két komponálandó transzformáció felcserélhető, továbbá hogy mind a csúsztatva tükrözés, mind a csavarmozgás egyértelműen meghatározza ezeket a komponenseit.

4.4.9. Következmény. *Az euklideszi síkon bármely izometria eltolás, tükrözés, csúsztatva tükrözés vagy pont körüli forgatás. A háromdimenziós euklideszi tér bármely izometriája eltolás, tükrözés, csúsztatva tükrözés, egyenes körüli forgatás, csavarmozgás vagy forgatva tükrözés. Ha az identikus transzformációtól eltekintünk, akkor ezek a transzformációtípusok diszjunktak.*

Bizonyítás: Adott f izometriához tekintsük a 4.4.6. Tétel szerinti X alteret és $\mathbf{v}$ vektort. A $\dim X = 3,2,1,0$, illetve a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ lehetőségeket áttekintve a felsorolt esetek adódnak. □

Megjegyzés. Irányítással ellátott síkban a pont körüli forgatások szöge előjelesen értelmezhető, és értéke modulo 2π valós szám. Irányítással ellátott háromdimenziós térben a forgástengely irányítására is szükség van ahhoz, hogy az egyenes körüli forgatás szögének előjelet tulajdoníthassunk (a „jobbkézszabály” segítségével). Tehát az irányított térbeli irányított egyenesek körüli forgatások szöge a síkbeli esethez hasonlóan modulo 2π valós szám. Az, hogy a forgatás szögét előjelesen tekintjük-e vagy sem, a csoportbeli konjugáltsággal is kapcsolatban van. Tekintsük például az R_α, $R_\beta \in O(2)$ forgatásokat. Ezek akkor és csak akkor konjugált elemek az $O(2)$ csoportban, ha $\alpha \equiv \pm\beta$ (modulo 2π). Viszont az $SO(2)$ részcsoportban pontosan akkor konjugáltak, ha egyenlők (hiszen $SO(2)$ kommutatív), azaz ha $\alpha \equiv \beta$ (modulo 2π).

4.5. Az ortogonális csoportok szerkezete

Az euklideszi vektorterekhez tartozó ortogonális csoportok mind algebrai, mind topológiai és geometriai szempontból a legérdekesebb matematikai objektumok közé tartoznak. Az alábbiakban áttekintjük legfontosabb tulajdonságaikat. A dimenzió növekedtével ezek a tulajdonságok egyre nehezebben feltérképezhetők, ezért legtöbb megállapításunk az alacsony dimenziós esetekre vonatkozik. A három-, illetve négydimenziós esetben ehhez a kvaterniók algebrai struktúrája szolgál hatékony eszközzel. Rögzített koordináta-

rendszerben dolgozunk, ezért konkrétan a standard euklideszi térhez tartozó $O(d)$ és $SO(d)$ csoportokat vizsgáljuk.

Az $O(d)$ csoport az $\mathbf{R}^{d\times d} = \mathbf{R}^{d^2}$ euklideszi tér részhalmaza, ezért topológiai tulajdonságokat örököl a befoglaló térből. Miután a mátrixműveletek folytonos leképezések, $O(d)$ ún. topologikus csoport.

4.5.1. Topológiai észrevételek:

- $O(d)$ kompakt halmaz, hiszen zárt és korlátos $\mathbf{R}^{d^2}$-ben.
- Az $O(d)$ halmaz nem összefüggő, hiszen $\det : O(d) \to \{\pm 1\}$ folytonos és szürjektív leképezés.
- Az $SO(d)$ részcsoport útszerűen összefüggő. Ezt a 4.4.1-beli blokkfelbontás segítségével lehet belátni azt felhasználva, hogy a $t \mapsto R_{t\alpha_i}$ ($t \in [0,1]$) folytonos út összeköti az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ identikus mátrixblokkot az R_{α_i} mátrixblokkal.
- Topologikus csoportban egy részcsoport szerinti mellékosztályok mind homeomorfak, hiszen a csoportbeli eltolások homeomorfizmusok. Emiatt $O(d)$-nek két útszerűen összefüggő komponense van, amelyek közül $SO(d)$ az, amelyik az egységelemet tartalmazza (a csoport ún. „egységkomponense”).

4.5.2. Állítás. *$O(d) = SO(d) \rtimes \mathbf{Z}_2$ szemidirekt szorzat.*

Bizonyítás: Az $SO(d)$ részcsoport normálosztó, mert az indexe 2. Szemidirekt kiegészítő gyanánt tetszőleges másodrendű irányításfordító lineáris izometria választható; erre a legkézenfekvőbb választás $\mathbf{Z}_2 = \{I, \sigma_H\}$, ahol H tetszőleges lineáris hipersík. □

4.5.3. Állítás. *Az $O(d)$ csoport centruma $\{\pm I\}$.*

Bizonyítás: Nyilván $\{\pm I\}$ a centrumhoz tartozik; megmutatjuk a fordított tartalmazást. Tegyük föl, hogy $A \in O(d)$ felcserélhető $O(d)$ minden elemével, így speciálisan σ_H-val is bármely H lineáris hipersíkra. Minden $\mathbf{x} \in H$-ra $\sigma_H A\mathbf{x} = A\sigma_H\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, azaz $A\mathbf{x} \in H$. Tehát A-nak H invariáns altere. Viszont ekkor A skalárszorzat-tartása miatt $H^\perp$ is invariáns altere A-nak, azaz H (bármely) normálvektora A-nak sajátvektora. Így tehát A-nak minden nemzérus vektor sajátvektora, amiből következik, hogy A csak skalármátrix lehet. Miután A távolságtartó, ez a skalár csak ± 1 lehet. □

4.5.4. Következmény. *Ha d páratlan, akkor $O(d)$ izomorf az $SO(d) \times \mathbf{Z}_2$ direkt szorzattal, ha d páros, akkor nem.*

Bizonyítás: Egy csoportban egy 2 rendű részcsoport csak úgy lehet normálosztó, hogy a centrumhoz tartozik. Ezért $SO(d)$-nek akkor és csak akkor van direkt kiegészítője $O(d)$-ben, ha létezik olyan másodrendű elem $O(d)$ centrumában, amely nem tartozik $SO(d)$-hez. Ez az elem 4.5.3 szerint csak $-I$ lehet, és $\det(-I) = (-1)^d$ miatt $-I \notin SO(d)$ pontosan akkor teljesül, ha d páratlan. □

4.5.5. Algebrai észrevételek:

Sorra vesszük $d \leq 3$ mellett az $O(d)$ csoport legegyszerűbb algebrai tulajdonságait.

- $d = 1$:

  $O(1) = \{\pm 1\} \cong \mathbf{Z}_2$, $SO(1) = \{1\}$.

- $d = 2$:

  $SO(2)$ Abel-csoport és izomorf a komplex egységkör multiplikatív csoportjával. Az $O(2) - SO(2)$ mellékosztály csupa másodrendű elemből áll.

- $d = 3$:

  4.5.4 miatt $O(3) \cong SO(3) \times \mathbf{Z}_2$.

4.5.6. Tétel. *$SO(3)$ egyszerű csoport.*

Bizonyítás: A tétel bizonyításában kulcsszerepet játszanak $SO(3)$ bizonyos elemei, mégpedig az egyenesre vonatkozó ortogonális szimmetriák (azaz a térbeli π szögű forgatások). A szóhasználat egyszerűsítése végett nevezzük ezeket félfordulatoknak. Előrebocsátunk három észrevételt a félfordulatokkal kapcsolatban.

1. A félfordulatok generátorrendszert alkotnak $SO(3)$-ban. Valóban, 4.4.3 szerint SO(3) minden eleme forgatás, és bármely α szögű térbeli forgatás előáll két a tengelyére merőleges síkban fekvő és egymással $\alpha/2$ szöget alkotó tengelyű félfordulat szorzataként.

2. Bármely két félfordulat konjugált az $SO(3)$ csoportban. Valóban, ha egy térbeli f izometria az L egyenest az M egyenesre képezi, akkor az f-fel történő konjugálás az L körüli félfordulatot az M körüli félfordulatba viszi. (Az is rögtön látszik, hogy a félfordulatok pontosan a másodrendű elemek $SO(3)$-ban, és egy konjugáltosztályt alkotnak.)

3. Ha $SO(3)$ egy h eleme valamely L egyenest megfordít (azaz h-nak az L-re való megszorítása középpontos tükrözés L-en), akkor h félfordulat. Valóban, a π-től különböző szögű forgatások semmilyen egyenest

nem fordítanak meg. (Úgy is okoskodhatunk, hogy a 3×3-as $\begin{pmatrix} R_\alpha & \\ & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak csak $\alpha \equiv \pi \pmod{2\pi}$ esetén sajátértéke a -1 szám.)

Rátérünk $SO(3)$ egyszerű voltának igazolására. Legyen adott egy $G \trianglelefteq SO(3)$ normálosztó. Tegyük föl, hogy $G \neq 1$, azt kell belátnunk, hogy $G = SO(3)$. Ehhez elég egyetlen félfordulatot találni G-ben, mert akkor a második észrevétel miatt az összes féfordulat G-ben van, és így az első észrevétel miatt $G = SO(3)$.

Válasszunk egy $f \in SO(3)$ nemtriviális elemet, ez 4.4.3 miatt forgatás valamilyen tengely körül. Az f alkalmas hatványára áttérve feltehető, hogy ennek a forgatásnak a szöge tompaszög. Állítjuk, hogy létezik olyan L egyenes az origón át, amelyre $f(L) \perp L$. Valóban, valamely $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ nemzérus vektorra a $\mathbf{v}$ és $f(\mathbf{v})$ által bezárt szög folytonosan függ $\mathbf{v}$-től, felveszi a 0 értéket is (az f forgástengelyén), és felvesz $\pi/2$-nél nagyobb értéket is (az f tengelyére merőleges síkban). Ezért valahol a $\pi/2$ értéket is felveszi; válasszunk egy ilyen vektort L irányvektorának.

Jelölje g az L egyenes körüli félfordulatot, és tekintsük a $h = f^{-1} \circ g \circ \circ f \circ g \in SO(3)$ transzformációt. Ekkor $h \in G$, ugyanis egyrészt $f^{-1} \in G$, másrészt $g \circ f \circ g \in G$, hiszen $g \circ f \circ g$ az f egy konjugáltja és G normálosztó. Vegyük végül észre, hogy a h transzformáció megfordítja az L egyenest, ezért a harmadik észrevétel miatt h félfordulat. □

Megjegyzések. (1) Páratlan d (≥ 5) esetén hasonló (valamivel bonyolultabb) módszerrel bebizonyítható, hogy $SO(d)$ egyszerű csoport.

(2) Páros d estén $\{\pm I\} \trianglelefteq SO(d)$ mutatja, hogy $SO(d)$ nem egyszerű.

(3) Az (1)-ben említett bizonyítás a $d \geq 6$ páros esetben kimutatja, hogy $SO(d)$-ben $\{\pm I\}$ az egyetlen nemtriviális normálosztó (azaz $SO(d)$ egyszerű „modulo centrum", vö. 4.5.3). A kimaradó $d = 4$ esettel kapcsolatban l. alább a 4.5.13. Következményt.

4.5.7. Emlékeztető (A kvaterniók algebrája)

Megjegyzés. Annak érdekében, hogy a kvaterniók szorzásával ne legyen összetéveszthető, az $\mathbf{R}^4$-beli standard skaláris szorzatot most $\langle x, y \rangle$ jelöli.

- A kvaternióalgebra alaphalmaza a $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^3$ négydimenziós valós vektortér, amelyben a standard báziselemeket az $1, i, j, k$ jelekkel jelöljük.

- A kvaterniók szorzása $\mathbf{R}$-bilineáris $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ leképezés, amelyet a báziselemeken az $1x = x$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = = -kj = i$, $ki = -ik = j$ formulák definiálnak. Ezzel a művelettel $\mathbf{H}$

asszociatív algebra $\mathbf{R}$ fölött az 1 egységelemmel. Az egységelem skalárszorosai az $\mathbf{R}$-rel izomorf $\mathbf{R}1$ részalgebrát alkotják $\mathbf{H}$-ban, amelyet az $x \mapsto x1$ izomorfizmus segítségével azonosnak tekintünk a valós számtesttel.

- Az i (illetve j, k) kvaternióval pontosan azok a kvaterniók felcserélhetők, amelyek 1 és i (illetve 1 és j, 1 és k) lineáris kombinációi.

- Az $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kvaternió valós részének az x_0 számot, képzetes részének az $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kvaterniót, konjugáltjának az $\overline{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ kvaterniót nevezzük.

- Az alábbi formulák közvetlen számolással könnyen levezethetők:

$$\begin{aligned}
\overline{xy} &= \overline{y}\,\overline{x}\,, \\
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}) \quad (\text{és így } x\overline{x} = \langle x, x\rangle \geq 0)\,, \\
\|x\| &= \sqrt{x\overline{x}}\,, \\
\|xy\| &= \|x\| \cdot \|y\|\,, \\
a, b \in \mathbf{R}^3\text{-ra} \quad ab &= -\langle a, b\rangle + a \times b\,.
\end{aligned}$$

(A vektoriális szorzás értelmezéséhez $\mathbf{R}^3$-ban az i, j, k rendezett bázist – az 1.8.1-ben $\mathbf{R}^d$-vel kapcsolatban tett megállapodással összhangban – pozitív irányításúnak tekintjük.)

- Minden nemzérus $\mathbf{H}$-beli elemnek létezik multiplikatív inverze: $x^{-1} = \overline{x}/\|x\|^2$.

4.5.8. Észrevételek (A kvaterniók geometriája)

- Az $\mathbf{S}^3 = \{u \in \mathbf{H} : \|u\| = 1\}$ kvaternió-egységgömb topologikus csoport a kvaterniók szorzására nézve.

- $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^3 \cap \mathbf{R}^3 = \{q \in \mathbf{H} : q^2 = -1\}$. Bármely $q \in \mathbf{S}^2$-re az 1 és q által kifeszített $\mathbf{H}$-beli kétdimenziós altér a komplex számtesttel izomorf részalgebra; az izomorfizmust az $1 \leftrightarrow 1$, $q \leftrightarrow i \in \mathbf{C}$ megfeleltetés adja.

- Bármely $u \in \mathbf{S}^3$ elem alkalmas $q \in \mathbf{S}^2$ és $\vartheta \in [0, \pi]$ választásával felírható $u = \cos\vartheta + q \sin\vartheta$ alakban. Ha $u \neq \pm 1$, akkor egyértelműen meghatározza q-t és ϑ-t.

4.5.9. Definíció (az $\mathbf{S}^3 \to SO(3)$ fedőhomomorfizmus). Rögzített $u \in \mathbf{S}^3$ mellett a $\Phi(u) : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $\Phi(u)(x) = uxu^{-1}$ leképezés lineáris $\mathbf{R}$ fölött és normatartó, így $\Phi(u) \in O(4)$. A valós kvaterniók $\mathbf{R} \leq \mathbf{H}$ részalgebrája pontonként fix, ezért $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^\perp$ invariáns altere $\Phi(u)$-nak. Szorítsuk meg

$\Phi(u)$-t az $\mathbf{R}^3$ altérre, ezáltal kapjuk a $\phi(u) \in O(3)$ ortogonális mátrixot. A ϕ leképezés az u változó függvényében folytonos homomorfizmus, így $\mathbf{S}^3$ összefüggő volta miatt ϕ képe nem lép ki $O(3)$ egységkomponenséből, $SO(3)$-ból (vö. 4.5.1). Ezzel definiáltuk a $\phi : \mathbf{S}^3 \to SO(3)$ homomorfizmust.

4.5.10. Lemma. *Bármely* $u = \cos\vartheta + q \sin\vartheta \in \mathbf{S}^3$ $\big(q \in \mathbf{S}^2, \vartheta \in (0, \pi)\big)$ *esetén* $\phi(u) \in SO(3)$ *az* $\mathbf{R}q$ *irányított egyenes körüli* 2ϑ *szögű forgatás.*

Bizonyítás: $\phi(u)q = uqu^{-1} = (\cos\vartheta + q \sin\vartheta)\, q\, (\cos\vartheta - q \sin\vartheta) = q$, emiatt a $\phi(u)$ forgatás tengelye csak az $\mathbf{R}q$ egyenes lehet.

A forgatás szögének megállapításához azt kell igazolnunk, hogy $a \in \mathbf{S}^2$, $a \perp q$ esetén $a \times \phi(u)a = (\sin 2\vartheta)q$. Az alábbi számolásokban kihasználjuk, hogy $a \perp q$ miatt $aq = -qa = a \times q$, valamint hogy a q vektornak az a egységvektorra merőleges összetevőjét (azaz magát q-t) az $a \times (q \times a)$ formula szolgáltatja (l. 0.2.14):

$$\begin{aligned}
\phi(u)a &= (\cos\vartheta + q \sin\vartheta)\, a\, (\cos\vartheta - q \sin\vartheta) = \\
&= a \cos^2\vartheta - qaq \sin^2\vartheta - aq \sin\vartheta\cos\vartheta + qa \sin\vartheta\cos\vartheta = \\
&= a \cos 2\vartheta + qa \sin 2\vartheta, \\
a \times \phi(u)a &= a \times (a \cos 2\vartheta + qa \sin 2\vartheta) = \\
&= a \times (qa) \sin 2\vartheta = \\
&= a \times (q \times a) \sin 2\vartheta = \\
&= q \sin 2\vartheta\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.5.11. Tétel. *A* $\phi : \mathbf{S}^3 \to SO(3)$ *homomorfizmus szürjektív, és* $\operatorname{Ker}\phi = \{\pm 1\}$.

Bizonyítás: $\operatorname{Ker}\phi$ azokat az egységkvaterniókat tartalmazza, amelyek minden kvaternióval felcserélhetők, így a 4.5.7-ban tett észrevételek miatt $\operatorname{Ker}\phi = \{\pm 1\}$. A szürjektivitás rögtön következik a 4.5.10. Lemmából, hiszen $SO(3)$ minden eleme az origón áthaladó valamilyen egyenes körüli forgatás. $\square$

4.5.12. Következmény. *Az* $\mathbf{S}^3$ *csoportban két elem akkor és csak akkor konjugált, ha a valós részük egyenlő.*

Bizonyítás: Valóban, két elem konjugált volta pontosan azt jelenti, hogy alkalmas u-val $\Phi(u)$ egyiküket a másikba viszi. A $\Phi(u)$ alakú transzformációk az $\mathbf{R}^3$ képzetes hipersíkkal párhuzamos affin altereket önmagukban mozgatják, és 4.5.11 miatt egy ilyen altéren belül az összes egyenlő normájú vektort végigsöprik. $\square$

Megjegyzés. A 4.5.11. Tétel érdekes topológiai következményeket von maga után:

- Az $SO(3)$ topologikus csoport izomorf az $\mathbf{S}^3$ csoportnak a $\{\pm 1\}$ kételemű normálosztó szerinti faktorával. Eszerint $SO(3)$ mint topologikus tér úgy állítható elő az $\mathbf{S}^3$ gömbből, hogy annak átellenes pontpárjait ekvivalensnek tekintjük és faktorizálunk ezzel az ekvivalenciarelációval.

- A ϕ leképezés kétrétegű fedése az $SO(3)$ térnek. Miután $\mathbf{S}^3$ egyszeresen összefüggő, ez az $SO(3)$ univerzális fedése.

- Az $SO(3)$ tér fundamentális csoportja kételemű (hiszen az univerzális fedés kétrétegű). Tekintsük bármely rögzített irányított egyenes körül a $t \cdot 2\pi$ $(0 \leq t \leq 1)$ szögű forgatások seregét. Ez olyan hurok $SO(3)$-ban, amely a fundamentális csoport nemtriviális elemét reprezentálja, hiszen az $1 \in \mathbf{S}^3$ pontból induló $\mathbf{S}^3$-beli felemeltje a 4.5.10. Lemma miatt a -1 elemben végződik, tehát nem hurok.

4.5.13. Definíció (az $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \to SO(4)$ fedőhomomorfizmus). Rögzített $(u, v) \in \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ mellett a $\psi(u, v) : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $\psi(u, v)(x) = uxv^{-1}$ leképezés lineáris $\mathbf{R}$ fölött és normatartó, így $\psi(u, v) \in O(4)$. (Nyilván $\phi(u) = \psi(u, u)$.) A ψ leképezés az (u, v) változó függvényében folytonos homomorfizmus az $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ topologikus csoportról az $O(4)$ topologikus csoportba, így $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ összefüggő volta miatt képhalmaza az $SO(4)$ egységkomponensben van. Ezzel definiáltuk a $\psi : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \to SO(4)$ homomorfizmust.

4.5.14. Tétel . *A $\psi : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \to SO(4)$ homomorfizmus szürjektív, és* $\operatorname{Ker} \psi = \{\pm(1,1)\}$.

Bizonyítás: Ha $(u, v) \in \operatorname{Ker} \psi$, akkor $1 = \psi(u, v)(1) = uv^{-1}$ miatt $u = v$. Ekkor viszont $\phi(u) = \psi(u, u)$ miatt $u \in \operatorname{Ker} \phi$, és így a 4.5.11. Tételt használva $u = \pm 1$.

A szürjektivitás igazolása céljából legyen $A \in SO(4)$ tetszőleges. Tekintsük az $u = A1$ egységkvaterniót, és definiáljuk a $B \in SO(4)$ mátrixot a $Bx = u^{-1}Ax$ formulával. (B valóban $SO(4)$-beli, mert az u-val történő balszorzás normatartó, azaz ortogonális lineáris leképezés, és $\mathbf{S}^3$ összefüggő volta miatt benne van $O(4)$ egységkomponensében.) A definíció folytán $B1 = 1$, ezért $\mathbf{R}^3 = 1^\perp$ invariáns altere B-nek, és B leszűkítése $\mathbf{R}^3$-ra $SO(3)$ egy eleme. A 4.5.11. Tétel miatt ez az elem előáll $\phi(v)$-ként alkalmas $v \in \mathbf{S}^3$-mal, ami azt jelenti, hogy $B = \Phi(v)$. Ekkor minden $x \in \mathbf{H}$-ra $Ax = uBx = u\Phi(v)(x) = uvxv^{-1} = \psi(uv, v)(x)$, azaz $A = \psi(uv, v)$. □

4.5.15. Következmény. *Az $SO(4)$ csoportban léteznek a centrumtól különböző nemtriviális normálosztók is.*

Bizonyítás: Valóban, az $\mathbf{S}^3 \times \{1\}$ és $\{1\} \times \mathbf{S}^3$ direkt szorzandók ψ-nél származó képei ilyenek. □

Megjegyzések. (1) Ha $SO(4)$-et mint az $\mathbf{S}^3$ gömb transzformációinak csoportját tekintjük, akkor a 4.5.14-beli két normálosztó az $\mathbf{S}^3$ csoport balszorzásaiból (azaz az $x \mapsto ux$ leképezésekből), illetve jobbszorzásaiból (az $x \mapsto xv$ leképezésekből) áll. A 4.5.14. Tétel szerint ennek a két normálosztónak csak I és $-I$ a közös elemei, valamint az $\mathbf{S}^3$ gömb bármely irányítástartó ortogonális transzformációja előáll egy balszorzás és egy jobbszorzás kompozíciójaként. Erre a jelenségre majd visszatérünk a 4.8. szakaszban, amikor a háromdimenziós gömbi geometria sajátosságait derítjük föl.

(2) 4.5.14-ből is hasonló topológiai következtetéseket vonhatunk le, mint 4.5.11-ből: a $\psi : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \to SO(4)$ homomorfizmus kétrétegű fedőleképezés; itt is $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ egyszeresen összefüggő, ezért ψ az univerzális fedés, és $SO(4)$ fundamentális csoportja is a kételemű csoport. (Topológiai eszközökkel bebizonyítható egyébként, hogy minden $d \geq 3$ esetén $SO(d)$ fundamentális csoportja kételemű.)

4.6. Hasonlóság

4.6.1. Definíció (Hasonlóság). Legyenek (X, ρ) és (X', ρ') metrikus terek. Egy $f : X \to X'$ leképezést hasonlóságnak nevezünk X és X' között, ha bijektív és minden $x, y \in X$, $x \neq y$-ra a $\rho'\big(f(x), f(y)\big)/\rho(x, y)$ arány ugyanakkora, azaz f távolságarány-tartó. Ha X legalább kételemű, akkor f ezt az arányt egyértelműen meghatározza. Ezt a pozitív számot nevezzük az f hasonlóság arányának. (Az egypontú metrikus terek közötti leképezések mint hasonlóságok arányának az 1 számot tekintjük.)

Ha X rögzített metrikus tér, akkor az X-et saját magába képező hasonlóságok csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot X hasonlósági csoportjának nevezzük és $\mathrm{Sim}\,(X)$-szel jelöljük. Ha $\mathrm{Sim}\,(X)$ minden eleméhez hozzárendeljük az arányát, akkor a pozitív valós számok multiplikatív csoportjába képező $\mathrm{Sim}\,(X) \to \mathbf{R}_+$ homomorfizmust nyerjük. Ennek a homomorfizmusnak a magja az $I(X)$ izometriacsoport.

Elsősorban az $E \to E$ hasonlóságokat és a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoportot vizsgáljuk, ahol E euklideszi tér. Ebben az egybevágóságokról már megismert tételekre támaszkodhatunk, ezért a hasonlóságok áttekintése nem igényel lényeges új gondolatokat. Két euklideszi térben fekvő ponthalmazt hasonlónak mondunk, ha létezik olyan hasonlóság, amely az egyiket a másikra képezi.

4.6.2. Példák

- Legyen $\mathbf{S}^{d-1} = \{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| = 1\}$ az $\mathbf{R}^d$-beli egységgömb ($d \geq 1$). Az $\mathbf{S}^{d-1}$ metrikus tér hasonlóságai szükségképpen izometriák (ahogyan ez

így van bármely korlátos metrikus térben), azaz $\mathrm{Sim}\,(\mathbf{S}^{d-1}) = I(\mathbf{S}^{d-1})$. Így tehát a gömbi geometriában a hasonlóság fogalmára nincs szükség.

- Ha E legalább 1-dimenziós euklideszi tér, akkor a (± 1-től különböző arányú) E-beli homotéciák példaként szolgálnak olyan hasonlósági transzformációkra, amelyek nem egybevágóságok. A $H_{P,\lambda} : E \to E$ homotécia aránya $|\lambda|$.

4.6.3. Lemma. *Euklideszi térben bármely hasonlóság előállítható egy egybevágóság és egy tetszőlegesen előírható középpontú homotécia kompozíciójaként.*

Bizonyítás: Legyen λ az $f \in \mathrm{Sim}\,(E)$ hasonlóság aránya. Válasszunk tetszőlegesen egy $P \in E$ pontot és tekintsük a $g = H_{P,1/\lambda} \circ f$ kompozíciót. Ekkor $g \in I(E)$ és így $f = H_{P,\lambda} \circ g$ a kívánt előállítás. □

4.6.4. Következmény. $\mathrm{Sim}\,(E) = I(E) \rtimes \mathbf{R}_+$.

Bizonyítás: Valamely (tetszőlegesen) rögzített $P \in E$ pont mellett a P középpontú, pozitív arányú homotéciák csoportja nyilván az $\mathbf{R}_+$ csoporttal izomorf. Ez a részcsoport az $I(E) \trianglelefteq \mathrm{Sim}\,(E)$ normálosztó egy szemidirekt kiegészítője a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoportban, hiszen egyrészt ezek között a homotéciák között csak az identitás távolságtartó, másrészt 4.6.3 miatt a két részcsoport együtt generátorrendszer. □

Most áttekintjük az euklideszi egybevágóságok szerkezetét leíró fő tételeinknek (4.2.10-nek és 4.4.6-nak) a hasonlóságokra vonatkozó következményét, illetve kiegészítését. A 4.2.10. Tétel hasonlóságokra érvényes megfelelője azonnal következik a 4.6.3. Lemma felhasználásával:

4.6.5. Tétel. *Egy $f : E \to E$ leképezés pontosan akkor hasonlóság, ha $f \in \mathrm{Aff}\,(E)$ és $L(f) \in \mathbf{R}_+ \cdot O(V)$.*

Egyenértékű átfogalmazással: az $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ hasonlóságok pontosan az $f(\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$) alakú leképezések. Itt a $\lambda > 0$, $A \in O(d)$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$ adatokat f egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás: A két megfogalmazás ekvivalenciája egy (tetszőleges) ortonormált koordinátarendszer felvétele után nyilvánvaló.

Ha az f leképezés $f(\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ alakú, akkor f egy ortogonális lineáris transzformáció, egy homotécia és egy eltolás kompozíciója, tehát hasonlóság.

Legyen most $f \in \mathrm{Sim}\,(\mathbf{R}^d)$ tetszőlegesen adott. Írjuk f-et 4.6.3 felhasználásával az $f = H_{\mathbf{0},\lambda} \circ g$ alakban, ahol $\lambda > 0$ és $g \in I(\mathbf{R}^d)$. Ekkor 4.2.10 miatt alkalmas $A \in O(d)$-vel és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$-vel $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + (1/\lambda)\mathbf{b}$, ezért $f(\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$). Itt λ szükségképpen az f hasonlóság arányával egyezik meg, A és $\mathbf{b}$ egyértelműsége pedig a 4.2.10. Tételbeli egyértelműségi állításból következik. □

4.6.6. Következmény. *Bármely hasonlóság szögtartó: ha $f : E \to E'$ hasonlóság, $L \subset E$ egyenes, és $S \subset E$ legalább 1-dimenziós affin altér, akkor $f(L)$ és $f(S)$ szöge egyenlő L és S szögével.*

Bizonyítás: Két egyenes között a szöget az irányvektoraik szögén keresztül definiáltuk, ezt pedig mind az ortogonális lineáris leképezések, mind a homotéciák, mind az eltolások nyilvánvalóan megőrzik. Az egyenes és affin altér szögének esete pedig 4.3.5 szerint visszvezethető a két egyenes közti szög esetére, felhasználva, hogy ha $p : E \to S$, illetve $p' : E' \to f(S)$ jelöli a megfelelő ortogonális vetítéseket, akkor $p' \circ f = f \circ p$. □

Az egybevágóságok természetes felbontásáról szóló 4.4.6. Tétel valódi (tehát 1-től különböző arányú) hasonlóságokra vonatkozó megfelelőjét egyszerűvé teszi a hasonlóságok fixpontjairól szóló alábbi észrevétel.

4.6.7. Lemma. *Ha $f \in \mathrm{Sim}\,(E)$ nem egybevágóság, akkor f-nek létezik (egyetlen) fixpontja.*

Bizonyítás: A Banach-féle fixponttétel („kontrakciós elv") alkalmazható f-re vagy f^{-1}-re (aszerint, hogy az f hasonlóság λ arányára $\lambda < 1$, illetve $\lambda > 1$). Tegyük fel például, hogy $\lambda < 1$, ekkor egy tetszőlegesen kiszemelt $P \in E$ ponttal a P, $f(P)$, $f\big(f(P)\big)$, …, $f^n(P)$, … sorozat Cauchy-sorozat az E teljes metrikus térben. A sorozat tehát konvergens, és a Q limeszpontra $f(Q) = Q$. □

4.6.8. Tétel. *Ha az $f \in \mathrm{Sim}\,(E)$ hasonlóság nem izometria, akkor alkalmas ortonormált koordinátarendszerben $f(\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$ alakban írható, ahol $\lambda > 0$ és az A mátrix a 4.4.1-ben leírt alakú.*

Bizonyítás: A 4.6.7. Lemmát alkalmazva vektorizáljunk az f fixpontjával mint origóval, majd alkalmazzuk 4.6.3-at és 4.4.1-et. □

4.6.9. Definíció (Hipergömb, gömb). Tegyük fel, hogy $d \geq 1$. Adott $P \in E$ és $r > 0$ mellett P középpontú, r sugarú E-beli hipergömbnek nevezzük a

$$G = \{A \in E \,:\, \rho(P, A) = r\}$$

ponthalmazt. Könnyen látható, hogy a G halmaz egyértelműen meghatározza P-t és r-et. Két (vagy több) hipergömböt koncentrikusnak mondunk, ha középpontjuk közös. Gömbnek nevezzük E-ben az E legalább egydimenziós affin altereiben mint euklideszi terekben fekvő hipergömböket. A G gömb dimenzióján a $\dim G = \dim\langle G\rangle - 1$ számot értjük.

Az egydimenziós esetben gömb helyett kört mondhatunk. Az E tér 0-dimenziós gömbjei pontosan a két különböző E-beli pontból álló rendezetlen pontpárok. A d-dimenziós térben a hipergömbök pontosan a $(d-1)$-dimenziós gömbök.

Az $A \in E$ pontot a P középpontú, r sugarú G hipergömbre vonatkozóan belső pontnak nevezzük, ha $\rho(P, A) < r$, külső pontnak, ha $\rho(P, A) > r$. A G-re nézve belső pontok nyílt konvex halmazt alkotnak E-ben, amelynek a határa G-vel egyenlő. Így például ha $A, B \in G$, akkor az $[A, B]$ szakasz minden relatív belső pontja G-re nézve belső pont. Emiatt bármely E-beli egyenesnek legfeljebb két pontja tartozhat G-hez.

4.6.10. Példa. Legyenek $P, A \in E$, $P \neq A$ adott pontok. Tekintsük az A pont képét az E összes olyan egybevágóságánál, amely a P pontot fixen tartja (azaz az $f(A)$ pontokat, ahol $f \in O(E_P)$). Ezeknek a képpontoknak a halmaza a P középpontú, $\rho(P, A)$ sugarú hipergömb. Egyrészt ugyanis bármelyik ilyen f-re $\rho\big(f(A), P\big) = \rho(A, P)$, másrészt pedig ha $\rho(B, P) = \rho(A, P)$, akkor $\sigma_H(A) = B$, ahol H az A és B közti felező merőleges hipersík. (Nyilván ugyanezt a hipergömböt kapjuk A-nak a P pontra vonatkozó tükörképéből, vagy akár a kapott halmaz tetszőleges másik eleméből kiindulva is.)

4.6.11. Állítás. *Az euklideszi terek körében bármely hasonlóság gömböt (ugyanakkora dimenziójú) gömbbe visz.*

Bizonyítás: Valóban, ha $f : E \to E'$ hasonlóság, és $F \subseteq E$ affin altér, akkor a $P \in F$ középpontú, r sugarú F-beli hipergömb képe nyilvánvalóan az $f(P)$ középpontú, λr sugarú $f(F)$ altérbeli hipergömb, ahol λ az f hasonlóság aránya. □

4.6.12. Tétel. *Legyenek E és E' euklideszi terek,* $\dim E = \dim E' \geq 2$, $f : E \to E'$ *bijekció. Ha minden $G \subset E$ hipergömbre $f(G) \subset E'$ hipergömb, akkor f hasonlóság.*

Bizonyítás: Először az affin geometria alaptétele (l. 1.6.8) felhasználásával megmutatjuk, hogy f affin izomorfizmus, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy f^{-1} affin izomorfizmus. Ez utóbbihoz azt elegendő ellenőrizni, hogy bármely három (különböző) kollineáris E'-beli pont f^{-1}-nél származó képei is kollineárisak. Ez viszont f hipergömbtartó voltából nyilvánvaló: ha nem volnának kollineárisak, akkor valamilyen E-beli G hipergömbre illeszkednének, és így f-képeik (azaz az eredeti, E'-beli három kollineáris pont) az $f(G) \subset E'$ hipergömbhöz tartoznának, ami lehetetlen.

Tehát f affin izomorfizmus. Feltehető (ortonormált koordinátarendszert választva és alkalmas $E' \to E$ izometriával komponálva), hogy $E = E' = \mathbf{R}^d$, $f \in \mathrm{Aff}\,(\mathbf{R}^d)$, és $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Ekkor tehát $f \in GL(d, \mathbf{R})$. Az $\mathbf{S}^{d-1}$ egységgömböt f az origó körüli λ sugarú gömbbe viszi valamilyen $\lambda > 0$-val. Emiatt az $(1/\lambda)f$ lineáris leképezés normatartó, ahonnan 4.1.6-ra hivatkozva $(1/\lambda)f \in O(d)$, azaz $f \in \lambda O(d)$ következik. □

Megjegyzés. Lényegében ugyanezzel a bizonyítással a tétel olyan formában is igaz, hogy hipergömbök szerepeltetése helyett valamely rögzített $1 \leq k \leq$

$\leq d-1$ mellett azt tesszük föl, hogy minden E-beli k-dimenziós gömb f-nél származó képe is k-dimenziós gömb. Speciálisan (a $k=1$ esetben) azt kapjuk, hogy a legalább 2-dimenziós euklideszi terek körtartó bijekciói pontosan a hasonlósági transzformációk. A körtartó leképezések fontos szerepet játszanak az inverzív geometriában, és később majd a projektív geometriában és a hiperbolikus geometriában is.

4.7. Magasabb dimenziós gömbi geometria

A gömbi geometria alapvető definícióival és eszközeivel a háromdimenziós eulideszi térben fekvő gömbfelület esetében már 0.3-ban megismerkedtünk. Most áttekintjük, hogyan lehet ezeket a fogalmakat tetszőleges dimenzió esetére kiterjeszteni. A gömbi geometria konkrét modelljéül egy euklideszi vektortér egységgömbjét választjuk; ezáltal a gömbi geometria az euklideszi geometria részeként tárgyalható.

4.7.1. Definíció (Gömbi tér, gömbi altér). Legyen V tetszőleges euklideszi vektortér, $\dim V = d+1 \geq 1$. Gömbi térnek, pontosabban d-dimenziós gömbi térnek nevezzük V egységgömbjét, azaz az $S = \{\mathbf{a} \in V : \|\mathbf{a}\| = 1\}$ halmazt.

Ha $U \leq V$ tetszőleges $(k+1)$-dimenziós lineáris altér, akkor az $S \cap U$ halmaz maga is k-dimenziós gömbi tér. Az S gömbi tér így keletkező részhalmazait k-dimenziós gömbi altereknek nevezzük $(0 \leq k \leq d)$.

Például az S-beli átellenes pontpárok a 0-dimenziós gömbi alterek. Az egydimenziós gömbi alterek pontosan S főkörei; ezek játsszák az egyenesek szerepét a gömbi geometriában.

Ha $V = \mathbf{R}^{d+1}$ a standard euklideszi koordinátatér, akkor egységgömbjére a szokásos $\mathbf{S}^d$ jelölést használjuk; ez a standard d-dimenziós gömbi tér.

4.7.2. Definíció (Érintővektor, érintőtér). Legyen S gömbi tér V-ben, $\mathbf{a} \in S$. Egy $\mathbf{v} \in V$ vektort az S gömbi tér $\mathbf{a}$ pontbeli érintővektorának nevezünk, ha $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$.

Rögzített $\mathbf{a} \in S$ mellett az $\mathbf{a}$-beli érintővektorok az $\mathbf{a}^\perp$ lineáris hipersíkot alkotják V-ben. Ezt a d-dimenziós vektorteret az S gömbi tér $\mathbf{a}$-beli érintőterének nevezzük, és $T_{\mathbf{a}}S$-sel jelöljük.

Ha $S' \subseteq S$ gömbi altér és $\mathbf{a} \in S'$, akkor a $T_{\mathbf{a}}S'$ érintőteret az S' generálta V-beli altérre vonatkozóan állítjuk elő mint $\mathbf{a}$ ortogonális kiegészítő hipersíkját, ezért ilyenkor $T_{\mathbf{a}}S'$ lineáris altér a $T_{\mathbf{a}}S$ érintőtérben.

Megjegyzés. Szemléletünk azt kívánná, hogy az érintőterek a gömböt valóban „érintsék”, azaz annak csak egyetlen pontját tartalmazzák. Számolásainkban

nagyobb haszonnal jár viszont, ha az érintőterek vektorterek, ezért a gömbből az egyetlen $\mathbf{a}$ közös pontot tartalmazó $\mathbf{a} + (\mathbf{a}^{\perp})$ affin hipersík helyett a vele párhuzamos lineáris alteret, magát $\mathbf{a}^{\perp}$-t tekintjük érintőtérnek. Ezzel a megállapodással csak most, a gömbi geometria tárgyalása során élünk; később, amikor euklideszi affin térben fekvő gömbök érintőaltereiről beszélünk, azok a gömb egyetlen pontját tartalmazó affin alterek lesznek majd.

4.7.3. Definíció (Főkör irányvektora és paraméteres megadása). Legyen $K \subseteq S$ főkör az S gömbi térben, és legyen $\mathbf{a} \in K$. Ekkor $K = S \cap U$, ahol $U \leq V$ kétdimenziós lineáris altér. Egy $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{a}}S$ érintővektort a K főkör $\mathbf{a}$ pontbeli irányvektorának mondunk, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{u}$ az U alteret generálják. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$ követelmény miatt az $\mathbf{u}$ vektort K és $\mathbf{a}$ nemzérus skalártényező erejéig egyértelműen meghatározzák.

Megfordítva, ha teszőlegesen adott az $\mathbf{a} \in S$ pont és az $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{a}}S$ nemnulla érintővektor, akkor egy és csak egy olyan K főkör létezik S-ben, amely áthalad $\mathbf{a}$-n és amelynek $\mathbf{u}$ irányvektora, mégpedig K az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{u}$ generálta lineáris altér metszete S-sel. Tegyük fel most, hogy $\mathbf{u}$ is egységvektor. Ekkor az

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{a} + \sin t\, \mathbf{u}$$

képlet paraméteresen állítja elő a K főkört. Valóban, egyrészt $\mathbf{r}(t)$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{u}$ kombinációja lévén hozzátartozik a szóban forgó lineáris altérhez, másrészt közvetlen számolással rögtön látszik, hogy $\|\mathbf{r}(t)\| = 1$. (A t paraméter nyilván az előjeles középponti szögelfordulást méri az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{u}$ generálta síkban.)

4.7.4. Definíció (Gömbi szakasz). Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két különböző és nem átellenes pont az S gömbi térben (azaz, egyenértékű módon, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan független egységvektorok a V euklideszi vektortérben), akkor egyértelműen létezik olyan K főkör S-ben, amely $\mathbf{a}$-t és $\mathbf{b}$-t tartalmazza. Ennek a főkörnek a rövidebbik (azaz π-nél kisebb középponti szögű) ívét tekintjük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ végpontú gömbi szakasznak. A K főkör $\mathbf{a}$-beli irányvektorai között el tudjuk különíteni a $\mathbf{b}$ irányába mutató vektorokat a többitől: egy $\mathbf{u}$ irányvektorról akkor mondjuk, hogy $\mathbf{b}$ felé mutat, ha a $\mathbf{b} = \lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{u}$ felírásban $\mu > 0$. Ennek alapján egy gömbi szakasz végpontjaiban egyértelműen tudunk a másik végpont irányában egységnyi irányvektorokat felvenni.

4.7.5. Definíció (Gömbi távolság). Az $S \subset V$ gömbi térben az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in$ $\in S$ pontok $\rho_g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gömbi távolságán az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok által bezárt szöget értjük. Tehát a gömbi távolságot a

$$\rho_g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^{-1}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

képlet adja meg.

4.7.6. Lemma. *Az S halmazon az euklideszi távolság és a gömbi távolság kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást a $\rho_g = 2\sin^{-1}(\rho/2)$ formulával.*

Bizonyítás: A két távolság kapcsolata rögtön látható abból az egységnyi átfogójú derékszögű háromszögből, amelynek az origóban levő $\rho_g/2$ szögével szemben a $\rho/2$ hosszúságú befogója áll. Az $x \mapsto 2\sin^{-1}(x/2)$ függvény valóban bijektív (szigorúan monoton növő) a [0,2] és a $[0,\pi]$ intervallum között. □

4.7.7. Definíció (Szög a gömbi geometriában). Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a} \in S$ pont a $K_1, K_2 \subseteq S$ főkörök közös pontja. Az $\mathbf{a}$ pontban K_1 és K_2 szögén az $\mathbf{a}$-beli irányvektoraik által bezárt két lehetséges (egymást π-re kiegészítő) szög közül a nem nagyobbat értjük.
Ha két gömbi szakasz egy közös végpontjukban, $\mathbf{a}$-ban csatlakozik, akkor a két gömbi szakasz által bezárt szöget úgy értelmezzük mint az $\mathbf{a}$ pontból a másik két végpontba vezető gömbi szakaszokhoz tartozó két $\mathbf{a}$-beli irányvektor közti szöget. Ez a szög bármely legalább 0 és legfeljebb π értéket felvehet.

4.7.8. Állítás. *A főkörök 4.7.3-beli paraméterezésénél tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $|t_1 - t_2| \leq \pi$ esetén*

$$\rho_g\big(\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\big) = |t_1 - t_2|\,,$$

azaz a paraméterértékek különbsége (lokálisan) a megfelelő pontok gömbi távolságát adja meg.

Bizonyítás: Az állítás tulajdonképpen nyilvánvaló abból, hogy a 4.7.3-beli paraméterezés a középpontban mért szögelfordulás szerint történik. A formula akár közvetlen számolással is ellenőrizhető, ha mindkét oldal koszinuszát vesszük és a koszinuszfüggvény addíciós képletét használjuk. □

Megjegyzés. A gömbi távolság képlete ugyanazt a távolságfogalmat adja, mint amit 0.3-ban a kétdimenziós gömbi geometriában használtunk. Két, közös ponttal bíró gömbi főkör, illetve két csatlakozó gömbi szakasz mindig benne van egy legfeljebb kétdimenziós gömbi altérben, és egy ilyen alteret tekintve nyilvánvaló, hogy a szög mostani definíciója egybeesik a gömbháromszögek kapcsán régebben tisztázott szögfogalommal. Ezek miatt S kétdimenziós gömbi altereiben a távolságokkal és a szögekkel kapcsolatban mindaz érvényes, amit a gömbfelület geometriájáról 0.3-ban megállapítottunk. Három S-beli ponthoz is mindig található olyan legfeljebb kétdimenziós gömbi altér, amely őket tartalmazza, ezért a magasabb dimenziós gömbi térben fekvő gömbháromszögek is ugyanúgy értelmezhetők, mint a kétdimenziós gömbfelületen. A gömbháromszögekkel kapcsolatos trigonometriai tételek és egyenlőtlenségek is mind érvényesek a magasabb dimenziós gömbi geometriában.

Ezek közül a legalapvetőbbet, a gömbi koszinusztételt most újra bebizonyítjuk az itt bevezetett eszközök segítségével. Ennek az az oka, hogy ez a gondolatmenet ad mintát a hiperbolikus síkon később végzendő trigonometriai vizsgálatainkhoz, l. 11.3.

4.7.9. Tétel (Gömbi koszinusztétel). *Ha a, b és c jelöli egy gömbháromszög oldalainak gömbi hosszát, és α jelöli az a oldallal szemközti szöget, akkor*

$$\cos a \;=\; \cos b \cos c \;+\; \sin b \sin c \cos \alpha\,.$$

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in S$ rendre az a, b, c oldalakkal szemközti csúcsok. Ekkor a gömbi távolság 4.7.5-beli definíciója alapján $\cos a = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Válasszunk egységnyi irányvektorokat az $\mathbf{a}$ végpontban az $\mathbf{a}$-ból kiinduló két oldalszakasz irányában, mégpedig $\mathbf{u}$ mutasson $\mathbf{b}$ felé, $\mathbf{v}$ pedig $\mathbf{c}$ felé. Ekkor a szög 4.7.7-beli definíciója szerint $\cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Paraméterezzük 4.7.3 szerint a gömbháromszög $\mathbf{a}$-ból induló oldalait az $\mathbf{a}$ kezdőpontot és az $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ irányvektort használva. A 4.7.8. Állítás miatt ezek a paraméterezések a $t = c$, illetve $t = b$ helyettesítéssel éppen a $\mathbf{b}$, illetve a $\mathbf{c}$ csúcsot állítják elő:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \cos c\;\mathbf{a} + \sin c\;\mathbf{u} \\ \mathbf{c} &= \cos b\;\mathbf{a} + \sin b\;\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Szorozzuk össze skalárisan a két bal oldalt, illetve a két jobb oldalt, ebből, felhasználva, hogy $\mathbf{a} \perp \mathbf{u}$ és $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$, a

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos b\,\cos c\;\|\mathbf{a}\|^2 \;+\; \sin b\,\sin c\;\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

formulát kapjuk, ami $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos a$, $\|\mathbf{a}\| = 1$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos \alpha$ alapján a tétel állításával egyenértékű. □

4.7.10. Következmény. *A ρ_g gömbi távolságfüggvény metrika az S halmazon, és annak az euklideszi térből örökölt topológiáját származtatja.*

Bizonyítás: Egyedül a háromszög-egyenlőtlenség nem nyilvánvaló ρ_g definíciója alapján a metrikától megkövetelt tulajdonságok közül. Ha S három pontja egy főkörre illeszkedik, akkor köztük a háromszög-egyenlőtlenség közvetlen szemrevételezéssel látható, ha pedig nem, azaz a három pont gömbháromszöget feszít ki, akkor a gömbháromszögekre vonatkozó, 0.3.5.(1)-ben bebizonyított szigorú háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk.

Az S halmazra szorítkozva a ρ euklideszi távolságfüggvény és a ρ_g gömbi távolságfüggvény egymás pozitív konstansszorosaival becsülhetők (mégpedig 4.7.6-ból adódóan $\rho \le \rho_g \le \pi\rho$), ezért ez a két metrika ugyanazt a topológiát származtatja S-en. □

A továbbiakban az (S, ρ_g) metrikus tér izometriáival és izometriacsoportjával foglalkozunk. Világos, hogy az S-et magában foglaló V euklideszi vektortér bármely ortogonális transzformációját S-re megszorítva izometriát kapunk. A következő tétel szerint a gömbi tér minden izometriája így áll elő.

4.7.11. Tétel. $I(S, \rho_g) = O(V)$. *Pontosabban, a két csoport között izomorfizmust létesít a V-beli ortogonális transzformációk S-re történő leszűkítése.*

Bizonyítás: Csak azt kell ellenőriznünk, hogy bármely S-et önmagára képező, ρ_g szerint izometrikus leképezés kiterjeszthető V ortogonális transzformációjává.

Egy ortonormált bázis rögzítésével azonosítsuk V-t az $\mathbf{R}^{d+1}$ koordinátatérrel és S-et az $\mathbf{S}^d$ standard gömbbel. Legyen $f \in I(S)$ tetszőleges izometria. Ekkor az $\mathbf{R}^{d+1}$-beli standard bázisvektorok f-nél származó képei szintén ortonormált bázist alkotnak $\mathbf{R}^{d+1}$-ben, hiszen páronként $\pi/2$ gömbi távolságra lévő egységvektorok. Létezik tehát olyan $A \in O(d+1)$ ortogonális transzformáció, amelynél $A\mathbf{e}_i = f(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, \ldots, d+1)$.

Azt állítjuk hogy $f = A\,|_S$. Ha $\mathbf{x} \in S$ tetszőleges pont, akkor minden $i = 1, \ldots, d+1$-re

$$\rho_g\big(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_i)\big) = \rho_g(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \rho_g(A\mathbf{x}, A\mathbf{e}_i) = \rho_g\big(A\mathbf{x}, f(\mathbf{e}_i)\big)\,,$$

azaz az $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ pontnak és a $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$ pontnak ugyanakkora a gömbi távolsága az $f(\mathbf{e}_i)$ pontok mindegyikétől. Ezért a 4.7.6. Lemmára hivatkozva ugyanez a „légvonalban mért” euklideszi távolságokra is igaz. Miután mind $\mathbf{y}$, mind $\mathbf{z}$ egységvektor, látjuk, hogy $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ ugyanakkora euklideszi távolságra van egy $\mathbf{R}^{d+1}$-beli affin bázis minden elemétől, mégpedig a $\mathbf{0}$, $f(\mathbf{e}_1)$, …, $f(\mathbf{e}_{d+1})$ pontoktól. Ez pedig a 4.2.11. Lemma bizonyításában tett észrevételek miatt azt mutatja, hogy $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, amit bizonyítani akartunk. □

A gömbi tér izometriáival kapcsolatban most egy olyan jelenséget tanulmányozunk, amely csak magasabb dimenzióban jelenik meg, a kétdimenziós gömbfelület geometriájában még nem.

4.7.12. Definíció (Clifford-eltolás). Legyen (X, ρ) tetszőleges metrikus tér. Egy $f : X \to X$ izometriát Clifford-eltolásnak nevezünk, ha minden pontot ugyanakkora távolságra mozdít el, azaz ha az $x \mapsto \rho\big(x, f(x)\big)$ valós függvény konstans X-en.

Vegyük észre, hogy ha az f és g izometriák konjugáltak az $I(X)$ izometriacsoportban, és egyikük Clifford-eltolás, akkor a másik is az. Valóban, ha $g = h \circ f \circ h^{-1}$, akkor $\rho\big(x, g(x)\big) = \rho\big(x, h\big(f\big(h^{-1}(x)\big)\big)\big) = \rho\big(y, f(y)\big)$, ahol $y = h^{-1}(x)$.

Az euklideszi terek eltolásai nyilván Clifford-eltolások. A 4.4.6. Tétel birtokában azt is könnyű látni, hogy euklideszi térben egy Clifford-eltolás csakis

eltolás lehet. Egy euklideszi izometria ugyanis a tengelyének a pontjait (és csak azokat) mozdítja el a lehető legkisebb mértékben, tehát ha ez az elmozdítás konstans mértékű, akkor a tengely – amelyen az izometria eltolással hat – csak az egész tér lehet.

A gömbi geometriában is léteznek Clifford-eltolások: az ún. antipodális leképezés, amely minden ponthoz az átellenesét (azaz minden vektorhoz a (-1)-szeresét) rendeli, bármely dimenzióban Clifford-eltolás. Ez a példa azonban intuitív szempontból nem igazán kielégítő, hiszen szemléletünk az eltolástól valamiféle folytonos mozgás lehetőségét várja. Az euklideszi geometriában bármely $t_{\mathbf{v}}$ eltolás valóban belefoglalható eltolásoknak egy ún. „egyparaméteres csoportjába", mégpedig a $t_{s\mathbf{v}}$ eltolások seregébe, ahol s valós paraméter. (Vegyük észre, hogy itt az $s \mapsto t_{s\mathbf{v}}$ hozzárendelés folytonos homomorfizmus a valós számok additív csoportjából az euklideszi tér izometriáinak a csoportjába.)

Meglepő módon ha a gömbi tér dimenziója páratlan, akkor az antipodális leképezés belefoglalható Clifford-eltolások egyparaméteres csoportjába.

4.7.13. Példa. Páratlan d mellett tekintsük $\alpha \in \mathbf{R}$-re a

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} R_\alpha & & & \\ & R_\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_\alpha \end{pmatrix} \in SO(d+1)$$

mátrixot, ahol mindegyik 2×2-es R_α blokk ugyanaz az α szögű forgatásmátrix. Nyilván az $\alpha \mapsto C(\alpha)$ leképezés folytonos homomorfizmus és $C(\pi) = -I$. Azt is könnyű ellenőrizni, hogy $C(\alpha)$ Clifford-eltolást létesít az $\mathbf{S}^d$ gömbi téren minden α-ra: ha $\|\mathbf{x}\| = 1$, akkor a $\big(C(\alpha)\mathbf{x}\big) \cdot \mathbf{x} = \cos\alpha$ skaláris szorzat, és így a $\rho_g\big(C(\alpha)\mathbf{x}\,, \mathbf{x}\big)$ gömbi távolság is független $\mathbf{x}$-től. Páros dimenziójú gömbi tér esetében viszont az identitáson és az antipodális leképezésen kívül nincsen Clifford-eltolás. Ezt a 4.4.1 Következményt használva tudjuk a legegyszerűbben belátni: ha a befoglaló tér dimenziója páratlan, akkor bármely ortogonális transzformációnak szükségképpen van 1 abszolút értékű sajátértéke, és emiatt a gömbi térnek van olyan pontja, amely vagy fixen marad, vagy az átellenesébe képeződik.

Páratlan d esetén a $C(\alpha) \in I(\mathbf{S}^d)$ Clifford-eltolásokat elegáns módon lehet származtatni komplex számok használatával. Ha ugyanis $d = 2n - 1$, akkor $\mathbf{S}^d$ felfogható mint a $\mathbf{C}$ felett n-dimenziós $\mathbf{C}^n$ komplex tér egységgömbje. Az $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ komplex egységkör valamely $e^{\alpha i}$ elemével történő szorzás, azaz a

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{\alpha i} z_1, \ldots, e^{\alpha i} z_n)$$

leképezés az $\mathbf{S}^d$ gömböt saját magába képezi, és ennek a leképezésnek a mátrixa a szokásos $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ azonosítás mellett éppen a fenti $C(\alpha)$-val egyezik

meg. Ha kiválasztunk egy tetszőleges $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ vektort, akkor ennek az összes $C(\alpha)$-val vett Clifford-eltoltjai az $\mathbf{S}^1\mathbf{z} = (\mathbf{Cz}) \cap \mathbf{S}^d$ halmazt alkotják. Itt $\mathbf{Cz}$ komplex egyenes, ami kétdimenziós lineáris altér $\mathbf{R}$ fölött, ezért $\mathbf{S}^d$-vel vett metszete főkör. Azt kaptuk tehát, hogy a $C(\alpha)$ Clifford-eltolások seregét végrehajtva $\mathbf{S}^d$ bármely pontja főkör mentén mozog. Az így előálló főkörök nyilván páronként diszjunktak és együtt lefedik $\mathbf{S}^d$-t.

4.7.14. Állítás. *Ha d páratlan, akkor az $\mathbf{S}^d$ standard gömbi térben bármely Clifford-eltolás alkalmas α mellett a 4.7.13-beli $C(\alpha)$ transzformáció konjugáltja az $I(\mathbf{S}^d)$ izometriacsoportban.*

Bizonyítás: Az identitás $\alpha = 0$, az antipodális leképezés $\alpha = \pi$ mellett áll elő $C(\alpha)$-ként. Ha adott egy ezektől különböző Clifford-eltolás az $\mathbf{S}^d$ térben, akkor írjuk föl az őt létesítő ortogonális transzformációt alkalmas ortonormált bázisban a 4.4.1 Következmény szerinti blokkmátrix-alakban. Az i-edik invariáns altérben az R_{α_i} forgatási blokk a gömb pontjait α_i gömbi távolságra mozdítja el. Ezért az összes α_i egyenlő, azaz a közös értéket α-val jelölve ebben a bázisban a transzformáció mátrixa $C(\alpha)$. A standard bázisra áttérve tehát $C(\alpha)$ konjugáltját kapjuk. □

4.7.15. Definíció (Clifford-párhuzamos halmazok). Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok az (X, ρ) metrikus térben. Azt mondjuk, hogy A és B Clifford-párhuzamosak, ha az $a \mapsto \rho(a, B)$ függvény konstans az A halmazon és a $b \mapsto \rho(b, A)$ függvény konstans a B halmazon. (Itt $Y \subseteq X$ esetén $\rho(x, Y)$ jelöli az $x \in X$ pont távolságát az Y halmaztól az X térben, azaz az $\inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}$ számot.)

Például euklideszi térben a párhuzamos affin alterek nyilván Clifford-párhuzamosak, és azt is könnyű látni, hogy két affin altér csak úgy lehet Clifford-párhuzamos, ha a szokásos értelemben párhuzamosak. Érdekes módon a gömbi geometriában is bőségesen léteznek Clifford-párhuzamos gömbi alterek.

4.7.16. Példa. Tekintsük a Clifford-eltolások 4.7.13-beli $C(\alpha)$ seregénél a pontok mozgása által leírt főkörök rendszerét. Azt állítjuk, hogy e főkörök közül bármelyik kettő Clifford-párhuzamos. Legyen $K = \mathbf{S}^1\mathbf{z}$ és $L = \mathbf{S}^1\mathbf{w}$ két ilyen főkör. Ha α a valós számokat futja be (elég persze egy 2π hosszúságú intervallumot befutnia), akkor a $C(\alpha)\mathbf{z}$ pont a K főkört járja be. Ezért

$$\rho_g\big(\mathbf{z}\,, L\big) = \rho_g\big(C(\alpha)\mathbf{z}\,, C(\alpha)(L)\big) = \rho_g\big(C(\alpha)\mathbf{z}\,, L\big)$$

mutatja, hogy az L-től mért gömbi távolság konstans K mentén, és ugyanez érvényes fordított szereposztással is L helyett K-t és $\mathbf{z}$ helyett $\mathbf{w}$-t írva.

Legyen most K és L két tetszőleges főkör az S gömbi térben. Legyenek $\mathbf{a} \in K$, $\mathbf{b} \in L$ olyan pontok, amelyekre $\rho_g(\mathbf{a}\,, \mathbf{b}) = \rho_g(\mathbf{a}\,, L) = \rho_g(\mathbf{b}\,, K)$. (Ilyen

$(\mathbf{a}\,,\mathbf{b}) \in K \times L$ mindig létezik, hiszen K és L kompakt volta miatt a ρ_g függvénynek a $K \times L$ halmazon van minimumhelye.) Válasszunk egy-egy egységnyi hosszú irányvektort, $\mathbf{u}$-t K-hoz és $\mathbf{v}$-t L-hez az $\mathbf{a} \in K$, illetve $\mathbf{b} \in$ $\in L$ pontban.

4.7.17. Tétel. *Tegyük föl, hogy K és L Clifford-párhuzamos főkörök S-ben. Ekkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok fenti választása mellett*

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{b}\,, \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{a}\,, \quad \textit{és} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \pm\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\,.$$

Megfordítva, ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$ pontokban ezeknek a feltételeknek eleget tevő $\mathbf{u} \in$ $\in T_{\mathbf{a}}S$, illetve $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{b}}S$ érintő egységvektorokat választunk, akkor az ezekkel mint irányvektorokkal megadott, $\mathbf{a}$-n, illetve $\mathbf{b}$-n áthaladó két S-beli főkör Clifford-párhuzamos.

Bizonyítás: Paraméterezzük K-t és L-et az $\mathbf{r}_K(s) = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{r}_L(t) = \cos t\,\mathbf{b} + \sin t\,\mathbf{v}$ képlettel 4.7.3 szerint, és képezzük a futó vektorok skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned} f(s,t) &= (\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{u}) \cdot (\cos t\,\mathbf{b} + \sin t\,\mathbf{v}) = \\ &= \cos s \cos t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \sin s \cos t\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} + \cos s \sin t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \sin s \sin t\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Ha K és L Clifford-párhuzamosak, a $\rho_g\big(\mathbf{r}_K(s)\,,\mathbf{r}_L(t)\big) = \cos f(s,t)$ függvénynek minimumhelye, azaz magának f-nek maximumhelye a $(0{,}0) \in \mathbf{R}^2$ pont. Emiatt f mindkét parciális deriváltja az origóban zérussal egyenlő: $(\partial f/\partial s)(0{,}0) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = (\partial f/\partial t)(0{,}0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ezt felhasználva $f(s,t) = \cos s \cos t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \sin s \sin t\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Ismét kihasználva, hogy K és L Clifford-párhuzamosak, az $\mathbf{r}_K(\pi/2)$ pont és az L főkör távolságának koszinusza szintén $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-vel egyenlő, ezért az $f(\pi/2,t)$ függvény maximuma is ennyi. Viszont $f(\pi/2,t) = \sin t\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ahonnan $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ következik.

A megfordítás indoklásában feltehetjük, hogy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq 0$, ellenkező esetben ugyanis $\mathbf{b}$-t vagy $\mathbf{v}$-t (vagy mindkettőt) kicserélhetjük a $(-$ $-1)$-szeresére. A közös értéket p-vel jelölve az f függvényre az $f(s,t) =$ $= (\cos s \cos t + \sin s \sin t) \cdot p = \cos(s-t) \cdot p$ képletet kapjuk. Ebből rögtön látszik, hogy az f függvény maximuma p-vel egyenlő, és ezt az értéket a függvény bármely rögzített s mellett is és bármely rögzített t mellett is felveszi (mégpedig nyilván $s = t$ esetén). Ezért a két főkör Clifford-párhuzamos. $\square$

A 4.7.17. Tétel olyan erős korlátozást ad a Clifford-párhuzamos főkörök állására nézve, hogy a szóba jövő legalacsonyabb dimenzióban, azaz amikor a gömbi tér dimenziója 3, az adott főkörhöz adott ponton át húzható Clifford-párhuzamosok számára vonatkozó következtetést is levonhatunk belőle.

4.7.18. Következmény. *Legyen adott a K főkör és a $\mathbf{b}$ pont a háromdimenziós S gömbi térben. Ha $\mathbf{b} \in K$ vagy a $\mathbf{b}$ vektor merőleges K síkjára, akkor pontosan egy $\mathbf{b}$-n áthaladó, K-val Clifford-párhuzamos főkör létezik S-ben, egyébként pedig pontosan kettő.*

Bizonyítás: A $\mathbf{b} \in K$ esetben nyilván maga K az egyetlen K-val Clifford-párhuzamos főkör $\mathbf{b}$-n át. Ha a $\mathbf{b}$ vektor merőleges K síkjára, akkor $\mathbf{b}$ gömbi távolsága K minden pontjától $\pi/2$, ami a lehető legnagyobb távolság egy pont és egy főkör között. A K-tól $\pi/2$ gömbi távolságra lévő pontok halmaza S-ben éppen egy főkör, mégpedig az, amelyet a K síkjának ortogonális komplementere metsz ki S-ből. (Itt kihasználtuk, hogy S háromdimenziós.) Ebben az esetben tehát ez az egyetlen főkör Clifford-párhuzamos K-val a $\mathbf{b}$-n áthaladó főkörök közül.

Tegyük most föl, hogy a $\mathbf{b}$ vektor nem fekszik benne K síkjában, és nem is merőleges rá. Legyen $\mathbf{a} \in K$ a $\mathbf{b}$-hez legkisebb gömbi távolságra levő pont K-ban, ekkor a $p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ számra $0 < p < 1$ érvényes. Válasszunk K-hoz $\mathbf{u} \in$ $\in T_{\mathbf{a}}S$ egységnyi hosszúságú irányvektort az $\mathbf{a}$ pontban, ekkor $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$ mellett $\mathbf{u} \perp \mathbf{b}$ is teljesül. A $\mathbf{b}$-n áthaladó, K-val Clifford-párhuzamos főkör számára a $\mathbf{b}$ pontbeli $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{b}}S$ egységnyi hosszú irányvektort a 4.7.17-beli feltételek szerint kell választanunk. A $\mathbf{v}$ egységvektornak egyrészt merőlegesnek kell lennie az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan független vektorokra, azaz ($\mathbf{u}$-val együtt) az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^{\perp}$ kétdimenziós altérhez kell tartoznia, másrészt eleget kell tennie az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \pm p$ követelménynek is. Ennek az egyenletnek a szóban forgó altér egységvektorai közül két átellenes vektorpár tesz eleget, ezért ezek mint irányvektorok pontosan két főkört határoznak meg. □

Megjegyzés. Bár a főkörök Clifford-párhuzamossága reflexív és szimmetrikus reláció, 4.7.18-ból látszik, hogy nem tranzitív, hiszen egy főkörrel két egymást metsző másik főkör is lehet Clifford-párhuzamos. Ezt az észrevételt pontosítani tudjuk majd a Clifford-párhuzamosság 4.8.8. Tételbeli jellemzése után.

4.8. Hopf-féle körrendszerek

A háromdimenziós gömbi tér, azaz $\mathbf{S}^3$ főköreivel foglalkozunk. Miután $\mathbf{S}^3$ a kvaternióalgebra egységgömbje, itt a Clifford-eltolásokat és a Clifford-párhuzamos főköröket a kvaterniók felhasználásával is lehet származtatni. A kvaterniókkal kapcsolatban a 4.5. szakaszban bevezetett fogalmakat és jelöléseket használjuk.

4.8.1. Tétel. *Az $\mathbf{S}^3$ gömbi térben a Clifford-eltolások pontosan a balszorzások és a jobbszorzások valamely $\mathbf{S}^3$-beli elemmel.*

Bizonyítás: Jelöljük B_a-val, illetve J_a-val az $a \in \mathbf{S}^3$ elemmel történő balszorzást, illetve jobbszorzást az $\mathbf{S}^3$ csoportban, tehát legyen $B_a(x) = ax$ és $J_a(x) = xa$. Nyilván B_a, J_a az $I(\mathbf{S}^3)$ izometriacsoport elemei, továbbá $B_a^{-1} = B_{a^{-1}}$ és $J_a^{-1} = J_{a^{-1}}$ érvényes. Megmutatjuk, hogy minden a-ra B_a és J_a Clifford-eltolás.

Vegyük észre először, hogy a 4.7.13-beli $C(\alpha)$ Clifford-eltolást (a $d = 3$ esetben) a $z = e^{\alpha i} \in \mathbf{S}^1$ kvaternióval történő B_z balszorzás adja. Ha pedig $a \in \mathbf{S}^3$ tetszőleges, akkor 4.5.12 miatt egy alkalmas $z \in \mathbf{S}^1$-nek a konjugáltja az $\mathbf{S}^3$ csoportban, $a = bzb^{-1}$, ezért $B_a(x) = bzb^{-1}x = B_b\big(B_z\big(B_{b^{-1}}(x)\big)\big)$. Tehát $B_a = B_b \circ B_z \circ B_b^{-1}$, vagyis az a-val történő balszorzás a B_z Clifford-eltolás konjugáltja az $I(\mathbf{S}^3)$ csoportban. Ezért a 4.7.12. Definíciót követő észrevételre hivatkozva B_a is Clifford-eltolás. A kvaterniók $x \mapsto \overline{x}$ konjugálása definíció szerint a valós tengelyre vonatkozó $\sigma_{\mathbf{R}}$ ortogonális szimmetriával azonos, tehát $\mathbf{S}^3$ izometriája. Ezt felhasználva hasonló elven kaphatjuk, hogy a J_a jobbszorzások is Clifford-eltolások, ugyanis $J_a(x) = xa = \overline{\overline{a}\,\overline{x}} = \overline{B_{\overline{a}}(\overline{x})}$, azaz J_a a $B_{\overline{a}}$ Clifford-eltolásnak a $\sigma_{\mathbf{R}}$ izometriával vett konjugáltja az $I(\mathbf{S}^3)$ csoportban.

Most megmutatjuk, hogy az $\mathbf{S}^3$ térben bármely Clifford-eltolás csak a B_a vagy J_a transzformációk valamelyike lehet. Tudjuk 4.7.14 szerint, hogy bármely Clifford-eltolás egy alkalmas $z = e^{\alpha i} \in \mathbf{S}^1$ kvaternióval vett balszorzás konjugáltja az $I(\mathbf{S}^3) = O(4)$ csoportban, tehát elegendő annyit tisztázni, hogy B_z bármely konjugáltja balszorzás vagy jobbszorzás. A 4.5.14. Tételből tudjuk, hogy $SO(4)$-ben $\mathbf{S}^3$ balszorzásai normálosztót alkotnak, ezért B_z-nek bármely $SO(4)$-beli elemmel vett konjugáltja valóban balszorzás. Az $SO(4)$-hez nem tartozó, azaz irányításváltó transzformációk közé tartozik a kvaterniók $\sigma_{\mathbf{R}}$ konjugálása, és az imént láttuk, hogy a $\sigma_{\mathbf{R}}$-rel történő $I(\mathbf{S}^3)$-beli konjugálás balszorzásból jobbszorzást állít elő. Bármely $A \in O(4) - SO(4)$ irányításváltó gömbi egybevágóság $A = \sigma_{\mathbf{R}} \circ B$ alakban írható alkalmas $B \in SO(4)$-gyel. Ekkor az A-val való konjugálás a B-vel valónak és a $\sigma_{\mathbf{R}}$-rel valónak az egymásutánja, és ezért bármely balszorzásnak az A-val vett konjugáltja jobbszorzás. □

Megjegyzés. Az $SO(4)$ csoportban kivételes módon jelen lévő két „majdnem komplementer” normálosztót (l. 4.5.15) tehát pontosan a Clifford-eltolások alkotják.

4.8.2. Definíció (S_q^1). Ha $q \in \mathbf{S}^2$ tetszőlegesen kiszemelt tisztán képzetes egységkvaternió, akkor jelölje S_q^1 annak a $\mathbf{C}$-vel izomorf részalgebrának (l. 4.5.8) az $\mathbf{S}^3$-mal vett metszetét, amelyet 1 és q generál. Mindegyik ilyen S_q^1 halmaz az $1 \in \mathbf{S}^3$ ponton áthaladó főkör, amely egyúttal részcsoport $\mathbf{S}^3$-ban. Nyilván $S_q^1 = S_{-q}^1$, továbbá bármelyik, az egységelemet tartalmazó főkör így áll elő. Közöttük van az $\mathbf{R}^2$ standard euklideszi síkbeli $\mathbf{S}^1$ egységkör is, még-

pedig a szokásos $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C} = \mathbf{R} + \mathbf{R}i \subset \mathbf{H}$ azonosítás mellett $\mathbf{S}^1 = S^1_i$. Az S^1_q részcsoportok mindannyian egymás konjugáltjai az $\mathbf{S}^3$ csoportban, ugyanis a tiszta képzetes kvaterniók (azaz $\mathbf{S}^2$ elemei) 4.5.12 miatt mind konjugált csoportelemek.

4.8.3. Definíció (Hopf-féle körrendszerek). Rögzítsünk egy egységelemen áthaladó K főkört $\mathbf{S}^3$-ban, azaz legyen K az S^1_q részcsoportok egyike. Tekintsük egyrészt a K szerinti összes bal oldali mellékosztály alkotta halmazrendszert, másrészt a K szerinti összes jobb oldali mellékosztály alkotta halmazrendszert. Miután mind a bal-, mind a jobbeltolások egybevágóságok $\mathbf{S}^3$-ban, mindkét halmazrendszer főkörökből áll, és $\mathbf{S}^3$ egy-egy partícióját alkotja. Ezeket a körrendszereket nevezzük a K-hoz tartozó bal oldali, illetve jobb oldali Hopf-féle körrendszereknek.

4.8.4. Lemma. *$\mathbf{S}^3$-ban bármelyik főkör pontosan egy bal oldali, és pontosan egy jobb oldali Hopf-féle körrendszerhez tartozik hozzá.*

Bizonyítás: Legyen $L \subset \mathbf{S}^3$ tetszőleges főkör. Szemeljünk ki egy tetszőleges $u \in L$ elemet, ekkor $u^{-1}L$ is és Lu^{-1} is az egységelemet tartalmazó főkör, és a hozzájuk tartozó bal, illetve jobb oldali Hopf-féle körrendszernek L is tagja. Az egyértelműség indoklásául elég annyit megjegyezni, hogy egy csoportban bármely bal (illetve jobb) oldali mellékosztály egyértelműen meghatározza azt a részcsoportot, amelyhez tartozik. □

4.8.5. Lemma. *Bármely két Hopf-féle körrendszer egybevágó, továbbá Hopf-féle körrendszernek $\mathbf{S}^3$ bármely egybevágóságánál származó képe is Hopf-féle körrendszer.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy bármely két bal oldali Hopf-féle körrendszer egybevágó. Ha K és L az egységelemet tartalmazó főkörök, akkor alkalmas $u \in \mathbf{S}^3$ elemmel $L = uKu^{-1}$; rögzítsünk egy ilyen u-t. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbf{S}^3$-ra $(uau^{-1})L = u(aK)u^{-1}$, ami azt mutatja, hogy a K-hoz tartozó bal oldali Hopf-féle körrendszer tagjainak az $x \mapsto uxu^{-1}$ egybevágóságnál származó képei mind az L-hez tartozó bal oldali Hopf-féle körrendszerhez tartoznak, sőt, ki is merítik azt, mert bármely $b \in \mathbf{S}^3$ elem előáll $b = uau^{-1}$ alakban alkalmas a-val. Hasonló okoskodással igazolható, hogy bármely két jobb oldali Hopf-féle körrendszer is egybevágó. Az első állítás bizonyításához csak annyit kell még megjegyeznünk, hogy a kvaterniók $x \mapsto \overline{x}$ konjugálása a bal oldali Hopf-féle körrendszereket jobb oldaliakba viszi, és viszont.

Legyen most adott egy bal oldali Hopf-féle körrendszer az egységelemet tartalmazó K tagjával, és legyen adott $\mathbf{S}^3$ egy tetszőleges irányítástartó egybevágósága. A 4.5.14. Tétel szerint ez az egybevágóság $x \mapsto uxv$ alakú leképezés, ahol u és v rögzített elemek $\mathbf{S}^3$-ban. A K részcsoport bal oldali mellékosztályait, az aK alakú főköröket ez a leképezés az $uaKv = (uav)(v^{-1}Kv)$

halmazokba, azaz az egységelemet tartalmazó $v^{-1}Kv$ főkör bal oldali mellékosztályaiba viszi, tehát egy Hopf-féle körrendszer köreibe. Az így előálló főkörök ki is merítik ezt a körrendszert, hiszen bármely $b \in \mathbf{S}^3$ elem előáll $b = uav$ alakban alkalmas a-val.

A kvaterniók konjugálása egybevágóság az $\mathbf{S}^3$ gömbön, amely az $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ formulának köszönhetően bal oldali mellékosztályokat jobb oldaliakba képez. Emiatt a bal oldali Hopf-féle körrendszereket jobb oldali Hopf-féle körrendszerekbe viszi. A gömb további irányításváltó egybevágóságai csak a konjugálással történő kompozícióban térnek el az irányítástartóktól, tehát azok is a bal oldali Hopf-féle körrendszereket jobb oldaliakba képezik. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy a jobb oldali Hopf-féle körrendszereket az irányítástartó egybevágóságok jobb oldali, az irányításfordítók bal oldali Hopf-féle körrendszerekbe viszik. □

4.8.6. Definíció (Komplementer főkör). Az $\mathbf{S}^3$ gömbön tetszőleges K főkörhöz tekintsük azt a K' főkört, amelyet az K-t tartalmazó kétdimenziós lineáris altér ortogonális komplementere metsz ki $\mathbf{S}^3$-ból, azaz legyen

$$K' = \{v \in \mathbf{S}^3 \,:\, v \perp u \text{ minden } u \in K\text{-ra}\}\,.$$

Ezt a K'-t nevezzük K komplementer főkörének. A $K \leftrightarrow K'$ megfeleltetés nyilván bijektív és önmaga inverze, tehát párokba állítja az $\mathbf{S}^3$-beli főköröket.

4.8.7. Lemma. *Bármely Hopf-féle körrendszer minden tagjával együtt annak komplementer főkörét is tartalmazza. Valamely K főkört tartalmazó bal oldali és jobb oldali Hopf-féle körrendszernek e két körön, K-n és K'-n kívül nincs más közös tagja.*

Bizonyítás: 4.8.5 miatt a lemma mindkét állítását elegendő a $K = \mathbf{S}^1$ főkör speciális választása mellett ellenőrizni.

Az $\mathbf{S}^1$ főkör síkját 1 és i, $\mathbf{S}^{1'}$ síkját a j és k egységkvaterniók feszítik ki. Miután $j = j1 = 1j$ és $k = j(-i) = ij$, az $\mathbf{S}^{1'}$ főkör az $\mathbf{S}^1$ részcsoportnak bal oldali és jobb oldali mellékosztálya is egyszerre. Ezért $\mathbf{S}^{1'}$ tagja az $\mathbf{S}^1$-hez tartozó bal oldali és jobb oldali Hopf-féle körrendszernek is.

Most megmutatjuk, hogy $\mathbf{S}^1$-en és $\mathbf{S}^{1'}$-n kívül nincs más olyan főkör $\mathbf{S}^3$-ban, amely egyszerre bal oldali és jobb oldali mellékosztálya volna az $\mathbf{S}^1$ részcsoportnak. Ezt olyan módon tisztázzuk, hogy kiszemelünk egy $u \in \mathbf{S}^3$ pontot és tekintjük az u-t tartalmazó bal oldali és jobb oldali mellékosztályt. Ezek u-n áthaladó főkörök, amelyeket $\mathbf{S}^1$-ből az u-val való balszorzás, illetve jobbszorzás mint $\mathbf{S}^3$ egybevágósága származtat. Ezeknél az egybevágóságoknál az $\mathbf{S}^1$ főkör 1 pontbeli i irányvektora a szóban forgó főkörök u-beli irányvektorába kell, hogy kerüljön. Ha ez a két főkör azonos, akkor ez a két irányvektor vagy egyenlő, vagy egymás ellentettje. Tehát a két főkör csak $ui = \pm\, iu$, azaz

$iui^{-1} = \pm u$ esetén lehet azonos. Tudjuk 4.5.10-ből, hogy az i elemmel történő konjugálás, azaz a $\Phi(i) : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ izometria ortogonális szimmetria, amelynek az 1 és i generálta altér a fixponthalmaza, és a j és k generálta komplementer altér a -1 sajátértékhez tartozó sajátaltere. Ezért $iui^{-1} = \pm u$ valóban csak akkor lehetséges, ha u valamelyik sajátaltérhez tartozik, azaz $u \in \mathbf{S}^1$ vagy $u \in \mathbf{S}^{1'}$. □

4.8.8. Tétel. *Az $\mathbf{S}^3$ gömbi térben két főkörhöz akkor és csak akkor létezik olyan Hopf-féle körrendszer, amely mindkettőt tartalmazza, ha a két főkör Clifford-párhuzamos.*

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy K és L két főkör, amelyek hozzátartoznak ugyanahhoz a Hopf-féle körrendszerhez. Ez azt jelenti, hogy valamelyik S^1_q részcsoport szerinti ugyanolyan oldali mellékosztályok.

Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor $K = \mathbf{S}^1$, és tegyük föl, hogy L az $\mathbf{S}^1$-nek jobb oldali mellékosztálya, azaz $L = S^1 a$. Ekkor a 4.7.16-beli okoskodás (az $n = 2$, $\mathbf{z} = 1$, $\mathbf{w} = a$ szereposztással) éppen azt mutatja, hogy K és L Clifford-párhuzamosak.

Legyen most K tetszőleges főkör és $L = Ka$. Vigyük át $\mathbf{S}^1$-et K-ba alkalmas egybevágósággal. A 4.5.14. Tétel szerint ez az egybevágóság $x \mapsto uxv$ alakú alkalmas $u, v \in \mathbf{S}^3$ elemekkel. Ekkor $K = u\mathbf{S}^1 v$ és $L = u\mathbf{S}^1 va = u\mathbf{S}^1 bv$, ahol $b = vav^{-1}$. Az előző speciális eset felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbf{S}^1$ és $\mathbf{S}^1 b$ Clifford-párhuzamos főkörök. Ezekre az $x \mapsto uxv$ egybevágóságot alkalmazva kapjuk, hogy K és L is Clifford-párhuzamosak.

Ha L baleltolással kapható a K főkörből, azaz $L = aK$, akkor alkalmazzuk rájuk a kvaterniók konjugálását: $\overline{K}$ és $\overline{L}$ is főkörök és $\overline{L} = \overline{K}\overline{a}$. Az előző esetet alkalmazva $\overline{K}$ és $\overline{L}$ Clifford-párhuzamosak, és így a konjugálással adott egybevágóságnál származó képeik, K és L is azok.

Megfordítva, legyen adott két Clifford-párhuzamos főkör $\mathbf{S}^3$-ban. Vigyük át $\mathbf{S}^3$ alkalmas egybevágóságával az egyiküket az $\mathbf{S}^1$ főkörbe, és jelölje L a másik főkör képét. Ekkor nyilván $\mathbf{S}^1$ és L is Clifford-párhuzamosak, továbbá 4.8.5 miatt elegendő azt bebizonyítani, hogy van olyan Hopf-féle körrendszer, amely $\mathbf{S}^1$-et és L-et magában foglalja. Akár $L = \mathbf{S}^1$, akár $L = \mathbf{S}^{1'}$, ezt tudjuk. (Ennek nincs most jelentősége, de 4.8.4 és 4.8.7 alapján azt is tudjuk, hogy mindkét esetben pontosan két darab ilyen körrendszer van.) Szemeljünk ki egy tetszőleges $u \in L$ elemet, ekkor $u \notin \mathbf{S}^1$ és $u \notin \mathbf{S}^{1'}$. Tekintsük az $\mathbf{S}^1$-hez tartozó mindkét Hopf-féle körrendszernek az u-n áthaladó tagját. A 4.8.7. Lemma szerint ez a két főkör különböző, és a tétel már bebizonyított iránya szerint mindkettő Clifford-párhuzamos $\mathbf{S}^1$-gyel. Viszont 4.7.18 szerint u-n át csak két darab $\mathbf{S}^1$-gyel Clifford-párhuzamos főkör létezik, emiatt L ezek egyike. Tehát az $\mathbf{S}^1$-hez tartozó egyik Hopf-féle körrendszer valóban L-et is tartalmazza. □

Megjegyzés. Bár $\mathbf{S}^3$-ban a főkörök Clifford-párhuzamos volta nem tranzitív reláció, a 4.8.8. Tétel arra mutat rá, hogy nem áll messze attól, hogy ekvivalenciareláció legyen. Tekinthetnénk ugyanis külön-külön a „balról Clifford-párhuzamos" és a „jobbról Clifford-párhuzamos" relációkat, amelyek akkor állnak fönn két főkör között, ha bal oldali, illetve ha jobb oldali Hopf-féle körrendszer tartalmazza őket. Mindkettő ekvivalenciareláció, és 4.8.8 alapján a Clifford-párhuzamosság ezek egyesítése.

5. Inverzív geometria

Az euklideszi tér gömbjeivel kapcsolatban a hipergömbre vonatkozó inverzió tulajdonságaival, majd a Möbius-transzformációkkal ismerkedünk meg. Ennek előkészítéseképpen gömbök kölcsönös helyzetét, érintkezését, szögét, valamint pontnak hipergömbre vonatkozó hatványát tekintjük át.

5.1. Gömbök, hatvány

Az alábbi észrevételt a felező merőleges hipersíkról szóló 4.3.12. Állítás kiterjesztésének tekinthetjük.

5.1.1. Állítás. *Legyen $d \geq 1$ és tegyük fel, hogy A_0, A_1, …, $A_k \in E$ független pontok. Ekkor létezik olyan E-beli hipergömb, amely áthalad mindegyik A_i ponton. Az ilyen hipergömbök középpontjai egy az $\langle A_0, A_1, \ldots, A_k \rangle$ affin altérhez képest ortogonális komplementer állású $(d-k)$-dimenziós affin alteret alkotnak E-ben.*

Bizonyítás: Tekintsük $i = 1, \ldots, k$-ra az A_0, A_i pontpárhoz tartozó H_i felező merőleges hipersíkot. Valamely E-beli pont akkor és csak akkor középpontja egy az A_0, A_1, …, A_k pontok mindegyikén áthaladó hipergömbnek, ha egyenlő távol van ezektől a pontoktól, azaz mindegyik H_i-hez hozzátartozik. A pontrendszer függetlensége miatt a H_i hipersíkok normálvektorai lineárisan függetlenek, így az $S = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ altérre $\dim S = d - k$. Az $\overrightarrow{S}$-beli vektorok merőlegesek mindegyik $\overrightarrow{A_0A_i}$ vektorra, ezért S és $\langle A_0, A_1, \ldots, A_k \rangle$ ortogonális komplementer affin alterek. □

Ha $k = d$, akkor a szóban forgó altér egyelemű, így speciális esetként a szimplex köré írható hipergömb egyértelmű létezését kapjuk.

5.1.2. Következmény. *Bármely E-beli d-dimenziós szimplexnek egyértelműen létezik körülírt hipergömbje, azaz olyan E-beli hipergömb, amely áthalad a szimplex csúcsain.* □

5.1.3. Következmény. *Legyen $1 \leq k \leq d$ és legyen $G \subset E$ valamely k-dimenziós affin altérben fekvő tetszőleges $(k-1)$-dimenziós gömb, továbbá $P \in E - \langle G \rangle$ tetszőleges pont. Ekkor egyértelműen létezik olyan k-dimenziós $\widetilde{G}$ gömb, amelyre $G \subset \widetilde{G}$ és $P \in \widetilde{G}$.*

Bizonyítás: Valóban, egy A_0, A_1, …, $A_k \in G$, $A_{k+1} = P$ független pontrendszert választva a keresett $\widetilde{G}$ gömb a P_i $(i = 0,1,\ldots,k+1)$ csúcsú $(k+1)$-dimenziós szimplex körülírt gömbje; az egyértelműség nyilvánvaló. □

5.1.4. Állítás (Hipergömb és affin altér kölcsönös helyzete). *Legyen $d \geq 2$, $G \subset E$ hipergömb $P \in E$ középponttal és r sugárral, $S \subset E$ affin altér, melyre $1 \leq \dim S < d$. Jelölje $Q \in S$ a P pont ortogonális vetületét S-en, és legyen $q = \rho(P,Q)$. Ekkor:*

- *Ha $q > r$, akkor $G \cap S = \emptyset$.*
- *Ha $q = r$, akkor $G \cap S = \{Q\}$.*
- *Ha $q < r$, akkor $G \cap S$ a Q középpontú, $\sqrt{r^2 - q^2}$ sugarú S-beli hipergömb.*

Bizonyítás: Azonnal adódik a Pitagorasz-tételből és abból, hogy $q = \rho(P,S)$. □

5.1.5. Definíció (Érintőhipersík). Az 5.1.4-beli $q = r$ esetben azt mondjuk, hogy S érinti G-t a Q pontban. Nyilvánvaló, hogy bármely $G \subset E$ hipergömb bármely $A \in G$ pontjához egyértelműen található olyan $H \subset E$ hipersík, amely G-t az A pontban érinti, mégpedig az A pontot tartalmazó, $\overrightarrow{PA}$ normálvektorú hipersík, ahol P a G hipergömb középpontja. Ezt a hipersíkot a G hipergömb A-beli érintőhipersíkjának nevezzük és T_AG-vel jelöljük.

Ha G alacsonyabb dimenziójú gömb E-ben és $A \in G$, akkor a T_AG érintőaltér a $\langle G \rangle$ affin altérre vonatkozó hipersík.

Ha például az S affin altér az 5.1.4-beli harmadik esetnek megfelelően (dim $S-$ -1 dimenziós) gömböt metsz ki a G hipergömbből, akkor bármely $A \in S \cap G$ esetén $T_A(S \cap G) = S \cap T_AG$.

5.1.6. Definíció (Hipergömbök érintkezése). Legyen G_1 és $G_2 \subset E$ két különböző hipergömb. Azt mondjuk, hogy G_1 és G_2 érintkeznek az A pontban, ha $A \in G_1 \cap G_2$ és $T_AG_1 = T_AG_2$. Az érintkezést külső érintkezésnek

hívjuk (illetve azt mondjuk, hogy G_1 és G_2 kívülről érintik egymást), ha G_1 és G_2 egyike sem tartalmazza a belsejében a másik középpontját. Az ellenkező esetben belső érintkezésről beszélünk (azaz azt mondjuk, hogy G_1 és G_2 belülről érintik egymást).

5.1.7. Állítás (Két hipergömb kölcsönös helyzete). *Legyenek $d \geq 2$ mellett G_1 és G_2 hipergömbök E-ben P_1, illetve P_2 középponttal és r_1, illetve r_2 sugárral, továbbá jelölje q a $\rho(P_1, P_2)$ távolságot. Ekkor:*

- *Ha $q < |r_1 - r_2|$, akkor G_1 és G_2 közül az egyik a másikat a belsejében tartalmazza.*
- *Ha $0 < q = |r_1 - r_2|$, akkor G_1 és G_2 belülről érintkeznek.*
- *Ha $|r_1 - r_2| < q < r_1 + r_2$, akkor $G_1 \cap G_2$ egy a $\langle P_1, P_2 \rangle$ egyenesre merőleges hipersíkban fekvő $(d-2)$-dimenziós gömb.*
- *Ha $q = r_1 + r_2$, akkor G_1 és G_2 kívülről érintkeznek.*
- *Ha $q > r_1 + r_2$, akkor G_1 és G_2 egymás külsejében fekszenek.*

Bizonyítás: Egyedül a harmadik (metsző) esetbeli állítás igényel indoklást, a többi rögtön következik a definíciókból a háromszög-egyenlőtlenség használatával. A harmadik állítás síkbeli, körökről szóló speciális esete (azaz amikor $d = 2$) jól ismert az elemi geometriából. Az általános esetben vegyük észre, hogy a G_1-ből és G_2-ből álló rendszer invariáns E összes olyan egybevágóságára nézve, amely a P_1 és a P_2 pontot (következésképpen a teljes $\langle P_1, P_2 \rangle$ egyenest pontonként) helyben hagyja. Ezek az egybevágóságok egy $O(d-1)$-gyel izomorf csoportot alkotnak, ezért (a $d = 2$ esetben használatos „tengelyes szimmetria", illetve a $d = 3$ esetben használatos „forgásszimmetria" elnevezés mintájára) hivatkozhatunk a G_1-ből és G_2-ből álló rendszer $O(d-1)$-szimmetriájára. Válasszunk ki egy tetszőleges, $\langle P_1, P_2 \rangle$-t tartalmazó 2-dimenziós S affin alteret, az ottani $(G_1 \cap S) \cap (G_2 \cap S)$ halmazra az $O(d-1)$-szimmetriát jelentő transzformációkat alkalmazva a képeik egyesítéseként megkapjuk a $G_1 \cap G_2$ halmazt. Viszont $(G_1 \cap S) \cap (G_2 \cap S)$ két, a $\langle P_1, P_2 \rangle$ egyenesre szimmetrikusan álló pontból áll, így $G_1 \cap G_2$ valóban a $\langle P_1, P_2 \rangle$ egyenesre merőleges hipersíkban fekvő $(d-2)$-dimenziós gömb. $\square$

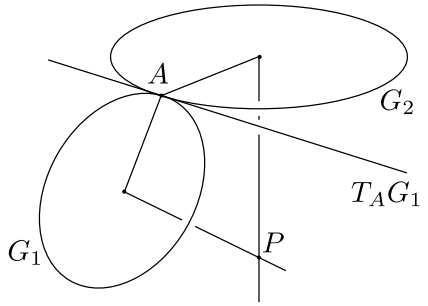
Megjegyzés. Az 5.1.7. Állításból rögtön következik, hogy két különböző hipergömb akkor és csak akkor érintkezik, ha egyetlen közös pontjuk van. Ha hipergömbök helyett alacsonyabb dimenziójú gömbök is szóba kerülhetnek, akkor ez már nem lesz így. Az érintkezés fogalmát alacsonyabb dimenziójú gömbök esetére is az 5.1.6. Definíció mintájára értelmezhetjük.

5.1.8. Definíció (Alacsonyabb dimenziójú gömbök érintkezése). Legyen $1 \leq k \leq d$, és legyen $G_1, G_2 \subset E$ két különböző $(k-1)$-dimenziós gömb. Azt mondjuk, hogy G_1 és G_2 érintkeznek az $A \in E$ pontban, ha $A \in G_1 \cap G_2$ és $T_A G_1 = T_A G_2$.

5.1.9. Lemma. *Az E-beli $(k-1)$-dimenziós G_1 és G_2 gömbök pontosan akkor érintkeznek, ha G_1-nek és G_2-nek egyetlen közös pontja van, és létezik olyan E-beli k-dimenziós affin altér vagy k-dimenziós gömb, amely tartalmazza mind G_1-et, mind G_2-t.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy G_1 és G_2 érintkezik az A pontban. Feltehetjük, hogy nincs olyan k-dimenziós affin altér, amely tartalmazza mindkét gömböt. Ekkor a $\langle G_1 \rangle$, $\langle G_2 \rangle$ k-dimenziós affin alterek egy $(k-1)$-dimenziós altérben (mégpedig G_1 és G_2 közös érintőhipersíkjában, $T_A G_1 = T_A G_2$-ben) metszik egymást, ezért együtt egy $(k+1)$-dimenziós T alteret generálnak. Tekintsük erre a T altérre vonatkozóan a $T_A G_1$ altérnek az A ponton áthaladó S ortogonális kiegészítőjét, ekkor $\dim S = 2$. Állítsunk merőleges egyeneseket a G_1 és a G_2 gömb középpontján át a $\langle G_1 \rangle$, illetve $\langle G_2 \rangle$ altérre mint hipersíkra T-ben. Ezek az egyenesek nem párhuzamosak (mert $\langle G_1 \rangle$ és $\langle G_2 \rangle$ nem párhuzamos hipersíkok T-ben), és S-ben fekszenek (mert egyrészt a két gömb középpontja illeszkedik S-re, hiszen a középpontokból A-ba mutató vektorok merőlegesek $T_A G_1$-re, másrészt mert irányvektoraik is merőlegesek $T_A G_1$-re). A két egyenes tehát metszi egymást egy $P \in T$ pontban. A T-beli, P középpontú, $\rho(P, A)$ sugarú, k-dimenziós G gömb tartalmazza G_1-et is és G_2-t is. A két gömbnek az A-n kívül nincs közös pontja, mert $G_1 \cap G_2 = (\langle G_1 \rangle \cap G) \cap \cap (\langle G_2 \rangle \cap G) = (\langle G_1 \rangle \cap \langle G_2 \rangle) \cap G = (T_A G_1) \cap G \subseteq (T_A G) \cap G = \{A\}$.

A fordított irány bizonyításához (az 5.1.7. Állítást követő megjegyzés fényében) ismét feltehetjük, hogy G_1 és G_2 nem egy k-dimenziós affin altérben, hanem egy k-dimenziós G gömbön fekszik. Legyen $\{A\} = G_1 \cap G_2$, azt kell megmutatnunk, hogy $T_A G_1 = T_A G_2$. Legyen P a G, P_1 a G_1, és P_2 a G_2 középpontja, ekkor P, P_1 és P_2 nem kollineáris pontok. Az $S = \langle P, P_1, P_2 \rangle$



affin síkra vonatkozó ortogonális szimmetria mindhárom gömböt önmagába viszi, ezért $A \in S$. Mind G_1, mind G_2 esetében elmondható, hogy a $T_A G_i$ affin altér a $\langle P, P_i, A\rangle$ altérnek, azaz S-nek az A-n átmenő, $\langle G\rangle$-re vonatkozó ortogonális kiegészítője, ezért valóban $T_A G_1 = T_A G_2$. □

Megjegyzés. Az 5.1.9. Lemma nyilvánvaló módon érvényben marad akkor is, ha megengedjük, hogy G_1 és G_2 egyike gömb helyett ugyanolyan dimenziójú affin altér legyen. Ilyenkor érintkezésen persze azt kell érteni, hogy a szóban forgó affin altér a gömbnek egy érintőhipersíkja (a gömb által kifeszített affin altérben).

5.1.10. Definíció (Két hipergömb szöge, gömb és hipergömb merőlegessége). Tegyük fel, hogy $d \geq 2$ és G_1, G_2 hipergömbök E-ben, melyekre $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Értelmezzük G_1 és G_2 szögét, a $\sphericalangle(G_1, G_2) \in [0, \pi/2]$ számot mint az érintőhipersíkok szögét valamely közös pontban, azaz válasszunk egy tetszőleges $A \in G_1 \cap G_2$ pontot és legyen $\sphericalangle(G_1, G_2) = \sphericalangle(T_A G_1, T_A G_2)$. Ez a $\sphericalangle(T_A G_1, T_A G_2)$ szög nem függ az A közös pont speciális választásától, mégpedig a középpontokon áthaladó egyenes körüli $O(d-1)$-szimmetria miatt.

Nyilván $\sphericalangle(G_1, G_2) = 0$ pontosan akkor áll, ha G_1 és G_2 érintkezik. Ha pedig $\sphericalangle(G_1, G_2) = \pi/2$, akkor G_1-et és G_2-t merőlegesnek mondjuk, és ezt a viszonyt a $G_1 \perp G_2$ jelöléssel fejezzük ki.

A merőlegesség definícióját ki tudjuk terjeszteni arra az esetre, amikor a két gömb közül az egyiknek a dimenziója $(d-1)$-nél alacsonyabb is lehet: miután affin altér és hipersík merőlegessége értelmezve van, ezt kell megkövetelni az érintőhipersíkoktól a közös pontokban.

5.1.11. Definíció (Kör vagy egyenes, és gömb vagy affin altér szöge). Ahogyan két affin altér szögét értelmezni tudjuk abban az esetben, amikor az egyik altér egydimenziós, két közös ponttal bíró gömb szögét is definiálhatjuk olyankor, amikor egyikük egydimenziós, azaz kör. Ugyanígy egyenes és gömb, illetve kör és affin altér szöge is értelmezhető. Legyen $K \subset E$ kör vagy egyenes, $G \subset E$ pedig $(k-1)$-dimenziós gömb vagy affin altér, melyekre $2 \leq k \leq d$ és $K \cap G \neq \emptyset$. Válasszunk egy tetszőleges $A \in K \cap G$ pontot és értelmezzük a $\sphericalangle(K, G)$ szöget a $\sphericalangle(K, G) = \sphericalangle(T_A K, T_A G)$ formulával, ahol $T_A K$-n magát K-t értjük, ha K egyenes, illetve $T_A G$-n G-t értjük, ha G affin altér. Ha K-nak és G-nek egynél több közös pontja van és $K \nsubseteq G$, akkor pontosan két közös pont van és a K-ból és G-ből álló rendszer szimmetrikus a két pont felező merőleges hipersíkjára, emiatt a $\sphericalangle(T_A K, T_A G)$ szög nem függ az A közös pont speciális választásától.

5.1.12. Definíció (Hatvány). Legyen $G \subset E$ rögzített, P középpontú, r sugarú hipergömb. A tér valamely $A \in E$ pontjának a G hipergömbre vonatkozó hatványán a $h_G(A) = q^2 - r^2$ számot értjük, ahol $q = \rho(P, A)$.

Nyilván $h_G(A) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $A \in G$. A hatvány a G-hez képest belső pontokra negatív, a külsőkre pozitív.

5.1.13. Állítás. *Ha $L \subseteq E$ tetszőleges egyenes az A ponton át és $L \cap G = \{B_1, B_2\}$, akkor $h_G(A) = \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2}$.*

Bizonyítás: Legyen a Q pont a P középpont merőleges vetülete az L egyenesen, ekkor 5.1.4-re hivatkozva $\overrightarrow{QB_1} + \overrightarrow{QB_2} = \mathbf{0}$ és így a Pitagorasz-tétellel $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2} = \big(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB_1}\big) \cdot \big(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{QB_1}\big) = \rho(A,Q)^2 - \rho(Q,B_1)^2 = \big(\rho(A,Q)^2 + \rho(P,Q)^2\big) - \big(\rho(P,Q)^2 + \rho(Q,B_1)^2\big) = q^2 - r^2$. □

Megjegyzés. A $B_1 = B_2$ speciális esetben az 5.1.13. Állítás szerint egy külső pont G-re vonatkozó hatványa a pontból G-hez húzott érintőszakasz hosszának a négyzetével egyenlő.

5.1.14. Állítás. *Legyenek $G_0, G_1 \subset E$ nem koncentrikus hipergömbök. Ekkor a*

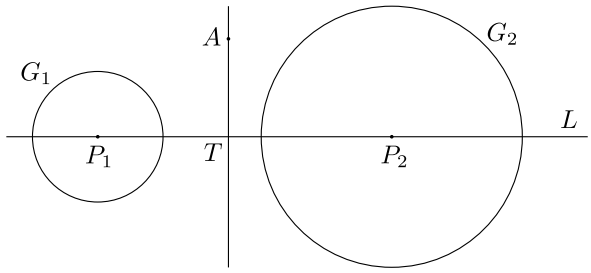
$$H = \{\, A \in E \,:\, h_{G_0}(A) = h_{G_1}(A) \,\}$$

halmaz egy a hipergömbök középpontját összekötő egyenesre merőleges hipersík.

Bizonyítás: Szorítkozzunk először az $L = \langle P_0, P_1 \rangle$ egyenesre, ahol P_i a G_i hipergömb középpontja ($i = 0{,}1$). Használjuk L-ben a P_0, P_1 pontok koordinátáira a p_0, illetve p_1 jelölést, legyen továbbá G_0 és G_1 sugara r_0, illetve r_1. Egy L-beli x koordinátájú pont akkor és csak akkor tartozik H-hoz, ha x-re fennáll az

$$\begin{aligned} (x-p_0)^2 - r_0^2 &= (x-p_1)^2 - r_1^2, \\ \text{azaz a} \qquad 2x(p_1 - p_0) &= r_0^2 - r_1^2 + p_1^2 - p_0^2 \end{aligned}$$

egyenlet, amelynek $p_1 - p_0 \neq 0$ miatt egyértelműen létezik megoldása. Ezzel beláttuk, hogy a $H \cap L$ halmaz egyetlen pontból áll; jelöljük ezt a pontot B-vel.



Ha most $A \in E$ tetszőleges, jelöljük T-vel az A merőleges vetületét az L egyenesen. Ekkor $i = 0{,}1$-re

$$\begin{aligned} h_{G_i}(A) &= \rho(A, P_i)^2 - r_i^2 = \\ &= \rho(A, T)^2 + \rho(T, P_i)^2 - r_i^2 = \\ &= \rho(A, T)^2 + h_{G_i}(T) \end{aligned}$$

mutatja, hogy $A \in H$ pontosan akkor teljesül, amikor $T \in H$. Emiatt H azoknak az E-beli pontoknak a halmaza, amelyeknek a vetülete a B pont, ez pedig az L egyenesre B-ben állított merőleges hipersík. □

5.1.15. Definíció (Hatványhipersík). Ha $G_0, G_1 \subset E$ nem koncentrikus hipergömbök, akkor az 5.1.14-beli H hipersíkot G_0 és G_1 hatványhipersíkjának nevezzük. (A $d = 2$, illetve $d = 3$ esetben a hatványvonal, illetve a hatványsík elnevezéseket használjuk H-ra.)

Megjegyzések. (1) Ha G_0 és G_1 koncentrikus és különböző sugarú, akkor az 5.1.14-ben definiált H halmaz üres.

(2) Ha a G_0 és G_1 különböző hipergömbök érintkeznek, akkor hatványhipersíkjuk az érinkezési pontban húzott közös érintőhipersík. Ha G_0 és G_1 metszők, akkor $H = \langle G_0 \cap G_1 \rangle$.

A pont hipergömbre vonatkozó hatványának fogalmát kézenfekvő módon lehet az olyan „elfajuló” esetekre is kiterjeszteni, amikor a gömb „zérus sugarú”, azaz egyetlen pontból áll. Ilyenkor a hatványhipersík a felező merőleges hipersíkká specializálódik. Ebben az értelemben az alábbi tétel az 5.1.1. Állítás általánosítása.

5.1.16. Tétel. *Legyenek G_0, G_1, …, G_k olyan E-beli hipergömbök, amelyek P_0, P_1, …, P_k középpontjai független pontrendszert alkotnak E-ben. Ekkor az*

$$\{\, A \in E \,:\, h_{G_0}(A) = h_{G_1}(A) = \ldots = h_{G_k}(A) \,\}$$

halmaz $(d-k)$-dimenziós affin altér, amely a $\langle P_0, P_1, \ldots, P_k \rangle$ affin altérhez képest ortogonális komplementer állású.

Bizonyítás: Az 5.1.1. Állítás bizonyításának mintájára rögtön következik 5.1.14-ből. □

A következő tétel gömbök merőlegességét jellemzi hatványok segítségével.

5.1.17. Állítás. *Legyen $d \geq 2$ és $i = 1{,}2$-re $G_i \subset E$ hipergömb, melynek középpontja P_i, sugara r_i. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $G_1 \perp G_2$.

(ii) $\rho(P_1, P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

(iii) $h_{G_2}(P_1) = r_1^2$.

(iv) $h_{G_1}(P_2) = r_2^2$.

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$ (ii): Tetszőleges $A \in G_1 \cap G_2$ ponttal a P_1P_2A háromszögnek A-nál derékszöge van, így a Pitagorasz-tétel alkalmazható.

(ii) $\Rightarrow$ (i): A feltételből $|r_1 - r_2| < \rho(P_1, P_2) < r_1 + r_2$ következik, így az 5.1.7. Állítást használva választhatunk egy $A \in G_1 \cap G_2$ pontot és alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tétel megfordítását. Az $\overrightarrow{AP_1}$ és $\overrightarrow{AP_2}$ merőleges vektorok a T_AG_1 és T_AG_2 érintőhipersíkok normálvektorai, ezért $G_1 \perp G_2$.

A (ii), (iii) és (iv) állítások egymás közvetlen átfogalmazásai. □

5.1.18. Definíció (Hipergömb normálegyenlete). Legyen $G \subset E$ hipergömb, P jelölje a középpontját, r a sugarát. Ha E-ben adott egy tetszőleges $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ Descartes-féle koordinátarendszer, amelynél $\mathbf{x}(P) = \mathbf{p}$, akkor G egyenlete erre a koordinátarendszerre nézve vektoros alakban $(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 - r^2 = 0$, illetve koordinátákkal kifejezve

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_dx_d + b = 0$$

alakú alkalmas $a_1, a_2, \ldots, a_d, b$ konstansokkal. Ennek az egyenletnek bármely nemzérus skalárszorosa szintén G egyenlete. Ezek között azt, amely a fenti felírásban szerepel, azaz amelyben a másodfokú tagok együtthatója 1, a G hipergömb normálegyenletének nevezzük.

A normálegyenlet vektoros alakjában ráismerünk a G-re vonatkozó hatványra: tetszőleges $A \in E$ pontra $h_G(A) = (\mathbf{x}(A) - \mathbf{p})^2 - r^2$. Ennek alapján a G hipergömb normálegyenlete ismeretében tetszőleges pont G-re vonatkozó hatványa könnyen meghatározható: csak be kell helyettesíteni a pont koordinátáit a normálegyenlet bal oldalába. Ennek az észrevételnek az alapján a hatványhipersík egyenletét tudjuk könnyen előállítani.

5.1.19. Állítás. *Két nem koncentrikus hipergömb normálegyenletének a különbsége a hatványhipersík egyenletét adja.*

Bizonyítás: Valóban, ha G_1 és G_2 normálegyenletének vektoros alakja $(\mathbf{x} - \mathbf{p}_1)^2 - r_1^2 = 0$, illetve $(\mathbf{x} - \mathbf{p}_2)^2 - r_2^2 = 0$, akkor a fentiek alapján ezek különbségét mint egyenletet egy A pont koordinátái akkor és csak akkor elégítik ki, ha $h_{G_1}(A) - h_{G_2}(A) = 0$. □

5.2. Inverzió

5.2.1. Definíció (Inverzió). Legyen $d \geq 1$ és $G \subset E$ rögzített hipergömb, melynek középpontja P, sugara r. A G hipergömbre vonatkozó inverzión azt a

$$\sigma_G \,:\, E - \{P\} \;\to\; E - \{P\}$$

leképezést értjük, amelynél P-ben felvett origóval történő vektorizálás után minden $\mathbf{x} \in E_P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén

$$\sigma_G(\mathbf{x}) = \frac{r^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Más szóval, valamely $A \neq P$ pont inverze (azaz a G-re vonatkozó inverziónál származó képe) a P kezdőpontú, A-n áthaladó félegyenesnek az az A' pontja, amelyre $\rho(P, A) \cdot \rho(P, A') = r^2$.

A P pontot az inverzió pólusának, a G gömböt az inverzió alapgömbjének nevezzük.

A továbbiakban (5.2.10-ig bezárólag) rögzítünk E-ben egy P középpontú, r sugarú G hipergömböt és a σ_G inverzió tulajdonságait vizsgáljuk.

5.2.2. Állítás

(1) $\sigma_G \circ \sigma_G = id_{E-\{P\}}$.

(2) *Tetszőleges* $\lambda \neq 0$*-ra* $\sigma_G \circ H_{P,\lambda} = H_{P,\,1/\lambda} \circ \sigma_G$. *Speciálisan,* σ_G *felcserélhető a* P *középpontú szimmetriával.*

(3) $G = \mathrm{Fix}\,(\sigma_G)$, *azaz valamely* $A \in E$, $A \neq P$ *pontra* $\sigma_G(A) = A$ *pontosan akkor áll, ha* $A \in G$.

(4) *Ha* $S \subseteq E$ *affin altér és* $P \in S$, *akkor* $\sigma_G|_{S-\{P\}} = \sigma_{G\cap S}$.

(5) *Bármely* G*-től különböző* E*-beli* G' *hipergömbre* $\sigma_G(G') = G'$ *akkor és csak akkor érvényes, ha* $G' \perp G$.

(6) *Ha* G_1 *és* G_2 *közös* P *középpontú,* r_1, *illetve* r_2 *sugarú* E*-beli hipergömbök, akkor*

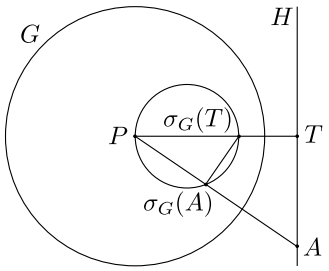
$$\sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = H_{P,(r_2/r_1)^2}\,|_{\,E-\{P\}}\,.$$

Bizonyítás: (1), (2), (3) és (4) a definíció közvetlen következményei.

(5): A $\sigma_G(G') = G'$ feltétel 5.1.13 miatt azzal egyenértékű, hogy $h_{G'}(P) = r^2$, ez pedig 5.1.17 miatt G' és G merőlegességét jelenti.

(6): A közös középponttal mint origóval vektorizálva tetszőleges $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra $(\sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1})(\mathbf{x}) = \left(r_2^2 / \left\|(r_1^2/\|\mathbf{x}\|^2)\cdot\mathbf{x}\right\|^2\right) \cdot \left((r_1^2/\|\mathbf{x}\|^2)\cdot\mathbf{x}\right) = (r_2/r_1)^2 \cdot \mathbf{x}$. □

5.2.3. Állítás (Hipersík inverze). *Legyen $H \subset E$ hipersík. Ha $P \in H$, akkor $\sigma_G(H - \{P\}) = H - \{P\}$, ha pedig $P \notin H$, akkor a $\sigma_G(H) \cup \{P\}$ halmaz P-n áthaladó hipergömb, amelynek a P-beli érintőhipersíkja párhuzamos H-val.*



Bizonyítás: A $P \in H$ esetben az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $P \notin H$ és legyen T a P pont merőleges vetülete H-n. A G-ből és H-ból álló rendszer $\langle P, T\rangle$ egyenes körüli $O(d-1)$-szimmetriája folytán az állítást elegendő a síkbeli ($d = 2$) esetre igazolni. Tetszőleges $A \in H$, $A \neq T$ pontra $\rho(P, A) \cdot \rho(P, \sigma_G(A)) = r^2 = \rho(P, T) \cdot \rho(P, \sigma_G(T))$ miatt $\rho(P, A)/\rho(P, T) = \rho(P, \sigma_G(T))/\rho(P, \sigma_G(A))$, amiből a P-nél közös szöggel bíró PAT és $P\,\sigma_G(T)\,\sigma_G(A)$ háromszögek hasonlósága következik. Ezért az utóbbi háromszögben a $\sigma_G(A)$ csúcsnál derékszög van, így a $\sigma_G(A)$ pont a $[P, \sigma_G(T)]$ átmérőjű Thalész-körre illeszkedik. Megfordítva, e kör bármely P-től különböző B pontja nyilván előáll valamely H-beli pont (mégpedig a $\langle P, B\rangle$ egyenes és H metszéspontja) inverzeként. Végül ennek a körnek a P-beli érintője merőleges a $\langle P, T\rangle$ egyenesre, azaz párhuzamos H-val. □

5.2.4. Következmény (Affin altér inverze). *Legyen $K \subset E$ affin altér. Ha $P \in K$, akkor $\sigma_G(K - \{P\}) = K - \{P\}$, ha pedig $P \notin K$, akkor a $\sigma_G(K) \cup \{P\}$ halmaz P-n áthaladó* $\dim K$*-dimenziós gömb, amelynek a P pontbeli érintőaltere párhuzamos K-val.*

Bizonyítás: A $P \in K$ esetben az állítás nyilvánvaló. Ha pedig $P \notin K$, akkor 5.2.2.(4) miatt szorítkozhatunk az $S = \langle K, P\rangle$ affin altérre, amelyben a K hipersíkra alkalmazhatjuk az 5.2.3. Állítást. □

5.2.5. Állítás (Hipergömb inverze). *Legyen $G' \subset E$ gömb. Ha $P \in G'$, akkor a $\sigma_G(G' - \{P\})$ halmaz hipersík, amely párhuzamos a $T_P G'$ hipersíkkal, ha pedig $P \notin G'$, akkor $\sigma_G(G')$ hipergömb.*

Bizonyítás: A $P \in G'$ esetben az állítás nyilvánvaló 5.2.2.(1)-re és 5.2.3-ra hivatkozva.

Tegyük fel először, hogy P a G' hipergömb külső pontja, ekkor $h_{G'}(P) > > 0$. Legyen $\widetilde{G}$ a P középpontú, $\sqrt{h_{G'}(P)}$ sugarú gömb, ekkor 5.1.17 miatt $G' \perp \widetilde{G}$ és így 5.2.2.(5) miatt $\sigma_{\widetilde{G}}(G') = G'$. Ezért 5.2.2.(6)-ot felhasználva $\sigma_G(G') = \sigma_G\big(\sigma_{\widetilde{G}}(G')\big) = H_{P,r^2/h_{G'}(P)}(G')$ valóban hipergömb.

Ha pedig P belső pontja G'-nek, akkor válasszuk $\widetilde{G}$-nak a P középpontú, $\sqrt{-h_{G'}(P)}$ sugarú hipergömböt. A P-ből G'-höz húzott szelőszakaszok ellentétes irányításúak és szorzatuk (abszolút értékben) éppen $\widetilde{G}$ sugarának négyzete, ezért $\sigma_{\widetilde{G}}(G') = H_{P,-1}(G')$. Ezután az előző esethez hasonlóan, de most 5.2.2.(2)-t is felhasználva $\sigma_G(G') = \sigma_G\big(H_{P,-1}(\sigma_{\widetilde{G}}(G'))\big) = (H_{P,-1} \circ \sigma_G \circ \circ \sigma_{\widetilde{G}})(G') = H_{P,r^2/h_{G'}(P)}(G')$ hipergömb. □

5.2.6. Következmény (Alacsonyabb dimenziójú gömb inverze). *Legyen $1 \le k \le d$ és legyen $G' \subset E$ $(k-1)$-dimenziós gömb. Ha $P \in G'$, akkor a $\sigma_G(G' - \{P\})$ halmaz $(k-1)$-dimenziós, $T_P G'$-vel párhuzamos affin altér, ha pedig $P \notin G'$, akkor $\sigma_G(G')$ szintén $(k-1)$-dimenziós gömb.*

Bizonyítás: A $P \in \langle G' \rangle$ esetben az állítás 5.2.5-ből nyilvánvaló a $\langle G' \rangle$ affin altérre szorítkozva.

A $P \notin \langle G' \rangle$ esetben tekintsük az 5.1.3. Következmény szerinti k-dimenziós, G'-t tartalmazó és P-n is áthaladó $\widetilde{G}$ gömböt, valamint egy tetszőleges olyan $H \subset E$ hipersíkot, amelyre $G' \subset H$ és $P \notin H$. Ekkor $G' = \widetilde{G} \cap H$, továbbá a $\sigma_G(\widetilde{G} - \{P\})$ halmaz k-dimenziós affin altér, a $\sigma_G(H) \cup \{P\}$ halmaz pedig hipergömb E-ben. Ezért 5.1.4-re hivatkozva $\sigma_G(G') = \sigma_G(\widetilde{G} - \{P\}) \cap \sigma_G(H)$ valóban $(k-1)$-dimenziós gömb. □

Megjegyzés. Az 5.2.3–5.2.6-ban megfogalmazott tulajdonságokat együttesen úgy szokás összefoglalni, hogy inverziónál tetszőleges dimenziójú gömbök vagy affin alterek képe ugyanolyan dimenziójú gömb vagy affin altér. Ez a szóhasználat kissé pontatlan amiatt, hogy nem tér ki a pólus hovatartozásából adódó szükségszerű leszűkítésekre. Az 5.2. szakasz hátralevő részében ezt a pontatlanságot a gördülékenyebb fogalmazás érdekében elnézzük. Az 5.3. szakaszban látni fogjuk, hogy a tér ún. inverzív bővítése útján ez a megfogalmazás is pontossá tehető.

5.2.7. Tétel (Az inverzió érintkezéstartása). *Legyenek G_1, $G_2 \subset E$ egyenlő dimenziójú E-beli gömbök, illetve egyikük affin altér is lehet. Ha G_1 és G_2 valamely P-től különböző pontban érintkeznek, akkor a P pólusú inverziónál keletkező képeik is érintkeznek. Ha pedig G_1 és G_2 a pólusban érintkeznek, akkor inverzeik párhuzamos affin alterek.*

Bizonyítás: Az érintkezés 5.1.9-beli jellemzéséből (beleértve az azt követő megjegyzést is) 5.2.4 és 5.2.6 alkalmazásával adódik. □

5.2.8. Tétel (Az inverzió szögtartása). *Legyen $d \geq 2$ és tegyük föl, hogy G_1 és G_2 két olyan E-beli gömb vagy affin altér, amelyek szögét értelmeztük. (Tehát vagy $\dim G_1 = \dim G_2 = d-1$, vagy G_1 és G_2 közül az egyik 1-dimenziós, a másik legalább 1-dimenziós, továbbá ha G_1 és G_2 nem mindkettő affin altér, akkor $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.) Ekkor a G-re vonatkozó inverziónál $\sphericalangle\big(\sigma_G(G_1), \sigma_G(G_2)\big) = \sphericalangle(G_1, G_2)$.*

Bizonyítás: Tekintsük először azt az esetet, amikor G_1 is és G_2 is affin altér. Ekkor $i = 1{,}2$-re a $(\dim G_i - 1)$-dimenziós $\sigma_G(G_i) \cup \{P\}$ gömbnek a P pólusban vett érintőhipersíkja párhuzamos G_i-vel, emiatt valóban

$$\sphericalangle\big(\sigma_G(G_1), \sigma_G(G_2)\big) = \sphericalangle\big(T_P(\sigma_G(G_1) \cup \{P\}), T_P(\sigma_G(G_2) \cup \{P\})\big) = \sphericalangle(G_1, G_2)\,.$$

Ha G_1 és G_2 nem mindkettő affin altér, akkor valamely $A \in G_1 \cap G_2$ kiszemelése után az 5.2.7. Tétel miatt G_1-et és G_2-t helyettesíthetjük a $T_A G_1$, illetve $T_A G_2$ affin alterekkel és alkalmazhatjuk rájuk a tétel már tisztázott esetét. Így

$$\begin{aligned} \sphericalangle(G_1, G_2) &= \sphericalangle(T_A G_1, T_A G_2) = \\ &= \sphericalangle\big(\sigma_G(T_A G_1) \cup \{P\}, \sigma_G(T_A G_2) \cup \{P\}\big) = \\ &= \sphericalangle\big(\sigma_G(G_1), \sigma_G(G_2)\big)\,, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben ismét az 5.2.7. Tételre hivatkozunk. □

5.2.9. Állítás. *Legyen $d \geq 2$ és $A, B \in E$ két különböző pont. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\sigma_G(A) = B$.

(ii) *Bármely A-n és B-n áthaladó E-beli hipergömb vagy hipersík merőlegesen metszi a G hipergömböt.*

(iii) *Bármely A-n és B-n áthaladó E-beli gömb vagy affin altér merőlegesen metszi a G hipergömböt.*

(iv) *Bármely A-n és B-n áthaladó E-beli kör vagy egyenes merőlegesen metszi G-t.*

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$ (ii): Ha G' hipergömb és $A, B \in G'$, akkor 5.1.17 alkalmazásával $h_{G'}(P) = \rho(P, A) \cdot \rho(P, B) = r^2$ miatt $G' \perp G$. Ha H hipersík és $A, B \in H$, akkor $P \in H$ és így $H \perp G$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Bármely gömb, illetve affin altér előáll az őt tartalmazó hipergömbök, illetve hipersíkok metszeteként. Ha mindegyik metszendő merőleges

G-re, akkor az affin altér és hipersík merőlegességének definíciójából (4.3.7), amit gömbök esetében a G-vel vett metszéspontokban az érintőhipersíkokra alkalmazunk, következik, hogy a metszet is merőleges G-re.

A (iv) állítás (iii) speciális esete.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Miután $\langle A, B\rangle \perp G$, a P pólus illeszkedik az $\langle A, B\rangle$ egyenesre. Tekintsünk az A és B pontokon át két különböző kört. Ezek mindegyikét 5.2.2.(4) és 5.2.2.(5) miatt a σ_G inverzió önmagára képezi, ezért metszetüket, azaz az $\{A, B\}$ halmazt is. Az A és B pontok nem tartozhatnak G-hez, mert akkor található volna rajtuk áthaladó, G-t nem merőlegesen metsző (például G-ben fekvő) kör. Ezért A és B nem fixpontok, és így σ_G felcseréli őket. □

Megjegyzés. Az 5.2.9. Állítás nyilván érvényes a G hipergömb helyett egy H hipersíkkal és a σ_G inverzió helyett a σ_H tükrözéssel is.

5.2.10. Következmény. *Valamely inverziónál egy a G hipergömbre nézve inverz pontpár a G hipergömb inverz képére nézve inverz pontpárba (illetve ha a kép hipersík, szimmetrikus pontpárba) képeződik. Más szóval, tetszőleges σ inverzióra $\sigma\circ\sigma_G\circ\sigma = \sigma_{\sigma(G)}$. Hasonlóképpen egy a H hipersíkra szimmetrikus pontpár képe inverzióban áll (illetve szimmetrikus) H inverzére nézve, azaz $\sigma \circ \sigma_H \circ \sigma = \sigma_{\sigma(H)}$.*

Bizonyítás: Az inverzióban álló pontpárok 5.2.9-beli jellemzéséből (illetve az azt követő, tükrös pontpárokról szóló megjegyzésből) valamint az inverzió gömbtartásából és szögtartásából adódik. □

5.2.11. Definíció (Sztereografikus vetítés). Tegyük fel, hogy $d \geq 2$, legyen $G \subset E$ hipergömb, $O \in G$ tetszőlegesen rögzített pont, és $H \subset E$ az a hipersík, amely az O-val átellenes pontban érinti a G hipergömböt. A G hipergömbnek az O pontból történő sztereografikus vetítésén azt a

$$v : G - \{O\} \to H$$

leképezést értjük, amelyre az O, A és $v(A)$ pontok kollineárisak minden $A \in$ $\in G$, $A \neq O$-ra. Ez a követelmény egyértelműen definiálja a v leképezést, mert a $v(A)$ pont szükségképpen az $\langle O, A\rangle$ egyenes és a H hipersík metszéspontja; ez a metszéspont pedig létezik $H \parallel T_O G$ miatt, hiszen az $\overrightarrow{OA}$ vektor lineárisan független a $\overrightarrow{T_O G}$ hipersíktól. Az is nyilvánvaló továbbá, hogy a v leképezés bijektív az O pontjától megfosztott G hipergömb és a H hipersík között.

Megjegyzés. A sztereografikus vetítés a fentinél kissé általánosabb körülmények között is ugyanilyen módon értelmezhető. Miután az O pontot rögzítettük, a H hipersík megadásánál csak az lényeges, hogy párhuzamos legyen az O-beli érintőhipersíkkal és különbözzön tőle, nem szükséges ahhoz ragaszkodni, hogy éppen az átellenes pontbeli érintőhipersík legyen. A H hipersík

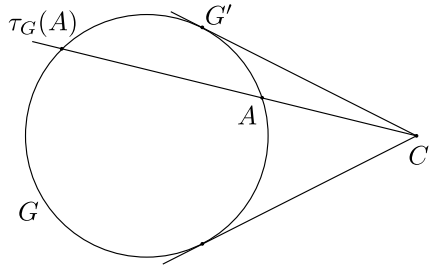
különböző helyzeteihez tartozó képek csak O középpontú homotéciában térnek el.

5.2.12. Állítás. *Az 5.2.11-beli sztereografikus vetítés megegyezik annak az inverziónak a $G - \{O\}$ halmazra való leszűkítésével, amelynek a pólusa az O pont, alapgömbjének sugara pedig egyenlő a G gömb átmérőjével.*

Bizonyítás: Valóban, ennél az inverziónál a pontok O-ból induló félegyenesek mentén mozdulnak el, és a $G - \{O\}$ halmaz képe éppen H. □

5.2.13. Következmény. *A sztereografikus vetítés a G-ben fekvő alacsonyabb dimenziójú gömböket ugyanakkora dimenziójú gömbökbe vagy affin alterekbe viszi, továbbá ezeknek az idomoknak a körében érintkezéstartó és szögtartó.* □

5.2.14. Definíció (Gömbi tükrözés). Tegyük fel, hogy $d \geq 2$ és rögzítsük a $G \subset E$ hipergömböt. Legyen $G' \subset G$ hipergömb a G-re vonatkozóan, azaz $(d-2)$-dimenziós gömb. Definiáljuk a G hipergömbnek a G'-re vonatkozó $\tau_{G'}$ gömbi tükrözését, a $\tau_{G'} : G \to G$ leképezést a következő módon.



Tegyük föl először, hogy G' középpontja nem esik egybe G középpontjával. A középpontok egyenesére vonatkozó $O(d-1)$-szimmetriára és a kétdimenziós esetre hivatkozva vegyük észre, hogy a G hipergömbnek a G' pontjaiban vett érintőhipersíkjai mind áthaladnak egyetlen $C \in E$ ponton. (Ezt a pontot, amely nyilvánvalóan külső pontja G-nek, nevezhetjük a G'-höz tartozó „érintőkúp” csúcsának. Az innen G-hez húzott érintőegyenesek mindannyian G' valamely pontjában érintik a G hipergömböt.) Tetszőleges $A \in G$ pontra legyen $\tau_{G'}(A) \in G$ az a pont, amelyre $\langle C, A\rangle \cap G = \{A, \tau_{G'}(A)\}$, azaz a $\langle C, A\rangle$ egyenes másik metszéspontja G-vel (illetve érintés esetén maga A).

Ha G' és G középpontja egybeesik, akkor a $\langle C, A\rangle$ egyenesek szerepét a $\langle G'\rangle$ hipersíkra merőleges egyenesek veszik át, azaz ilyenkor a $\tau_{G'}$ leképezést úgy értelmezzük, mint a $\sigma_{\langle G'\rangle}$ tükrözésnek a G hipergömbre való megszorítását.

Észrevehetjük, hogy a definíció első esetében is (amikor a középpontok nem esnek egybe) egy jól ismert leképezés G-re való megszorításáról van szó: annál

az inverziónál, amelynek C a pólusa és amelynek az alapgömbje tartalmazza G'-t (ilyen hipergömb 5.1.3 szerint egyértelműen létezik), a G hipergömb önmagára képeződik. Így az inverzióra vonatkozó gömbtartási, érintkezéstartási és szögtartási állítások a gömbi tükrözésekre is érvényesek. Ez a tény rögtön következik az alábbi tételből is, amely azt mutatja meg, hogy sztereografikus vetítésnél a gömbi tükrözések inverziókba vagy tükrözésekbe mennek át.

5.2.15. Tétel. *Legyen $v : G - \{O\} \to H$ sztereografikus vetítés és $G' \subset G$ tetszőleges $(d-2)$-dimenziós gömb. Ekkor:*

- *ha $O \in G'$, akkor $\sigma_{v(G'-\{O\})} = v \circ (\tau_{G'}|_{G-\{O\}}) \circ v^{-1}$,*
- *ha pedig $O \notin G'$, akkor $\sigma_{v(G')} = v \circ \tau_{G'} \circ v^{-1}$*

érvényes ott, ahol a két leképezés értelmezve van.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $d \geq 3$. Ekkor az 5.2.9. Állítást a H hipersíkra alkalmazva és 5.2.13-ra hivatkozva elég azt ellenőrizni, hogy $A \in G - G'$ esetén bármely A-n és $\tau_{G'}(A)$-n átfektetett, G-ben fekvő kör merőleges G'-re. Ha G' és G középpontja egybeesik, akkor ez nyilvánvaló a $\langle G' \rangle$ hipersíkra vonatkozó szimmetriából. Ha nem, akkor egy ilyen kör síkja tartalmazza a G'-höz tartozó érintőkúp C csúcsát. A C-n és egy közös ponton átfektetett egyenes egyrészt merőlegesen metszi G'-t, másrészt érinti a kört, emiatt a kör valóban merőleges G'-re.

Ha $d = 2$, akkor tekintsük az $\widetilde{E} = E \times \mathbf{R}$ szorzatteret, állítsuk G-re és G'-re $\widetilde{E}$-ban az eggyel magasabb dimenziójú, ugyanolyan középpontú $\widetilde{G} \supset G$, illetve $\widetilde{G'} \supset G'$ gömböket, valamint vegyük az E-re merőleges, azt H-ban metsző $\widetilde{H} \subset \widetilde{E}$ hipersíkot. Ezekre a tétel már bizonyított háromdimenziós esetét alkalmazva, majd a leképezéseket E-re megszorítva adódik az állítás. □

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a tétel $O \notin G'$ esetében a $v \circ \tau_{G'} \circ v^{-1}$ kompozíció mely pontban nincs értelmezve. Nyilván ott, ahol v^{-1}-et, majd $\tau_{G'}$-t alkalmazva éppen az O pontba jutunk. Ez a pont tehát csakis az $\langle O, C \rangle$ egyenes és H metszéspontja lehet (illetve közös középpontú G' és G esetén az O-ból a $\langle G' \rangle$ hipersíkra állított merőleges egyenes és H metszéspontja). Ezzel a tételnek azt a kiegészítését kaptuk, hogy sztereografikus vetítésnél a gömbi tükrözés olyan inverzióba megy át, amelynek a pólusa az érintőkúp csúcsának a vetülete. Ahhoz, hogy ez a megállapítás közös középpontú G' és G esetén is érvényes legyen, szemléletünk azt sugallja, hogy ilyenkor érintőkúpon a G-t G' mentén érintő hengert érdemes érteni, amelynek a csúcsa „végtelen távol” van a $\langle G' \rangle$ hipersíkra merőleges irányban. Ennek a szemléletnek a projektív geometria fogalmai adnak majd pontos matematikai formát.

5.3. Az inverzív csoport

A korábban vizsgált transzformációtípusokkal ellentétben az inverziókat nem tudjuk minden további nélkül komponálni egymással, hiszen nincsenek az egész téren értelmezve. Annak érdekében, hogy az inverziók is egy transzformációcsoport elemei lehessenek, ezt a hiányosságot a tér kibővítése útján szüntetjük meg.

5.3.1. Definíció (Inverzív bővítés). Használjuk a ∞ szimbólumot egy olyan rögzített matematikai objektumnak a jelölésére, amely nem eleme egyetlen, általunk vizsgált euklideszi térnek sem. A továbbiakban ∞-t „végtelen távoli" pontnak képzeljük és hozzácsatoljuk az E euklideszi térhez. Az $E^+ = E \cup \{\infty\}$ halmazt az E euklideszi tér inverzív bővítésének (vagy egyszerűen csak inverzív térnek) nevezzük.

Ha $S \subseteq E$ affin altér, akkor (miután S maga is euklideszi tér) automatikusan $S^+ = S \cup \{\infty\} \subseteq E^+$. Az inverzív kibővítés után tehát a ∞ pont közös eleme az összes E-beli (kibővített) affin altérnek.

Megállapodunk abban, hogy az $f \in \mathrm{Sim}\,(E)$ hasonlóságokat az $f(\infty) = \infty$ szabállyal kiterjesztjük E^+-ra. Így például bármely $H \subset E$ hipersíkra a σ_H tükrözésnek ∞ is fixpontja, összhangban azzal, hogy $\infty \in H^+$.

Végül megállapodunk abban is, hogy bármely $G \subset E$ hipergömb esetén a G-re vonatkozó inverziót a $\sigma_G(\infty) = P$, $\sigma_G(P) = \infty$ szabállyal $\sigma_G : E^+ \to E^+$ leképezéssé terjesztjük ki, ahol P a G középpontja. Ezáltal az összes inverzió ugyanazt az E^+ teret képezi bijektíven önmagára. Ez a megállapodás 5.2.12 alapján egyúttal a sztereografikus vetítéseket is kiterjeszti olyan módon, hogy a vetítés középpontjának a vetülete a ∞ pont.

Könnyen végiggondolható, hogy az inverzió 5.2.2–5.2.10-ben tárgyalt tulajdonságai a kiterjesztés után is érvényben maradnak, sőt helyenként egyszerűsödnek, mert bizonyos esetszétválasztások szükségtelenné válnak. Például érdemes abban megállapodni, hogy két párhuzamos E^+-beli (kibővített) affin alteret a ∞ pontban érintkezőnek tekintünk, ezáltal az inverzió mindenfajta kivétel nélkül érintkezéstartóvá válik.

Megjegyzés. Lássuk el az E^+ halmazt azzal a topológiával, amelyben E pontjainak környezetbázisát alkotják a szokásos E-beli környezetek, a ∞ pont számára pedig az $E^+ - C$ alakú halmazok alkotnak környezetbázist, ahol $C \subseteq E$ kompakt. (Az így konstruált E^+ topologikus teret az E tér „egypontos kompaktifikáció"-jának szokás nevezni.) Ezzel a topológiával az E^+ inverzív tér az $\mathbf{S}^d$ gömbbel homeomorf. Legyen ugyanis E hipersík egy eggyel magasabb dimenziójú $\widetilde{E}$ euklideszi térben (lehet például $\widetilde{E} = E \times \mathbf{R}$), és

legyen $v : G \to E^+$ sztereografikus vetítés E^+-ra, ahol $G \subset \widetilde{E}$ alkalmas hipergömb. Könnyű meggondolni, hogy ekkor v homeomorfizmus.

5.3.2. Definíció (Möbius-transzformációk, inverzív csoport). Miután az inverziók és a tükrözések is $E^+ \to E^+$ bijekciók, tekinthetjük az általuk generált $\mathcal{M}(E)$ részcsoportot az összes $E^+ \to E^+$ bijekció alkotta csoportban. Ennek a csoportnak az elemeit nevezzük E-beli (vagy, ha pontosabbak akarunk lenni, E^+-beli) Möbius-transzformációknak. Magát az $\mathcal{M}(E)$ csoportot pedig E Möbius-csoportjának vagy inverzív csoportjának szokás nevezni.

Ha G tetszőleges (legalább egydimenziós) gömb, akkor tekinthetjük a G-beli gömbi tükrözések által generált $\mathcal{M}(G)$ részcsoportot az összes $G \to G$ bijekció alkotta csoportban. Ez a G gömb Möbius-csoportja, elemei a gömbi Möbius-transzformációk G-n.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a Möbius-csoportbeli műveletet a kompozíció $\circ$ jele helyett szorzással (egymás mellé írással) jelöljük.

A Möbius-transzformációkra nyilvánvaló módon átöröklődnek a tükrözések és az inverziók invarianciatulajdonságai. Tehát az E-beli Möbius-transzformációk bármely gömböt vagy affin alteret ugyanolyan dimenziójú gömbbe vagy affin altérbe képeznek, továbbá ezeknek az idomoknak a körében érintkezés- és szögtartók. Ugyanígy egy G gömb Möbius-transzformációi is gömbtartók, érintkezéstartók és szögtartók.

5.3.3. Állítás.

(1) *Bármely $\mu \in \mathcal{M}(E)$ Möbius-transzformációra és bármely $G \subset E$ hipergömbre vagy hipersíkra* $\mu\, \sigma_G\, \mu^{-1} = \sigma_{\mu(G)}$.

(2) *Bármely $\mu \in \mathcal{M}(G)$ gömbi Möbius-transzformációra és $G' \subset G$ eggyel kisebb dimenziójú gömbre* $\mu\, \tau_{G'}\, \mu^{-1} = \tau_{\mu(G')}$.

Bizonyítás: Az (1) állítás 5.2.10-ből, (2) pedig (1)-ből és 5.2.15-ből adódik. □

5.3.4. Állítás. *Ha* $\dim G = \dim E$ *és* $v : G \to E^+$ *sztereografikus vetítés, akkor*

$$\mathcal{M}(E) = v \circ \mathcal{M}(G) \circ v^{-1}\,,$$

speciálisan $\mathcal{M}(E)$ és $\mathcal{M}(G)$ izomorf csoportok.

Bizonyítás: Közvetlenül következik az 5.2.15. tételből. □

5.3.5. Definíció ($\mathcal{M}^d$). Bármely $d \geq 1$ esetén d-dimenziós Möbius-csoportnak nevezzük az $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ csoportot. Az előző állítás alapján $\mathcal{M}^d \cong \mathcal{M}(\mathbf{S}^d)$, ahol $\mathbf{S}^d$ az $\mathbf{R}^{d+1}$ koordinátatér egységgömbje.

5.3.6. Állítás. *Ha* $\dim E \geq 2$, *akkor azok az* E*-beli Möbius-transzformációk, amelyek a* ∞ *pontot fixen tartják, pontosan* E *hasonlósági transzformációi, azaz*

$$\mathrm{Sim}\,(E) = \{\mu \in \mathcal{M}(E) \,:\, \mu(\infty) = \infty\}.$$

Bizonyítás: A $\subseteq$ tartalmazási reláció belátásához elő kell tudnunk állítani minden hasonlósági transzformációt tükrözések vagy inverziók kompozíciójaként. Tudjuk, hogy bármely hasonlóság előáll egy izometria és egy pozitív arányú homotécia egymásutánjaként. Az izometriák valóban előállnak tükrözések kompozíciójaként (l. 4.3.15), a pozitív homotéciák pedig 5.2.2.(6) alapján két inverzió kompozíciójaként állíthatók elő.

A fordított irányú $\supseteq$ tartalmazáshoz csak a 4.6.12. Tételt kell felidézni, amely szerint az euklideszi tér hipergömbtartó bijekciói hasonlóságok. □

Megjegyzés. A fenti bizonyítás utolsó lépésében kihasználtuk a $\dim E \geq 2$ feltételt. Az 5.3.6. Állítás azonban igaz a $\dim E = 1$ esetben is. Ezt legegyszerűbben az alább tárgyalandó Poincaré-féle kiterjesztés segítségével láthatjuk be, l. 5.3.10.

5.3.7. Tétel. *Bármely legalább 2-dimenziós* G *gömbre és* $f : G \to G$ *bijekcióra az alábbi feltételek egyenértékűek:*

(i) $f \in \mathcal{M}(G)$.

(ii) *Bármely* $1 \leq k \leq \dim G - 1$ *mellett az* f *leképezés a* G*-ben fekvő* k*-dimenziós gömböket* k*-dimenziós gömbökbe képezi.*

(iii) *Bármely* G*-ben fekvő kör* f*-nél származó képe is kör.*

Bizonyítás: Az (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikációk nyilvánvalók.

A (iii) $\Rightarrow$ (i) irány igazolása céljából tegyük fel, hogy f körtartó bijekció. Feltehetjük, hogy f-nek van fixpontja. Ha ugyanis nincs, akkor egy tetszőleges $A \in G$ pontot kiszemelve választhatunk olyan τ gömbi tükrözést, amelyre $\tau(A) = f(A)$, ekkor a $\tau \circ f$ kompozíciónak már van fixpontja (az A pont), és ha $\tau \circ f$-ről tudjuk, hogy $\mathcal{M}(G)$-beli, akkor $\tau \in \mathcal{M}(G)$ miatt ez f-re is következik.

Válasszuk f fixpontját valamely $v : G \to H^+$ sztereografikus vetítés pólusának, és tekintsük a $g = v \circ f \circ v^{-1} : H^+ \to H^+$ leképezést. Nyilván $g(\infty) = \infty$, és a (iii) feltevés, valamint v körtartása miatt $g|_H$ körtartó bijekció. Ezért $g|_H$ a H hasonlósági transzformációja, így az 5.3.6. Állítás alkalmazásával $g \in \mathcal{M}(H)$. Ekkor viszont 5.3.4. miatt $f \in \mathcal{M}(G)$. □

Megjegyzés. Az 5.3.7. Tételt gömb helyett nyilván az euklideszi tér Möbius-transzformációira vonatkozóan is ki lehet mondani, csak a megfogalmazás

kissé körülményesebb, mert például a körtartás helyébe lépő feltételben körökről és egyenesekről kell egyszerre beszélni.

5.3.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\dim E \geq 2$ *és a* $\mu \in \mathcal{M}(E)$ *Möbius-transzformáció pontonként fixen hagyja a* $G \subset E$ *hipergömböt vagy hipersíkot. Ekkor vagy* $\mu = id_{E^+}$, *vagy* $\mu = \sigma_G$.

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy G hipersík. Ekkor $\mu(\infty) = \infty$, ezért 5.3.6 miatt $\mu \in \mathrm{Sim}\,(E)$. Miután $\dim E \geq 2$, a G hipersíknak egynél több pontja van, azaz a μ hasonlóságnak egynél több fixpontja van E-ben. Ez csak úgy lehet, hogy μ izometria. Ha az euklideszi tér egy izometriája egy hipersíkon identikus, akkor ez az izometria vagy az identitás, vagy tükrözés.

Ha G hipergömb, akkor alkalmazzunk egy $O \in G$ pólus körüli tetszőleges hipergömbre vonatkozó σ inverziót. Ekkor $\sigma(G)$ hipersík, és a $\sigma\,\mu\,\sigma \in \mathcal{M}(E)$ Möbius-transzformáció pontonként fixen hagyja $\sigma(G)$-t. Ezért a hipersík esetére már belátott állítás szerint vagy $\sigma\,\mu\,\sigma = id_{E^+}$, vagy pedig $\sigma\,\mu\,\sigma = \sigma_{\sigma(G)}$. Az első esetben átszorzással $\mu = id_{E^+}$ adódik, a második esetben pedig 5.3.3.(1) felhasználásával $\mu = \sigma_G$-t kapjuk. □

Megjegyzés. Az 5.3.8. Lemmában a $\dim E \geq 2$ feltétel nem hagyható el: az egydimenziós geometriában például egy rögzített középponttal vett összes homotécia fixen tart egy hipersíkot.

5.3.9. Definíció (Poincaré-kiterjesztés). Tegyük föl, hogy $\dim E \geq 2$ és legyen $H \subset E$ hipersík. Definiáljuk a $p_H^E : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{M}(E)$ homomorfizmust a következőképpen. Ha $G \subset H$ hipergömb vagy hipersík H-ban, jelölje $\widetilde{G}$ azt az E-beli hipergömböt, illetve hipersíkot, amely H-ra merőleges és $\widetilde{G} \cap H = G$. (Tehát ha G hipergömb, akkor $\widetilde{G}$ középpontja és sugara azonos G-ével.) Ha most $\mu \in \mathcal{M}(H)$, $\mu = \sigma_{G_k}\,\sigma_{G_{k-1}}\,\ldots\,\sigma_{G_1}$ tetszőleges Möbius-transzformáció H-ban, akkor legyen

$$p_H^E(\mu) = \sigma_{\widetilde{G}_k}\,\sigma_{\widetilde{G}_{k-1}}\,\ldots\,\sigma_{\widetilde{G}_1} \in \mathcal{M}(E)\,.$$

Ellenőrizni kell, hogy p_H^E korrekt módon definiált leképezés, azaz ha μ-t kétféleképpen állítjuk elő inverziók és tükrözések kompozíciójaként, akkor a két esetben a fenti formula ugyanazt az E-beli Möbius-transzformációt állítja elő. Legyen

$$\mu = \sigma_{G_k}\,\ldots\,\sigma_{G_1} = \sigma_{G'_l}\,\ldots\,\sigma_{G'_1}$$

a kétféle szorzatelőállítás, átszorzás után azt kell ellenőrizni, hogy a

$$\sigma_{\widetilde{G'}_1}\,\ldots\,\sigma_{\widetilde{G'}_l}\,\sigma_{\widetilde{G}_k}\,\ldots\,\sigma_{\widetilde{G}_1}$$

kompozíció identikus. Ez olyan E-beli Möbius-transzformáció, amely a H hipersíkot pontonként fixen hagyja (hiszen H-n a $\mu^{-1}\mu$ kompozícióval egyenlő),

valamint nem cseréli fel a H szerinti két félteret. Így 5.3.8 miatt csak id_{E^+} lehet.

A definícióból magától értetődik, hogy a p_H^E leképezés injektív homomorfizmus az $\mathcal{M}(H)$ csoportból az $\mathcal{M}(E)$ csoportba.

Hasonló módon értelmezhető a $p_G^E : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(E)$ Poincaré-kiterjesztés akkor is, ha $G \subset E$ hipergömb, illetve $p_G^{G'} : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G')$ akkor, ha $G \subset G'$ gömbök, $\dim G' = \dim G + 1$.

Az $\mathbf{R} \subset \ldots \subset \mathbf{R}^d \subset \mathbf{R}^{d+1} \subset \ldots$ beágyazásokhoz tartozó Poincaré-kiterjesztések injektív homomorfizmusok végtelen sorozatát adják:

$$\mathcal{M}^1 \xrightarrow{p_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}^2}} \mathcal{M}^2 \longrightarrow \quad \ldots \quad \longrightarrow \mathcal{M}^d \xrightarrow{p_{\mathbf{R}^d}^{\mathbf{R}^{d+1}}} \mathcal{M}^{d+1} \longrightarrow \quad \ldots$$

5.3.10. Állítás. *Az 5.3.6. Állítás* $\dim E = 1$ *esetén is igaz: az euklideszi egyenes hasonlóságai pontosan a* ∞ *pontot fixen tartó Möbius-transzformációk.*

Bizonyítás: Csak azt kell belátnunk, hogy az egyenesen azok a Möbius-transzformációk, amelyek a ∞ pontot fixen tartják, hasonlóságok. A fordított irányban ugyanis az 5.3.6-beli okoskodás az egyenes esetére is érvényes. Alkalmazzuk a Poincaré-kiterjesztést egy ilyen Möbius-transzformációra, majd a kiterjesztett transzformációra alkalmazzuk az 5.3.6. Állítás síkra vonatkozó esetét. □

5.3.11. Tétel.

(1) *Az* $\mathcal{M}(E)$ *csoport bármely eleme előállítható legfeljebb* $d+2$ *darab inverzió vagy tükrözés kompozíciójaként.*

(2) *Ha* G *tetszőleges* d*-dimenziós gömb, akkor* $\mathcal{M}(G)$ *bármely eleme előállítható legfeljebb* $d+2$ *gömbi tükrözés kompozíciójaként.*

Bizonyítás: A két állítás tartalma az 5.2.15. Tétel alapján egyenértékű, így elegendő (1)-et bizonyítani. Legyen $\mu \in \mathcal{M}(E)$ tetszőleges. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy μ-nek fixpontja-e a ∞ pont, vagy sem.

1. eset: $\mu(\infty) = \infty$.
Ekkor 5.3.6 alapján μ hasonlósági transzformáció E-ben. Ha μ izometria, akkor előáll legfeljebb $d+1$ tükrözés szorzataként és így készen vagyunk. Ha μ aránya az 1-től különböző λ szám, akkor μ-nek van egy P fixpontja E-ben is. Alkalmas P körüli G_1 és G_2 hipergömbökkel $\sigma_{G_2}\sigma_{G_1} = H_{P,1/\lambda}$ (l. 5.2.2.(6)), így $\sigma_{G_2}\sigma_{G_1}\mu$ izometria. Ennek az izometriának P fixpontja, ezért előállítható legfeljebb d darab tükrözés szorzataként. Emiatt μ előáll legfeljebb d tükrözés és két inverzió szorzataként.

2. eset: $\mu(\infty) = P \neq \infty$.

Ha most G tetszőleges P középpontú hipergömb E-ben, akkor ∞ fixpontja a $\sigma_G\,\mu$ Möbius-transzformációnak, így 5.3.6 miatt $\sigma_G\,\mu \in \mathrm{Sim}\,(E)$. Állítjuk, hogy G sugarát meg tudjuk úgy választani, hogy $\sigma_G\,\mu$ izometria legyen. Valóban, G helyett egy vele koncentrikus G' hipergömböt választva

$$\sigma_{G'}\,\mu = (\sigma_{G'}\,\sigma_G)\,(\sigma_G\,\mu),$$

és itt a $\sigma_{G'}\,\sigma_G$ homotécia aránya 5.2.2.(6) alapján tetszőleges pozitív szám lehet; válasszuk G'-t úgy, hogy ez az arány a $\sigma_G\,\mu$ hasonlóság arányának a reciproka legyen. Feltehető tehát, hogy $\sigma_G\,\mu$ izometria, ezért előáll legfeljebb $d{+}1$ tükrözés szorzataként, innen átszorzással μ előáll legfeljebb $d{+}1$ tükrözés és egy inverzió szorzataként. □

A szakasz hátralevő részében definiálni szeretnénk az irányítástartás, illetve irányításváltás fogalmát a Möbius-transzformációk körében. Bizonyos típusú Möbius-transzformációk esetére, mégpedig a hasonlóságokra, az irányítástartás már értelmezve van az affinitások körében. Természetesen úgy kívánjuk az $\mathcal{M}(E)$ csoport elemei közül az irányítástartókat kijelölni, hogy a hasonlóságok között pontosan azok legyenek irányítástartó Möbius-transzformációk, amelyek mint affinitások irányítástartók.

5.3.12. Definíció (Irányítástartás, -váltás). Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{M}(E)$ Möbius-transzformáció irányítástartó, ha előállítható páros sok olyan $\mathcal{M}(E)$-beli elem szorzataként, amelyek mindegyike inverzió vagy tükrözés. Irányításváltónak nevezzük μ-t, ha páratlan sok tényezőből álló kompozícióként fejezhető ki inverziókkal és tükrözésekkel.

Azt várjuk természetesen, hogy egy Möbius-transzformáció ne lehessen egyszerre irányítástartó és irányításváltó, azaz ne lehessen ugyanazt az $\mathcal{M}(E)$-beli elemet páros hosszúságú szorzatként is és páratlan hosszúságú szorzatként is előállítani inverziókból és tükrözésekből. Ehhez arra van szükség, hogy páratlan sok inverzió és tükrözés szorzata ne lehessen identikus; ezt bizonyítjuk be alább az 5.3.13. Lemmában.

Ha G gömb, akkor hasonló módon $\mu \in \mathcal{M}(G)$-t irányítástartónak mondjuk, ha páros sok, irányításváltónak, ha páratlan sok gömbi tükrözés kompozíciójaként áll elő. Az 5.3.4-beli $\mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(G)$, $\mu \mapsto v \circ \mu \circ v^{-1}$ izomorfizmus irányítástartó Möbius-transzformációknak irányítástartókat feleltet meg.

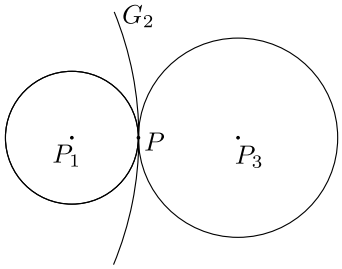
5.3.13. Lemma. *Ha k darab E-beli inverzió vagy tükrözés kompozíciója hasonlóság, akkor ez a hasonlóság irányítástartó, ha k páros, és irányításváltó, ha k páratlan. Speciálisan, akárhogyan állítjuk is elő id_{E^+}-t inverziók és tükrözések szorzataként, akkor ebben a szorzatban a tényezők száma páros.*

Bizonyítás: Először a $k \leq 3$ esetekben ellenőrizzük a lemma állítását, majd k szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

A $k = 1$ esetben csak tükrözésről lehet szó, ami valóban irányításváltó. Ha $k = 2$, akkor a kompozíció csak úgy lehet hasonlóság, azaz a ∞ pont csak úgy maradhat helyben, ha vagy mindkét transzformáció helyben hagyja ∞-t, vagy pedig az első transzformáció valamely $P \in E$ pontba képezi ∞-t és a második visszaviszi P-t ∞-be. Az első esetben két tükrözésről van szó, amelyek szorzata irányítástartó egybevágóság, a második esetben pedig két P középpontú körre vonatkozó inverzió szerepel a kompozícióban, ami 5.2.2(6) alapján pozitív homotécia és így irányítástartó.

Legyen most $k = 3$. Tekintsük a $\mu = \sigma_{G_3}\,\sigma_{G_2}\,\sigma_{G_1} \in \mathcal{M}(E)$ szorzatot, ahol G_1, G_2, G_3 hipergömbök vagy hipersíkok E-ben, és tegyük fel, hogy $\mu \in$ $\in \mathrm{Sim}\,(E)$, azaz $\mu(\infty) = \infty$. Akár G_1, akár G_3 hipersík, alkalmazhatjuk a $k = 2$ esetet a másik kettő alkotta kompozícióra, ezért feltehetjük, hogy G_1 is és G_3 is hipergömb. Jelölje P_1, illetve P_3 a középpontjaikat, ekkor $\sigma_{G_1}(\infty) =$ $= P_1$, $\sigma_{G_3}(P_3) = \infty$, és ezért $\sigma_{G_2}(P_1) = P_3$. Ha akár G_1, akár G_3 sugarát megváltoztatjuk, akkor ezáltal μ egy-egy pozitív homotéciával komponálódik (jobbról, illetve balról), ami μ irányítástartó, illetve -váltó voltát nem változtatja meg.

Ha most $P_1 = P_3$, akkor egyrészt $\sigma_{G_2}(P_1) = P_3$ miatt ez a pont illeszkedik G_2-re, másrészt a sugarak megválasztásával elérhetjük, hogy $G_1 = G_3$ legyen. Ekkor 5.2.10 miatt $\mu = \sigma_{G_1}\,\sigma_{G_2}\,\sigma_{G_1} = \sigma_{\sigma_{G_1}(G_2)}$, ami tükrözés a $\sigma_{G_1}(G_2)$ hipersíkra, azaz valóban irányításváltó.



Ha $P_1 \neq P_3$, akkor G_2 vagy a $[P_1, P_2]$ szakasz felező merőleges hipersíkja, vagy pedig olyan gömb, amelynek a középpontja kollineáris P_1-gyel és P_2-vel. Mindkét esetben G_1 és G_3 sugarát alkalmasan megváltoztatva elérhetjük, hogy G_1, G_2 és G_3 egy közös P pontban érintkezzen. Válasszunk egy P középpontú (egyébként tetszőleges) G hipergömböt, és tekintsük a $\sigma_G\,\mu\,\sigma_G$ kompozíciót:

$$\sigma_G\,\mu\,\sigma_G = (\sigma_G\,\sigma_{G_3}\,\sigma_G)(\sigma_G\,\sigma_{G_2}\,\sigma_G)(\sigma_G\,\sigma_{G_1}\,\sigma_G) = \sigma_{\sigma_G(G_3)}\,\sigma_{\sigma_G(G_2)}\,\sigma_{\sigma_G(G_1)}\,.$$

Itt mindegyik $\sigma_G(G_i)$ hipersík, mégpedig a G_1, G_2 és G_3 közös P-beli érintőhipersíkjával párhuzamos hipersíkok. Ezért $\sigma_G\,\mu\,\sigma_G$ három párhuzamos hipersíkra vonatkozó tükrözés szorzata, azaz $\sigma_G\,\mu\,\sigma_G = \sigma_H$ valamilyen H hipersíkkal. Innen $\mu = \sigma_G\,\sigma_H\,\sigma_G = \sigma_{\sigma_G(H)}$ következik, azaz μ maga is tükrözés

vagy inverzió. Miután μ hasonlóság, csak tükrözés lehet, és így irányításváltó. Ezzel a lemmát beláttuk a $k = 3$ esetben is.

Legyen végül $k \geq 4$ és tegyük föl, hogy k-nál kevesebb tényezőből álló kompozíciókra a lemma állítása igaz. Tekintsünk egy k-tényezős $\mu = \sigma_{G_k} \ldots \sigma_{G_1}$ szorzatot, amelyre $\mu \in \mathrm{Sim}\,(E)$. Bontsuk szét a szorzatot két tényezőre ilyen módon:

$$\mu = (\sigma_{G_k}\, \sigma_{G_{k-1}})\, (\sigma_{G_{k-2}} \ldots \sigma_{G_1})\,.$$

Feltehetjük, hogy a két tényező nem hasonlóság, mert akkor az indukciós feltevés alapján készen lennénk. Így a $\sigma_{k-2} \ldots \sigma_{G_1}$ tényező ∞-t egy $P \in E$ pontba viszi. Válasszunk egy P középpontú G gömböt, ezzel

$$\mu = (\sigma_{G_k}\, \sigma_{G_{k-1}}\, \sigma_G)\, (\sigma_G\, \sigma_{G_{k-2}} \ldots \sigma_{G_1})\,.$$

Itt mindkét tényező ∞-t ∞-be viszi, azaz hasonlóság. Az indukciós feltevés szerint a $\sigma_G\, \sigma_{G_{k-2}} \ldots \sigma_{G_1}$ tényező pontosan akkor irányítástartó, ha k páratlan. A $k = 3$ esetet a másik tényezőre alkalmazva kapjuk, hogy μ irányítástartó, ha k páros, és irányításváltó, ha k páratlan. □

5.3.14. Következmény. *Az irányítástartó Möbius-transzformációk* 2 *indexű részcsoportot alkotnak a teljes inverzív csoportban.* □

Megjegyzés. A Möbius-transzformációk elnevezését illetően a szakirodalom nem egységes. Vannak olyan szakkönyvek, amelyekben csak az irányítástartó leképezésekre használják a Möbius-transzformáció nevet, továbbá ezzel összhangban a Möbius-csoport megnevezés nem az egész inverzív csoportot illeti, hanem csak a 2 indexű irányítástartó részcsoportot.

5.4. Körsorok az euklideszi síkon

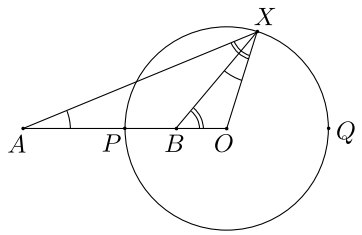
Az euklideszi sík olyan körrendszereit vizsgáljuk, amelyekben bármely két különböző kör hatványvonala ugyanaz. Ezért ebben a szakaszban a $d = 2$ esetre szorítkozunk. Az egységes szóhasználat kedvéért koncentrikus (és különböző) körök esetén az üres halmazt tekintjük a két kör hatványvonalának.

5.4.1. Példák. Az alábbi körrendszerek mindegyikében bármelyik két különböző kör hatványvonala nyilvánvalóan azonos:

- koncentrikus körök tetszőleges rendszere;
- valamely közös pontjukban egymást érintő körök tetszőleges rendszere;

- a sík valamely két rögzített pontján áthaladó körök tetszőleges rendszere.

5.4.2. Példa. Rögzítsünk az E síkon két különböző pontot, A-t és B-t. Ha az $\langle A, B\rangle$ egyenes két további pontja, P és Q, egymás inverzei az $[A, B]$ átmérőjű körre nézve, akkor a $[P, Q]$ átmérőjű kört Apollóniosz-féle körnek nevezzük az A és B alappontokra vonatkozóan. (Könnyen látható, hogy egy kör akkor és csak akkor Apollóniosz-kör az A, B alappontokra vonatkozóan, ha A és B egymás inverzei a körre nézve.) Ha $r = \rho(A, B)/2$, akkor az $[A, B]$ szakasz felezőpontjának bármelyik Apollóniosz-körre vonatkozó hatványa nyilván r^2-tel egyenlő, ezért bármelyik két Apollóniosz-kör hatványvonala ugyanaz az egyenes, mégpedig A és B felező merőlegese.



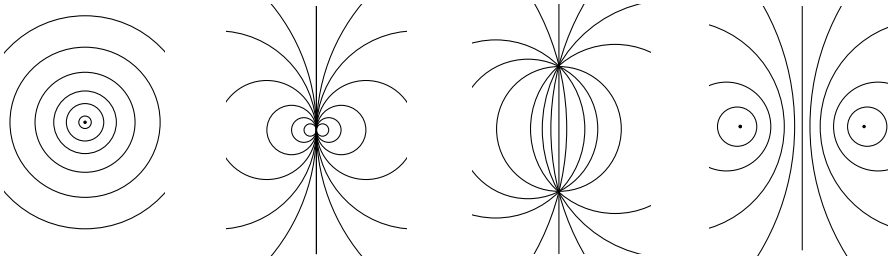
Megjegyzések. (1) Legyen X a $[P, Q]$ átmérőjű, O középpontú Apollóniosz-kör P-től és Q-tól különböző pontja. Az OBX háromszög és az OXA háromszög hasonló voltát felhasználva elemi szögszámolással igazolható, hogy az $\langle X, P\rangle$ és $\langle X, Q\rangle$ egyenesek felezik az $\langle X, A\rangle$ és $\langle X, B\rangle$ egyenesek közti szögeket. Ezért a szögfelezőtétel alapján a $\rho(X, A)/\rho(X, B)$ függvény konstans, amikor az X pont egy Apollóniosz-körön fut. Ennek a hányadosnak bármely előírt pozitív és 1-től különböző értékéhez egy-egy Apollóniosz-kör tartozik. Egyesítésük kitölti a síkot az A és a B pont, valamint a felező merőleges kivételével.

(2) Az egyszerűbb szóhasználat érdekében az 5.1.16. Tételt megelőző megjegyzéssel összhangban a továbbiakban zérus sugarú körnek tekintjük, pontkörnek nevezzük és a körök közé soroljuk az egyetlen pontból álló alakzatokat is. Úgy tekintjük, hogy a pontkörön áthaladó egyenes vagy kör érinti a pontkört, és ugyanakkor merőlegesen is metszi.

5.4.3. Definíció (Körsor). Az euklideszi síkon az alábbi négy típusba tartozó, körökből és esetleg egyenesekből, pontokból álló halmazrendszereket nevezzük körsornak:

– koncentrikus körsor: valamely pont mint középpont körüli összes kör alkotta rendszer, beleértve a közös középpontot is mint pontkört;

– érintkező körsor: egy egyenesből, egy rajta megadott pontból és az egyenest ebben a pontban érintő összes körből álló rendszer;

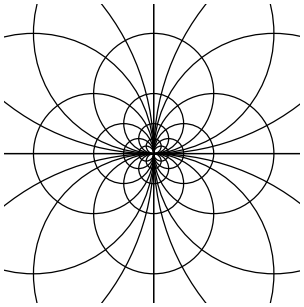


– metsző körsor: két rögzített ponton áthaladó összes körből és egyenesből álló rendszer;

– Apollóniosz-féle körsor: két rögzített pontból, a felező merőlegesükből és a két ponthoz mint alappontokhoz tartozó összes Apollóniosz-körből álló rendszer.

Világos, hogy egy körsorból két kört (akár pontkört) tetszőlegesen kiválasztva ezek hatványvonala ugyanaz, és a nem koncentrikus esetekben ez a hatványvonal a körsor egyetlen egyenese. Bármely körsor lefedi a síkot, továbbá a sík valamely pontja a körsornak vagy egyetlen tagjához tartozik hozzá, vagy az összes tagjához hozzátartozik. Az utóbbi esetben a szóban forgó pontot a körsor tartópontjának nevezzük. A metsző körsornak két, az érintkező körsornak egy tartópontja van, a többi körsornak nincsen tartópontja. A körsorhoz tartozó körök középpontjai nyilván kollineárisak, és a nem koncentrikus esetekben semelyik két középpont nem eshet egybe.

5.4.4. Definíció (Merőleges körsorok). Két körsort merőlegesnek mondunk, ha az egyik körsor bármelyik tagja merőlegesen metszi a másik körsor bármelyik tagját.



Például két olyan érintkező körsor, amelyek hatványvonala merőleges és tartópontja közös, nyilvánvaló módon merőleges körsorok. Ettől különböző példával szolgál alább az 5.4.6. Állítás.

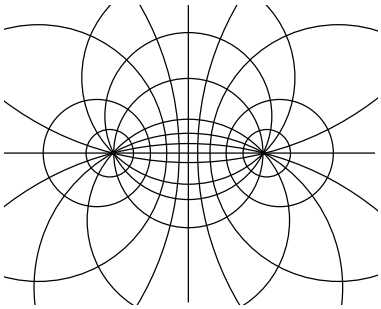
5.4.5. Lemma. *Ha egy K kör vagy egyenes egy $\mathcal{K}$ körsor két különböző tagjára merőleges, akkor K a $\mathcal{K}$ összes tagjára merőleges.*

Bizonyítás: Ha $\mathcal{K}$ koncentrikus körsor, akkor 5.1.17. alapján K csak egyenes lehet. A merőlegesség ez esetben azt jelenti, hogy a K egyenesnek át kell haladnia a közös középponton, és így K valóban merőleges a körsor összes tagjára.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{K}$ nem koncentrikus körsor. Ha K egyenes, akkor a merőlegességi feltevés miatt vagy két középpont is illeszkedik rá, vagy pedig áthalad egy középponton és merőleges a hatványvonalra. Mindkét esetben K csak a középpontokat felfűző egyenes lehet, amely $\mathcal{K}$ összes tagjára merőleges.

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy K kör (pontkört is megengedve). Az 5.1.17. Lemmát alkalmazzuk, amely nyilván a zérus sugarú esetekben is érvényes. A lemmából következik, hogy K középpontja a körsor hatványvonalára illeszkedik. Ekkor persze K merőleges magára a hatványvonalra, továbbá újra 5.1.17 alkalmazásával nyerjük, hogy merőleges a körsor összes körére is (a pontköröket is közéjük értve). □

5.4.6. Állítás. *Legyen A és B két különböző pont a síkon. Ekkor az A, B tartópontú metsző körsor és az A, B alappontokhoz tartozó Apollóniosz-féle körsor merőleges körsorok.*



Bizonyítás: A metsző körsor bármelyik tagja merőlegesen metszi az Apollóniosz-féle körsor két pontkörét. Innen 5.4.5 alapján következik az állítás. □

5.4.7. Lemma. *Legyen adott a síkon két nem koncentrikus kör, K és L. Ekkor a mind K-t, mind L-et merőlegesen metsző körök és az egyetlen ilyen egyenes együtt körsort alkotnak.*

Bizonyítás: Legyen H a két adott kör hatványvonala. Ha valamely kör K-t is és L-et is merőlegesen metszi, akkor 5.1.17 alapján középpontja illeszkedik H-ra.

Ha K és L érintkezik, akkor a mindkettőjüket merőlegesen metsző körök (és az egyetlen ilyen egyenes) nyilvánvaló módon azt az érintkező körsort alkotják, amelynek a hatványvonala a K és L középpontját összekötő egyenes, pontköre pedig K és L érintkezési pontja.

Tegyük fel most, hogy K és L metszik egymást az A és B pontokban, ekkor $A, B \in H$. Ha M olyan kör, amely merőlegesen metszi K-t és L-et, akkor 5.2.2.(5) alapján az M-re vonatkozó inverzió K-t is és L-et is önmagába viszi, és ezért felcseréli A-t és B-t (és így a középpontja H-ra illeszkedik). Ebből az 5.2.9. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy az $[A, B]$ átmérőjű kör merőlegesen metszi M-et. Ezért M az A, B alappontokhoz tartozó Apollóniosz-körök egyike. Másrészt 5.4.6 miatt ennek az Apollóniosz-féle körsornak mindegyik tagja merőlegesen metszi K-t és L-et, tehát a kérdéses körök (és egyenes) valóban körsort alkotnak.

Ha $K \cap L = \emptyset$, akkor a H hatványvonal mindkét körnek a külsejében fekszik. Legyen P a H-nak az a pontja, amely kollineáris a két középponttal, ekkor P hatványa is pozitív K-ra és L-re vonatkozóan. Tekintsük azt a P középpontú M kört, amelynek a sugara ennek a hatványnak a négyzetgyöke, és legyen A és B ennek a körnek a két metszéspontja a K és L középpontját összekötő egyenessel. Ekkor 5.1.17 szerint az $[A, B]$ átmérőjű kör merőlegesen metszi K-t és L-et, így 5.2.2.(5)-re hivatkozva következik, hogy K és L Apollóniosz-körök az A, B alappontokra vonatkozóan. Ezért minden olyan kör, amely K-t és L-et merőlegesen metszi, 5.4.5 miatt áthalad A-n és B-n is, azaz hozzátartozik az A, B tartópontú metsző körsorhoz. Továbbá megfordítva, 5.4.6 miatt ennek a körsornak minden tagja merőlegesen metszi K-t és L-et, tehát a szóban forgó körök (és az $\langle A, B\rangle$ egyenes) most is körsort alkotnak. □

5.4.8. Tétel. *Ha a síkon tetszőlegesen adott két különböző kör, akkor egyértelműen létezik olyan körsor, amelyhez mindkettő hozzátartozik.*

Bizonyítás: Akár koncentrikus, akár egymást metsző, akár érintkező körökről van szó, a tétel állítása magától értetődő. Csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor a két adott körnek nincs közös pontja és nem is koncentrikusak.

Alkalmazzuk az 5.4.7. Lemmát a két adott körre, és válasszunk ki két kört, K-t és L-et a lemma által származtatott körsorból. Ez a két kör nem lehet koncentrikus (hiszen létezik mindkettőt merőlegesen metsző kör), ezért K-ra és L-re alkalmazhatjuk újra az 5.4.7. Lemmát. Az így kapott körsorhoz nyilván mindkét eredetileg adott kör hozzátartozik.

Bármely, a két adott kört magában foglaló körsort tekintünk is, 5.4.5 miatt annak minden tagját K is és L is merőlegesen metszi. Ezért 5.4.7 alkalmazásával adódik, hogy csak egyetlen ilyen körsor létezik. □

Megjegyzés. Mind az 5.4.7. Lemma, mind az 5.4.8. Tétel igaz marad, ha a két kör egyike helyett egyenes szerepel. Erről a bizonyítások csekély, értelemszerű módosításával könnyen meggyőződhetünk.

Bár a körsorokat „egyenként”, a geometriai kép leírása útján értelmeztük, nevezetes tény, hogy egységes eljárásokkal is származtathatók. Az 5.4.8. Tétel is erre utal, hiszen levonhatjuk azt a következtetést belőle, hogy a körsorok pontosan a maximális olyan körrendszerek a síkon (a hatványvonallal együtt, amennyiben az nem üres), amelyekben bármely két kör hatványvonala ugyanaz. A következő szakaszban olyan egységes származtatási lehetőséget tisztázunk, amely azt is megmutatja, miért az inverzív geometria keretei között érdemes a körsorokat tárgyalni. Ha a körsor tagjait analitikusan, tehát egyenletükön keresztül adnánk meg, más jellegű egységes származtatásukhoz juthatnánk. Ezt később általánosabban fogjuk megvizsgálni a projektív geometria keretei közt.

5.5. Körsorok az inverzív geometriában

A továbbiakban E háromdimenziós euklideszi teret jelöl. Gömbi körsorokat értelmezünk az E-beli gömbökön, és megvizsgáljuk kapcsolatukat a síkbeli körsorokkal.

5.5.1. Definíció (Síksor). A háromdimenziós euklideszi tér síkjainak egy $\mathcal{S}$ rendszerét síksornak nevezzük, ha vagy egy közös egyenest tartalmazó összes síkról, vagy pedig valamely síkkal párhuzamos összes síkról van szó. Az első esetben $\mathcal{S}$ metsző síksor, a másodikban párhuzamos síksor. Metsző síksor esetében a közös egyenest a síksor tartóegyenesének nevezzük.

Bármely síksor egyesítése az egész tér. A tér bármely két különböző síkja belefoglalható egy általuk egyértelműen meghatározott síksorba.

5.5.2. Definíció (Gömbi körsor). Legyen $G \subseteq E$ gömb, és $\mathcal{S}$ síksor E-ben. A G gömbön gömbi körsornak nevezzük $\mathcal{S}$ nyomát, azaz az $\mathcal{S}|G = \{S \cap G : S \cap G \neq \emptyset\}$ halmazrendszert.

Nyilván $\mathcal{S}|G$ körökből, köztük 0, 1 vagy 2 pontkörből áll aszerint, hogy $\mathcal{S}$-nek hány eleme érinti G-t. Az $\mathcal{S}|G$ gömbi körsor tartópontjának nevezzük az $A \in G$ pontot, ha A az $\mathcal{S}$ mindegyik eleméhez hozzátartozik.

Ha $\mathcal{S}$ párhuzamos síksor, akkor $\mathcal{S}|G$-nek nincs tartópontja, metsző síksor esetén pedig a tartópontok száma 0, 1 vagy 2 lehet aszerint, hogy $\mathcal{S}$ tartóegyenesének hány közös pontja van G-vel.

A gömbi körsort elliptikusnak nevezzük, ha nincs tartópontja, parabolikusnak, ha egy, illetve hiperbolikusnak, ha két tartópontja van.

A parabolikus gömbi körsorok a tartópontban érintkező körökből állnak, és a körök közös érintője a körsort kimetsző síksor tartóegyenese. Adott gömbön bármely két parabolikus körsor egybevágó. Egy hiperbolikus gömbi körsor a két tartóponton áthaladó, a gömbfelületen fekvő összes körből áll.

5.5.3. Definíció (Konjugált síksorok). Legyen $G \subseteq E$ rögzített gömb. Az $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ síksorokat konjugált síksoroknak mondjuk G-re vonatkozóan, ha az alábbi két eset valamelyike fennáll:

– $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ közül az egyiknek két tagja érinti G-t, a másiknak pedig a tartóegyenese ezen a két érintési ponton áthalad, illetve

– mind $\mathcal{S}$, mind $\mathcal{T}$ tartóegyenese érinti G-t ugyanabban a pontban, és ott ez a két egyenes merőlegesen metszi egymást.

Világos, hogy a síksorok konjugáltsága szimmetrikus reláció, és hogy bármely síksornak egyértelműen létezik konjugált párja.

5.5.4. Definíció (Konjugált gömbi körsorok). A $G \subseteq E$ gömbön két gömbi körsort konjugáltnak mondunk, ha az őket előállító síksorok konjugáltak G-re vonatkozóan.

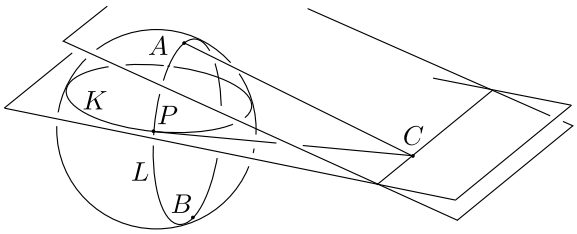
Ha két gömbi körsor konjugált, akkor az egyiknek a pontkörei a másiknak tartópontjai, és viszont. Parabolikus gömbi körsor konjugáltja is parabolikus, elliptikus gömbi körsor konjugáltja hiperbolikus (és viszont).

5.5.5. Lemma. *Konjugált gömbi körsorokból egy-egy kört tetszőlegesen választva azok merőlegesen metszik egymást.*

Bizonyítás: Legyen a két gömbi körsor $\mathcal{S}|G$ és $\mathcal{T}|G$, ahol $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ konjugált síksorok G-re nézve. Ha $\mathcal{S}|G$ és $\mathcal{T}|G$ parabolikusak, akkor a tétel állítása magától értetődő, hiszen a közös tartópontban a két szóban forgó kör érintője a konjugáltság definíciója folytán merőleges.

Tegyük fel most, hogy a két gömbi körsor közül az egyik elliptikus, a másik hiperbolikus, legyen például $\mathcal{S}|G$ elliptikus. Válasszunk egy-egy kört belőlük: legyen $K \in \mathcal{S}|G$ és $L \in \mathcal{T}|G$. Feltehetjük, hogy K nem pontkör, hiszen akkor a merőlegesség automatikusan igaz. Ekkor a K kör elválasztja egymástól $\mathcal{S}|G$ két pontkörét, A-t és B-t, amelyeken L áthalad. Ezért K és L metszik egymást; legyen P az egyik metszéspontjuk.

Vegyük észre, hogy ha L főkör, a síkjára mindkét síksor szimmetrikusan áll, és ezért K is szimmetrikus erre a síkra. Ekkor pedig a két kör nyilván merőleges. A továbbiakban feltesszük, hogy L nem főkör, és ezért vizsgálhatjuk a hozzá tartozó érintőkúpot.



A T_AG és T_BG érintősíkok az $\mathcal{S}$ síksorhoz tartoznak. Ha párhuzamosak (azaz A és B átellenes pontok a gömbön), akkor $\mathcal{T}|G$ csupa főkörből áll, ezért ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk. Tegyük fel tehát, hogy T_AG és T_BG metszik egymást az $\mathcal{S}$ síksor tartóegyenesében. Az L-hez tartozó érintőkúpnak az A, illetve B ponton áthaladó alkotója benne fekszik T_AG-ben, illetve T_BG-ben, ezért az érintőkúp C csúcsa rajta van $\mathcal{S}$ tartóegyenesén. Emiatt C benne van a K kör síkjában. Az érintőkúp $\langle C, P\rangle$ alkotója a T_PG érintősíkban fekszik, ezért érinti a K kört a P pontban. Az érintőkúp forgásszimmetriája miatt bármelyik alkotó merőlegesen metszi az L kört, ezért a P pontban K merőleges L-re. □

5.5.6. Tétel. *A G gömb bármely Möbius-transzformációja gömbi körsort gömbi körsorba képez; mégpedig elliptikust elliptikusba, parabolikust parabolikusba és hiperbolikust hiperbolikusba.*

Bizonyítás: A hiperbolikus gömbi körsorok a két tartóponton áthaladó összes gömbi körből állnak, ezért a Möbius-transzformációk bijektivitásából és körtartó voltából a tétel állítása azonnal adódik.

Bármely parabolikus körsor megadható mint egy gömbi kört egy kiszemelt pontjában érintő összes gömbi körből álló rendszer, ezért az eddigi tulajdonságokon kívül a Möbius-transzformációk érintkezéstartását használva parabolikus körsor esetére is közvetlenül kapjuk a tételt.

Ha G-n adott egy $\mathcal{K}$ elliptikus gömbi körsor és egy $\mu \in \mathcal{M}$ gömbi Möbius-transzformáció, akkor tekintsük $\mathcal{K}$ konjugáltját, az $\mathcal{L}$ hiperbolikus gömbi körsort. Az 5.5.5. Lemma szerint $\mathcal{K}$ elemei merőlegesen metszik $\mathcal{L}$ minden elemét. Tudjuk, hogy μ az $\mathcal{L}$-et hiperbolikus gömbi körsorba viszi. A Möbius-transzformációk körtartó és szögtartó bijekciók, ezért $\mu(\mathcal{K})$ elemei az $\mu(\mathcal{L})$ minden tagját merőlegesen metsző körök, amelyek együtt lefedik G-t. Ezek a körök pontosan a $\mu(\mathcal{L})$ hiperbolikus gömbi körsor konjugáltját alkotják, azaz egy elliptikus gömbi körsort. □

Az 5.5.5. Lemma segítségével tisztázni tudjuk a gömbi körsorok, illetve a síkbeli körsorok és sugársorok között fennálló kapcsolatot is. A szóhasználat egyszerűsítése végett az euklideszi sík helyett annak inverzív bővítését használjuk. Mostantól úgy tekintjük, hogy az euklideszi síkon adott körsorok és

sugársorok esetében a ∞ pont hozzátartozik az összes szóban forgó egyeneshez, továbbá azokban az esetekben, amikor a körsornak nincs egyenes tagja, a ∞ pontot a körsorhoz tartozó pontkörnek tekintjük. Ezáltal bármely körsor és bármely sugársor lefedi az inverzív síkot.

Tekintsünk most egy $v : G \to H^+$ sztereografikus vetítést, ahol H az E euklideszi tér egy síkja. Jelöljük O-val a v vetítés pólusát G-n.

5.5.7. Tétel. *A síkbeli körsorok és sugársorok pontosan a gömbi körsorok sztereografikus vetületei. Ha $\mathcal{K}$ gömbi körsor G-n, akkor $\mathcal{K}$ sztereografikus vetülete*

- *koncentrikus körsor, ha $\mathcal{K}$ elliptikus és O az egyik pontköre,*
- *Apollóniosz-féle körsor, ha $\mathcal{K}$ elliptikus és O nem a pontkörök egyike,*
- *párhuzamos sugársor, ha $\mathcal{K}$ parabolikus és O a tartópontja,*
- *érintkező körsor, ha $\mathcal{K}$ parabolikus és O nem a tartópontja,*
- *metsző sugársor, ha $\mathcal{K}$ hiperbolikus és O az egyik tartópontja, illetve*
- *metsző körsor, ha $\mathcal{K}$ hiperbolikus és O nem a tartópontok egyike.*

Bizonyítás: Először meggondoljuk, hogy ha $\mathcal{K}$ gömbi körsor G-n, akkor $v(\mathcal{K})$ olyan körsor, illetve sugársor a H^+ síkban, amilyent a tétel állít. Azokban az esetekben, amikor $\mathcal{K}$ hiperbolikus vagy parabolikus, akkor ez közvetlenül következik abból, hogy v bijektív, köröket körökbe vagy egyenesekbe visz, és érintkezéstartó. Ha pedig $\mathcal{K}$ elliptikus, akkor 5.5.6 bizonyításának mintájára felhasználjuk $\mathcal{K}$ konjugáltját, az $\mathcal{L}$ hiperbolikus gömbi körsort, és v szögtartására hivatkozva látjuk, hogy $v(\mathcal{K})$ a $v(\mathcal{L})$ minden tagjára merőleges körökből és egyenesekből áll. Miután $v(\mathcal{L})$-ről már tudjuk, hogy metsző sugársor vagy metsző körsor, ebből következik, hogy $v(\mathcal{K})$ koncentrikus vagy Apollóniosz-féle körsor, mégpedig aszerint, hogy O pontköre vagy sem $v(\mathcal{K})$-nak.

Meg kell még gondolnunk, hogy bármely H^+-beli körsor vagy sugársor előáll valamely G-n fekvő gömbi körsor sztereografikus vetületeként. Ez az előzőhöz hasonló okoskodással történhet: a koncentrikus körsortól és az Apollóniosz-féle körsortól különböző esetekben a sztereografikus vetítés körtartó és érintkezéstartó voltából rögtön adódik az állítás, a fennmaradó két esetben pedig a konjugált sugársorra, illetve körsorra való áttéréssel és a szögtartásra hivatkozással készen vagyunk. □

Megjegyzés. Az 5.5.7. Tételben tisztázott megfeleltetés alapján a síkbeli koncentrikus, valamint Apollóniosz-féle körsorokat szokás együttesen elliptikus

körsoroknak nevezni. Az érintkező, illetve a metsző körsorok számára pedig használatban van a parabolikus, illetve hiperbolikus körsor elnevezés.

5.5.8. Következmény. *A síkbeli Möbius-transzformációk (és így speciálisan az inverziók) a körsorokat és a sugársorokat körsorokba vagy sugársorokba képezik. Ha a párhuzamos sugársorokat a parabolikus körsorok közé, a metszőket a hiperbolikusak közé soroljuk, akkor a Möbius-transzformáció a sor elliptikus, parabolikus, illetve hiperbolikus jellegét megtartja.* □

6. Szabályos politópok

Az elemi sík- és térgeometria klasszikus alakzatai a szabályos sokszögek és a szabályos poliéderek. Ezeket általánosítjuk a magasabb dimenziójú euklideszi terek esetére, majd elvégezzük a szabályos politópok teljes osztályozását. A szabályos politópok szoros kapcsolatban állnak az euklideszi tér egybevágóságainak véges részcsoportjaival. A szabályosság kritériumát is a szimmetriák alkotta csoport tulajdonságain keresztül tudjuk majd megfogalmazni.

6.1. Csoporthatások

Matematikai tanulmányainkban gyakran előforduló jelenség, hogy bizonyos fajta transzformációk csoportot alkotnak, vagy hogy egy csoportot eleve valamiféle struktúrát megőrző leképezések segítségével definiálunk. Ebben a szakaszban összegyűjtjük az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat és összefüggéseket.

6.1.1. Definíció (Csoporthatás). Legyen G csoport és X tetszőleges nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy G hat az X halmazon (vagy hogy G transzformációcsoport X-en), ha adott egy

$$G \times X \ \to \ X\,, \qquad (g,x) \ \to gx$$

leképezés, amelyre

(1) minden $x \in X$-re $1x = x$, és

(2) minden $g, h \in G$-re és minden $x \in X$-re $(gh)x = g(hx)$

teljesül.

Jelöljük S_X-szel az $X \to X$ bijektív leképezések csoportját a kompozíció műveletére nézve. (Amikor X véges halmaz, akkor S_X az S_n szimmetrikus csoporttal izomorf, ahol $n = |X|$.) Közvetlenül ellenőrizhető, hogy minden $g \in G$-re a $\varphi(g) : X \to X$, $\big(\varphi(g)\big)(x) = gx$ leképezés bijektív (mégpedig az inverze $\varphi(g^{-1})$), és az ezáltal definiált $\varphi : G \to S_X$ leképezés homomorfizmus. Az is rögtön látható, hogy φ egyértelműen meghatározza G hatását X-en, ezért egy ilyen $\varphi : G \to S_X$ homomorfizmus megadása tekinthető a csoporthatás egyenértékű definíciójának.

Ha például G eleve S_X részcsoportja, akkor a G-t identikusan önmagára képező homomorfizmus a G csoport hatását definiálja X-en; ezt G természetes hatásának szokás nevezni. Az alább következő példák többsége is természetes hatás.

6.1.2. Példák

- Ha X affin tér, akkor az $\mathrm{Aff}\,(X)$ csoport hat X-en.
- Ha V vektortér, akkor a $GL(V)$ csoport hat V-n.
- Ha X metrikus tér, akkor az $I(X)$ izometriacsoport hat X-en.
- Ha V euklideszi vektortér, akkor az $O(V)$ ortogonális csoport hat V-n.
- Ha E euklideszi tér, akkor a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoport hat E-n.
- Legyen $\mathcal{S}$ az affin alterek halmaza az X affin térben. Ekkor az $\mathrm{Aff}\,(X)$ csoport hat az $\mathcal{S}$ halmazon.
- Legyen $\mathcal{G}$ a gömbök halmaza az E euklideszi térben, ekkor a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoport hat a $\mathcal{G}$ halmazon.
- Az $\mathcal{M}(E)$ Möbius-csoport hat az E^+ inverzív téren. Az előző példához hasonlóan $\mathcal{M}(E)$ az E-beli gömbök és affin alterek alkotta halmazon is hat.
- Tetszőleges G csoport hat a saját alaphalmazán baleltolásokkal ($(g,h) \mapsto gh$), jobbeltolásokkal ($(g,h) \mapsto hg^{-1}$), illetve konjugálásokkal ($(g,h) \mapsto ghg^{-1}$). Az utóbbit (amelynél az első kettővel ellentétben a G elemei által indukált transzformációk automorfizmusok a G csoportban) szokás G adjungált hatásának nevezni.
- Ha $G = N \rtimes H$ szemidirekt szorzat, akkor H hat az N csoporton a (G-beli) konjugálásokkal. Itt is H elemei automorfizmusokként hatnak az N csoporton. Nevezetes tény, hogy a G csoport rekonstruálható ennek a hatásnak az ismeretében. (Akkor kapunk direkt szorzatot, ha a hatás triviális, azaz minden $h \in H$-ra identikus.)

Megjegyzés. Leggyakrabban az X halmazon valamilyen struktúra is adott (például topologikus, differenciálható, metrikus, lineáris, vagy egyéb algebrai struktúra, esetleg ezekből egyszerre több is), és a G csoport ezt a struktúrát megőrző leképezésekkel hat. Ennek megfelelően beszélhetünk folytonos, differenciálható, izometrikus, lineáris stb. csoporthatásokról. A fenti példák legtöbbje is ilyen jellegű.

6.1.3. Definíció (Invariáns halmaz, hatás leszűkítése). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Egy $Y \subseteq X$ részhalmazt invariánsnak (vagy G-invariánsnak) nevezünk, ha minden $g \in G$-re és $x \in Y$-ra $gx \in Y$. (Ilyenkor szükségképpen minden $g \in G$-re nemcsak $gY \subseteq Y$, hanem $gY = Y$ is teljesül, úgyhogy Y akkor és csak akkor invariáns, ha $GY = Y$.)

Ha $Y \subseteq X$ invariáns, akkor tekinthetjük a G csoport hatását csupán az Y halmazon. Ilyenkor beszélünk a G-hatásnak az Y-ra történő leszűkítéséről.

6.1.4. Példák

- A 6.1.2-beli hatodik példában az X-beli hipersíkok $\mathrm{Aff}\,(X)$-invariáns halmazt alkotnak $\mathcal{S}$-ben.
- Egy G csoport valamely részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó, ha az adjungált hatásra nézve G-invariáns.

6.1.5. Definíció (Orbit). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. A minimális nemüres invariáns halmazokat a hatás orbitjainak (vagy G-orbitoknak) nevezzük. Vezessük be a $\sim$ relációt az X halmazon a következőképpen: $x, y \in X$ esetén legyen $x \sim y$, ha létezik olyan $g \in G$, melyre $gx = y$. Rögtön látható, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, amely szerint az ekvivalenciaosztályok éppen a G-orbitok. Ha $x \in X$ tetszőleges elem, akkor az x-et tartalmazó orbitra (amelyet x orbitjának is nevezünk) bevezetjük a Gx jelölést; nyilván $Gx = \{gx : g \in G\}$.

6.1.6. Példák

- A 6.1.2-beli első, ötödik, hetedik és nyolcadik példában szereplő csoporthatásnak egyetlen orbitja van. Ha egy csoport önmagán bal- vagy jobbeltolásokkal hat, akkor is egyetlen orbit keletkezik.
- A második példában (hacsak a V vektortér nem triviális) pontosan két orbit van: az egyik csak a $\mathbf{0}$ elemet tartalmazza, a másik az összes nemzérus vektorból áll.
- A negyedik példa orbitjai az origó körüli hipergömbök és a $\{\mathbf{0}\}$ halmaz.
- A hatodik példában az orbitok úgy állnak elő, hogy valamely $0 \leq k \leq$ $\leq \dim X$-re az összes k-dimenziós affin alteret tekintjük.

- A G csoport adjungált hatásánál a G-orbitok éppen a G-beli konjugáltosztályok.
- Ha az $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ komplex egységkör szorzással hat a komplex térbeli $\mathbf{S}^{2d-1} \subset \mathbf{C}^d$ egységgömbön, akkor a hatás orbitjai Clifford-párhuzamos főkörök. Speciálisan, ha $d = 2$, akkor az orbitok Hopf-féle körsereget alkotnak.

6.1.7. Definíció (Tranzitív hatás). Azt mondjuk, hogy a G csoport tranzitívan hat az X halmazon, ha a G-hatásnak egyetlen orbitja van X-ben, azaz bármely $x, y \in X$ elemekhez található olyan $g \in G$ csoportelem, hogy $gx = y$.

6.1.8. Példák

- A 6.1.6-beli első pontban felsorolt csoporthatások tranzitívak.
- Bármely csoporthatásnak egy orbitra történő leszűkítése tranzitív.

6.1.9. Definíció (Stabilizátor). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Valamely $x \in X$ elem stabilizátorán a $G_x = \{g \in G : gx = x\} \leq$ $\leq G$ részcsoportot értjük.

6.1.10. Példák

- Ha E euklideszi tér és $P \in E$, akkor $I(E)_P = O(E_P)$.
- Bármely E euklideszi térre $\mathcal{M}(E)_\infty = \mathrm{Sim}\,(E)$.
- Bármely G csoport adjungált hatásánál a stabilizátorok az elemek centralizátorai.

A következő állítás az orbitok és stabilizátorok között fennálló alapvető összefüggést rögzíti. Ezen alapulnak a véges csoportelmélet egyes leszámlálási technikái, valamint ezt használja majd a 6.2.10. Tétel bizonyítása is.

6.1.11. Állítás. *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon és legyen $x \in X$ tetszőleges. Ekkor:*

(1) *Bármely $g \in G$-re $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, ezért ugyanahhoz az orbithoz tartozó elemek stabilizátorai konjugáltak.*

(2) *Jelölje G/G_x a G_x részcsoporthoz tartozó bal oldali mellékosztályok halmazát. Ekkor a $gG_x \mapsto gx$ hozzárendelés bijekciót létesít a G/G_x halmaz és a Gx orbit között.*

Bizonyítás: (1): Bármely $h \in G_x$-re $(ghg^{-1})(gx) = gx$ mutatja, hogy $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$. A fordított tartalmazás az ugyanilyen elven adódó $g^{-1}G_{gx}g \subseteq G_x$ formulával egyenértékű.

(2): Vegyük észre, hogy $g, h \in G$-re $gG_x = hG_x$ pontosan akkor áll fenn, amikor $h^{-1}g \in G_x$, azaz amikor $gx = hx$. Ez mutatja egyrészt, hogy a $gG_x \mapsto gx$ leképezés jól definiált, másrészt, hogy injektív. A szürjektivitás nyilvánvaló. □

6.1.12. Következmény. *Bármely X-beli elem orbitjának a számossága a stabilizátor indexével egyenlő.* □

6.1.13. Definíció (Szabad hatás). Azt mondjuk, hogy a G csoport szabadon hat az X halmazon, ha bármely X-beli elem stabilizátora triviális. Szokás ezt úgy is mondani, hogy G fixpontmentesen hat X-en.

6.1.14. Definíció (Egyszeresen tranzitív hatás). Kiemelt fontossággal bírnak azok a csoporthatások, amelyek egyszerre szabadok és tranzitívak. Ezeket egyszeresen tranzitív hatásoknak is szokás nevezni. A G csoport tehát pontosan akkor hat egyszeresen tranzitívan az X halmazon, ha bármely $x, y \in X$-re egyértelműen létezik olyan $g \in G$ csoportelem, hogy $gx = y$.
Ilyenkor bármely $x_0 \in X$ elem rögzítésével a $g \mapsto gx_0$ leképezés bijektív G és X között, és X-et G-vel izomorf csoporttá teszi, amelynek x_0 az egységeleme. (Ha X-et ilyen módon azonosítjuk G-vel, akkor a hatás G baleltolásaival történik.) Az egyszeresen tranzitív csoporthatással ellátott halmazra tehát úgy is gondolhatunk, mint olyan csoportra, amelyben „elfelejtettük”, hol van az egységelem.

6.1.15. Példák

- Ha X affin tér, akkor a hozzá tartozó $V = \overrightarrow{X}$ vektortér additív csoportja az eltolások segítségével egyszeresen tranzitívan hat X-en. Könnyű meggondolni, hogy ez a tulajdonság az affin tér fogalmának egyenértékű definíciójaként is szolgálhat: ha valamely vektortér additív csoportja egyszeresen tranzitívan hat egy halmazon, akkor ezen a halmazon egyértelműen létezik olyan affin struktúra, amelynek az eltolásai éppen az adott hatást alkotják.
- Ha X affin tér, akkor az $\mathrm{Aff}(X)$ affin csoport egyszeresen tranzitívan hat az X-beli rendezett affin bázisok halmazán.
- Tetszőleges V vektortér esetén a $GL(V)$ általános lineáris csoport egyszeresen tranzitívan hat a V-beli rendezett bázisok halmazán.
- Ha V euklideszi vektortér, akkor az $O(V)$ ortogonális csoport egyszeresen tranzitívan hat a V-beli rendezett ortonormált bázisok halmazán.

- Legyen E euklideszi tér. Ha $f : E \to E$ egybevágóság és $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszer, akkor jelölje $f\mathbf{x}$ az $\mathbf{x} \circ f^{-1}$ kompozíciót (amely szintén ortonormált koordinátarendszer). Az $(f, \mathbf{x}) \mapsto f\mathbf{x}$ hozzárendelés által az $I(E)$ izometriacsoport egyszeresen tranzitív hatását definiáltuk az E-beli ortonormált koordinátarendszerek halmazán.
- A d-dimenziós E euklideszi térben zászlónak nevezzük az olyan $\mathcal{Z} = (F_1, F_2, \ldots, F_d)$ sorozatokat, ahol minden k-ra F_k zárt féltér egy k-dimenziós E-beli affin altérben, és $F_k \subset \partial F_{k+1}$ $(k = 1,2, \ldots, d-1)$. Az $I(E)$ izometriacsoport egyszeresen tranzitívan hat az E-beli zászlók halmazán. Ez az előző példára hivatkozva legegyszerűbben abból látszik, hogy bijektív kapcsolat létesíthető az ortonormált koordinátarendszerek és a zászlók között: a 4.2.3-beli jelöléseket használva az $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszerhez illesztett zászlónak mondjuk $\mathcal{Z}$-t, ha minden k-ra az F_k félteret az $\langle A_0, A_1, \ldots A_{k-1} \rangle$ affin altér határolja és $A_k \in F_k$.
- Tetszőleges csoportnak a saját alaphalmazán akár bal-, akár jobbeltolásokkal definiált hatása egyszeresen tranzitív.

Megjegyzés. A 6.1.15-beli utolsó példa az egyszeresen tranzitív csoporthatások „prototípusa" abban az értelemben, hogy tulajdonképpen bármely egyszeresen tranzitív hatás ilyen alakú. Kézenfekvő ugyanis definiálni a csoporthatással ellátott halmazok körében az izomorfizmus fogalmát, és a 6.1.14. Definíciót követő észrevétel éppen azt mutatja, hogy egy egyszeresen tranzitív csoporthatás izomorf a csoportnak önmagán baleltolásokkal definiált hatásával.

6.2. Véges izometriacsoportok

Egybevágóságok véges csoportjait vizsgáljuk euklideszi terekben. A 2- és 3-dimenziós esetben ezek osztályozását is elvégezzük és fényt derítünk kapcsolatukra a klasszikus szabályos poliéderekkel.

6.2.1. Állítás. *Ha $G \leq I(E)$ véges részcsoport, akkor G-nek létezik E-ben fixpontja, azaz olyan $P \in E$ pont, hogy minden $g \in G$-re $gP = P$.*

Bizonyítás: A fixpont előállítására szolgáló alábbi „kiátlagolási" eljárás a matematika más területein is gyakran alkalmazott módszer valamely véges csoporthatásra nézve invariáns objektum származtatására.

Legyen $X \in E$ tetszőleges pont és tekintsük X orbitjának a súlypontját, azaz a

$$P = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} gX$$

affin kombinációt. Belátjuk, hogy P fixpontja minden $h \in G$ transzformációnak. A h izometria affinitás, ezért az affin kombinációk képzésével felcserélhető, így

$$hP = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}\, h(gX) = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}\, (hg)X = \sum_{k \in G} \frac{1}{|G|}\, kX = P\,,$$

ahol a $k = hg$ elem ugyanúgy végigfut G elemein, ahogy g. □

A 6.2.1-ben talált P fixpontot origónak választva $G \leq O(E_P)$, azaz G egy ortogonális csoport része. Másként fogalmazva:

6.2.2. Következmény. *Az $I(\mathbf{R}^d)$ izometriacsoport bármely véges részcsoportja konjugált $O(d)$ egy részcsoportjával.*

Bizonyítás: Valóban, ha a $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$ vektor a $G \leq I(\mathbf{R}^d)$ véges csoport fixpontja, akkor egy az origót $\mathbf{p}$-be vivő izometriát, például a $t_{\mathbf{p}}$ eltolást felhasználva a $t_{\mathbf{p}}^{-1} G t_{\mathbf{p}}$ részcsoportnak az origó fixpontja, ezért $t_{\mathbf{p}}^{-1} G t_{\mathbf{p}} \leq O(d)$. □

Az euklideszi tér véges izometriacsoportjainak vizsgálatakor elegendő tehát az ortogonális csoport véges részcsoportjaira szorítkozni. Megvizsgáljuk és osztályozzuk $O(2)$ és $O(3)$ véges részcsoportjait.

6.2.3. Példák

- Az $\mathbf{R}^2$ síkban bármely $n \geq 1$-re az origó körüli $2k\pi/n$ $(k = 0, \ldots, n - 1)$ szögű forgatások n-edrendű ciklikus csoportot alkotnak, így $\mathbf{Z}_n \leq SO(2)$.

- Ha $n \geq 3$, akkor a síknak egy origó középpontú szabályos n-szöget önmagára képező egybevágóságai $O(2)$-höz tartoznak és a $2n$ rendű D_n $(\cong \mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2)$ diédercsoportot alkotják. Megállapodás szerint a diédercsoportok közé soroljuk a két merőleges tengelyű tükrözés által generált $D_2 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ és az egyetlen tükrözés által generált $D_1 \cong \mathbf{Z}_2$ csoportot is. Így minden $n \geq 1$-re $D_n \leq O(2)$.

6.2.4. Állítás. *$O(2)$ bármely véges részcsoportja ciklikus vagy diédercsoport.*

Bizonyítás: Legyen $G \leq O(2)$ véges. Tegyük föl először, hogy $G \leq SO(2)$. Ekkor G csupa origó körüli forgatásból áll, válasszuk ki ezek közül a lehető legkisebb pozitív α szögű $r = R_\alpha$ forgatást. Állítjuk, hogy r generálja G-t. Ha nem így volna, akkor létezne olyan $g \in G$ forgatás, amelynek a szöge valamilyen k pozitív egészre szigorúan $k\alpha$ és $(k+1)\alpha$ közé esne, viszont ekkor a $gr^{-k} \in G$ forgatás szöge α-nál kisebb pozitív érték volna, ami ellentmond r választásának.

Ha $G \not\leq SO(2)$, akkor a $G^+ = G \cap SO(2)$ részcsoport az eddigiek alapján ciklikus, továbbá $|G : G^+| = 2$, hiszen $SO(2)$ indexe 2 az $O(2)$ csoportban. Legyen $n = |G^+|$ és $r = R_{2\pi/n}$ generátorelem G^+-ban. Válasszunk egy $t \in$ $\in G - G^+$ elemet, ekkor t tükrözés valamely origón átmenő L egyenesre. Ekkor $k = 1, \ldots, n-1$-re az $r^k t \in G$ elem tükrözés L-nek a $k\pi/n$ szögű elforgatottjára, ezért t-vel együtt már n darab különböző tükrözést találtunk G-ben. Ezek tehát kimerítik az egész $G - G^+$ mellékosztályt. Az $n \geq 3$ esetben a G csoport tehát pontosan valamely szabályos n-szög szimmetriáiból áll. (Egy ilyen n-szöget megkaphatunk például úgy, hogy választunk egy origótól különböző tetszőleges pontot valamelyik tükörtengelyen, és tekintjük e pont G-orbitjának a konvex burkát.) Az $n = 1$ és $n = 2$ esetekben pedig nyilvánvalóan egyetlen, illetve két merőleges tengely szerepel. □

Megjegyzések. (1) A 6.2.4. Állítást a szakirodalom néhol Leonardo da Vinci tételének nevezi. Fennmaradt jegyzeteinek tanúsága szerint Leonardo valóban megállapította, hogy a síkbeli alakzatok és mintázatok az egy pont körüli szimmetriatulajdonságaik alapján két végtelen sorozatot alkotó típusokba sorolhatók. Ezek a típusok a mai matematika nyelvén éppen a 6.2.4-beli csoportoknak felelnek meg.

(2) Észrevehetjük, hogy a 6.2.4. Állítás nem pusztán absztrakt izomorfia, hanem konjugáltság erejéig osztályozza $O(2)$ véges részcsoportjait. Különbséget tettünk a kételemű csoportnak forgatáscsoportként, illetve diédercsoportként való szerepeltetése között; ezek bár izomorf részcsoportok, nem konjugáltak. A diédercsoportokat egyébként nem is mint konkrét $O(2)$-beli részcsoportokat adtuk meg: a 6.2.3-beli származtatás csak konjugáltság erejéig definiálja őket.

6.2.5. Példák

- Az $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$ tartalmazás által indukált $O(2) \leq O(3)$ beágyazás folytán $O(2)$ véges részcsoportjai automatikusan megjelennek $O(3)$ részcsoportjaiként is. Az így nyert ciklikus részcsoportok közös tengely körüli forgatásokból állnak (ez $SO(3)$ részcsoportja), a diédercsoportok pedig egy közös tengely körüli forgatásokból és erre a tengelyre illeszkedő síkokra vonatkozó tükrözésekből állnak.

- Az $O(2)$ csoport $SO(3)$-ba is beágyazható, mégpedig az

$$A \mapsto \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \qquad \big(A \in O(2)\big)$$

  formulával. Az $SO(2)$-beli forgatások képei a harmadik koordinátatengely körüli forgatások, az $O(2) - SO(2)$-beli tükrözések képei félfordu-

latok az első két koordinátatengely által kifeszített síkban fekvő tengelyek körül. Ezzel minden n-re $\mathbf{Z}_n, D_n \leq SO(3)$. A $\mathbf{Z}_2$ és a D_1 csoport most – a síkbeli esettől eltérően – nemcsak izomorf, hanem konjugált is $SO(3)$-ban, ezért megállapodunk abban, hogy nem szerepeltetjük a D_n sorozatban.

6.2.6. Definíció (Szimmetriacsoport, mozgáscsoport). Legyen $X \subseteq \subseteq E$ tetszőleges halmaz az E euklideszi térben. Az X halmaz szimmetriáinak mondjuk azokat az izometriákat E-ben, amelyekre nézve X invariáns. A szimmetriák által alkotott

$$\mathrm{Sym}\,(X) = \{f \in I(E) : f(X) = X\} \leq I(E)$$

részcsoportot az X halmaz E-beli szimmetriacsoportjának nevezzük. Az X halmaz mozgáscsoportja a

$$\mathrm{Sym}^+(X) = \mathrm{Sym}\,(X) \cap I^+(E)$$

részcsoport, amely X irányítástartó szimmetriáiból, más szóval mozgásaiból áll. Bármely $X \subseteq E$-re a mozgáscsoport indexe legfeljebb 2 a teljes szimmetriacsoportban.

Megjegyzés. Bármely $X \subseteq E$ halmaz E-beli szimmetriáinak az X-re történő megszorítása az X metrikus tér izometriája. Ezáltal egy $\mathrm{Sym}\,(X) \to I(X)$ homomorfizmust definiáltunk. Megmutatható, hogy ez a homomorfizmus szürjektív, azaz X izometriái mindig kiterjeszthetők a befoglaló tér izometriáivá. Miután egy izometriát egy affin bázis és annak képe egyértelműen meghatároz, a $\mathrm{Sym}\,(X) \to I(X)$ homomorfizmus injektív is abban az esetben, ha X affin burka az egész E.

6.2.7. Állítás. *Ha $P \subseteq E$ politóp, $\dim P = d$, akkor P szimmetriacsoportja véges.*

Bizonyítás: Jelölje X a P politóp csúcsai halmazát, ekkor $\langle X \rangle = E$ és így az előző megjegyzés utolsó mondatához hasonlóan érvelve a $\mathrm{Sym}\,(P) \to S_X$ megszorító leképezés injektív homomorfizmus a véges S_X csoportba. □

Véges izometriacsoportokra további példáinkat a háromdimenziós szabályos politópok (azaz a klasszikus értelemben vett szabályos poliéderek) szimmetriacsoportjai szolgáltatják. Most ezek algebrai szerkezetét vizsgáljuk meg. Hasonlóság erejéig öt szabályos poliéder létezik: a szabályos tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder. Ezek geometriai és kombinatorikai szerkezetét ismertnek tételezzük fel. Felidézzük a kocka és az oktaéder, illetve a dodekaéder és az ikozaéder közötti dualitási viszonyt: mindkét duális párban az egyik fajta poliéder előáll, mint a másik lapközéppontjainak a konvex burka. Ez maga után vonja kombinatorikai szerkezetük duális voltát is.

6.2.8. Példák

- Legyen T szabályos tetraéder. A szimmetriák a négy csúcs permutációit indukálják, ezzel egy $\mathrm{Sym}\,(T) \to S_4$ injektív homomorfizmust kapunk. Miután a tetraéder éleihez tartozó felező merőleges síkokra vonatkozó tükrözések az S_4-beli transzpozíciókat indukálják, amelyek generátorrendszert alkotnak S_4-ben, ez a homomorfizmus szürjektív is. Tehát $\mathrm{Sym}\,(T)$ az S_4 szimmetrikus csoporttal azonosítható. A $\mathrm{Sym}^+(T)$ mozgáscsoport ezen belül csak az A_4 alternáló csoport lehet, hiszen S_4-nek nincs más 2 indexű részcsoportja.

- Legyen K kocka. A középpontos szimmetria a $\mathrm{Sym}\,(K)$ csoport centrumához tartozik, másodrendű, és nincs benne a $\mathrm{Sym}^+\,(K)$ mozgáscsoportban. Ezért az általa generált $\mathbf{Z}_2$-vel izomorf részcsoport a mozgáscsoport direkt kiegészítője, azaz $\mathrm{Sym}\,(K) \cong \mathrm{Sym}^+(K) \times \mathbf{Z}_2$ érvényes.

  Vegyük számba $\mathrm{Sym}^+(K)$ identitástól különböző elemeit. Ezek mindannyian forgatások, mégpedig olyan tengely körül, amely két átellenes csúcsot köt össze (0. típus), két szemközti él felezőpontját köti össze (1. típus), vagy pedig két szemközti lap középpontját köti össze (2. típus). A 0. típusba 4 tengely körül 2-2 forgatás, az 1. típusba 6 tengely körül 1-1 forgatás, a 2. típusba 3 tengely körül 3-3 forgatás tartozik, ezért ezeknek a forgatásoknak száma összesen $4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 23$. Az identikus transzformációt is hozzávéve kapjuk, hogy a $\mathrm{Sym}^+(K)$ csoport rendje 24.

  Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Sym}^+(K)$ az S_4 szimmetrikus csoporttal izomorf. Tekintsük a kocka négy testátlóját, ezeket a kocka szimmetriái egymás közt permutálják, ezáltal nyerünk egy $\mathrm{Sym}^+(K) \to S_4$ homomorfizmust. Bármely transzpozíció előáll alkalmas 1. típusú félfordulat képeként, ezért ez a homomorfizmus szürjektív. Miután a két csoport rendje egyenlő, szükségképpen injektív is. Tehát $\mathrm{Sym}^+(K) \cong S_4$.

  A kocka és az oktaéder között fennálló dualitás következtében az oktaéder szimmetriacsoportja és mozgáscsoportja ugyanaz, mint a kockáé.

- Legyen D dodekaéder. Miután D is középpontosan szimmetrikus, a kocka esetéhez hasonlóan $\mathrm{Sym}\,(D) \cong \mathrm{Sym}^+(D) \times \mathbf{Z}_2$.

  Számba vesszük D nem-identikus forgatásait: a kocka esetéhez hasonló módszerrel típusokba sorolva $10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 59$-et találunk, az identitást hozzávéve $|\mathrm{Sym}^+(D)| = 60$.

  Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Sym}^+(D)$ az A_5 alternáló csoporttal izomorf. Tekintsük a dodekaéderbe beírható öt kockát, ezeket a dodekaéder szimmetriái egymás közt permutálják, ezáltal a $\mathrm{Sym}^+(D) \to S_5$ homomorfizmust nyerjük. Meggondolható, hogy bármelyik 0. típusú forgatás

képe hármas ciklus, bármelyik 1. típusúé két diszjunkt transzpozíció szorzata, végül a 2. típusúak képei ötös ciklusok. Tehát ennek a homomorfizmusnak a képe csak páros permutációkból áll. Viszont az összes páros permutáció elő is áll képként, mert például a hármas ciklusok generátorrendszert alkotnak A_5-ben, és a 0. típusú forgatások segítségével az összes hármas ciklus előállítható. Végül a két csoport rendjének egyenlősége miatt $\mathrm{Sym}^+(D) \to A_5$ izomorfizmus.

A dodekaéder és az ikozaéder duális viszonya miatt az ikozaéder mozgáscsoportja is A_5, és szimmetriacsoportja $A_5 \times \mathbf{Z}_2$.

6.2.9. Definíció (Poliédercsoportok). A 6.2.8. Példában vizsgált csoportok jelölése és hagyományos elnevezése: $\mathrm{Sym}^+(T)$ tetraédercsoport (izomorf A_4-gyel), $\mathrm{Sym}^+(K)$ oktaédercsoport (izomorf S_4-gyel), $\mathrm{Sym}^+(D)$ ikozaédercsoport (izomorf A_5-tel); összefoglaló nevük: poliédercsoportok. Ezek mindannyian fellépnek $SO(3)$ részcsoportjaiként, és konjugáltság erejéig egyértelműen vannak értelmezve.

Az alábbi tétel – a véges forgatáscsoportok osztályozási tétele – azt mondja ki, hogy a 6.2.5-ben és 6.2.8-ban leírt példákkal $SO(3)$ összes véges részcsoportját megtaláltuk.

6.2.10. Tétel. *$SO(3)$ bármely véges részcsoportja ciklikus, diéder- vagy poliédercsoport, és így izomorf a $\mathbf{Z}_n$ $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 2)$, A_4, S_4 és A_5 csoportok közül pontosan az egyikkel.*

Bizonyítás: Legyen $G \leq SO(3)$ véges, $n = |G| \geq 2$. Az $\mathbf{S}^2$ egységgömb $SO(3)$-invariáns részhalmaz $\mathbf{R}^3$-ban, ezért tekinthetjük G hatását $\mathbf{S}^2$-n. Jelöljük X-szel $\mathbf{S}^2$ azon elemeinek a halmazát, amelyek stabilizátora nem triviális. A G csoport bármely nem-identikus eleme két átellenes pontot tart fixen $\mathbf{S}^2$-ben, mégpedig a forgástengely döféspontjait. Ezt a két pontot nevezzük a szóban forgó csoportelem pólusainak. Világos, hogy X azonos az összes lehetséges pólus alkotta halmazzal, és így véges.

A 6.1.11.(1) Állítás alapján az X halmaz G-invariáns, így tekinthetjük a G csoport hatását az X véges halmazon. Minden $p \in X$-re jelöljük m_p-vel a G_p stabilizátor rendjét, ekkor $m_p \geq 2$ egész szám. Számláljuk össze a pólusokat (multiplicitással) kétféleképpen. Először is G minden nem-identikus eleme 2 pólust származtat, így összesen $2(n-1)$ pólust kapunk. Ekkor viszont mindegyik pólust annyiszor számoltunk, ahány nem-identikus csoportelemnek ugyanaz a pólusa, vagyis a $p \in X$ pólust $(m_p - 1)$-szer. Ezért

$$2(n-1) = \sum_{p \in X} (m_p - 1)\,.$$

(Egészen pontosan ez a mennyiség azoknak a $(g, p) \in G \times X$ pároknak a száma, amelyekre $g \neq 1$ és $gp = p$.)

A 6.1.11.(1) Állítás miatt ugyanahhoz az orbithoz tartozó p pólusokra az m_p rend ugyanakkora. Ezért a jobb oldali összeget érdemes az orbitok szerint csoportosítani:

$$2(n-1) = \sum_{\text{orbitok}} \frac{n}{m_p}(m_p - 1)\,,$$

ahol p az orbit egy (tetszőleges) reprezentánsa, az n/m_p szám pedig 6.1.11.(2) alapján az orbit elemszáma. Az n számmal végigosztva az alábbi alapegyenletet kapjuk:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{\text{orbitok}} \left(1 - \frac{1}{m_p}\right)\,.$$

Az egyenlet bal oldala az [1,2) intervallumba, a jobb oldali összeg minden tagja pedig az [1/2,1) intervallumba esik. Ezért a tagok száma, azaz a G-hatás orbitjainak a száma csak 2 vagy 3 lehet.

1. eset: 2 G-orbit van.
Jelöljük m_1-gyel és m_2-vel a megfelelő rendeket, ekkor az alapegyenletből átrendezéssel

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{2}{n}$$

adódik. Ez $m_1, m_2 \leq n$ miatt csak $m_1 = m_2 = n$ mellett teljesülhet. Ekkor az egész G csoport fixen hagy egy átellenes póluspárt, azaz $G \cong \mathbf{Z}_n$ ciklikus.

A továbbiakban tegyük föl, hogy 3 G-orbit van. Legyenek a hozzájuk tartozó rendek növekvő sorrendben $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Az alapegyenletből átrendezéssel az

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 + \frac{2}{n}$$

egyenletet kapjuk. Ebből $m_1 = 2$ következik, ugyanis $m_1 \geq 3$ esetén a bal oldal legfeljebb 1 lenne. Az alapegyenlet ezzel az

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$$

alakra redukálható. Itt m_2 csak 2 vagy 3 lehet, ugyanis $m_2 \geq 4$ esetén a bal oldal legfeljebb 1/2 lenne.

2. eset: $m_2 = 2$.
Ekkor az alapegyenletből $m_3 = n/2$ következik. Ez azt jelenti, hogy G-nek van egy $n/2$ rendű, azaz 2 indexű részcsoportja, amelynek az elemei ugyanazon tengely körüli forgatások. Emiatt ez a részcsoport ciklikus. A G csoport fennmaradó elemei $m_1 = m_2 = 2$ miatt mindannyian másodrendűek, azaz félfordulatok. Ezek a félfordulatok a harmadik, kételemű orbitot önmagába képezik, ezért tengelyeik merőlegesek az $n/2$ rendű ciklikus részcsoport tengelyére. Ezekről a megállapításokból már látszik, hogy a 6.2.5-beli második példában szereplő $D_{n/2}$ diédercsoportról van szó.

A továbbiakban legyen $m_2 = 3$. Ekkor az alapegyenlet az

$$\frac{1}{m_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$$

alakot ölti, ahonnan következik, hogy m_3 csak 3, 4 vagy 5 lehet.

3. eset: $m_3 = 3$.
Ekkor az egyenletből $n = 12$. Tekintsük a harmadik orbitot: ez egy négy pontból álló halmaz az $\mathbf{S}^2$ gömbfelületen, amely invariáns azokra a harmadrendű forgatásokra, amelyeknek a tengelyei az origón és a négy pont valamelyikén haladnak át. Emiatt a pontok hármanként szabályos háromszöget feszítenek ki, azaz együtt szabályos tetraédert. A G csoport ennek a tetraédernek a forgatásaiból áll és 12 rendű, ezért azonos a tetraéder mozgáscsoportjával.

4. eset: $m_3 = 4$.
Ekkor $n = 24$. Most a harmadik orbit hatelemű; megmutatjuk, hogy egy oktaéder hat csúcsáról van szó. Válasszuk ki egyiküket. A rajta átmenő tengely körüli forgatásokból álló negyedrendű ciklikus részcsoport a többi öt pontból álló halmazt saját magába képezi, ezért köztük kell lennie a kiválasztottal átellenes pontnak, valamint a maradék négynek négyzetet kell kifeszítenie egy a tengelyre merőleges síkban. Miután a kiválasztott pont bármelyik lehet az orbit hat eleme közül, következik, hogy az orbit középpontosan szimmetrikus, és így valóban oktaédert feszít ki. A G csoport ennek az oktaédernek a forgatásaiból áll és 24 rendű, ezért azonos az oktaéder mozgáscsoportjával.

5. eset: $m_3 = 5$.
Ekkor $n = 60$. A harmadik orbit 12 elemű. Egyik elemét kiválasztva a rajta átmenő tengely körüli ötödrendű szimmetria miatt a maradék 11 pont csak úgy helyezkedhet el, hogy egyikük a kiválasztottal átellenes pont és a többi 10 két szabályos ötszöget alkot a tengelyre merőleges síkokban. Az orbit tehát középpontosan szimmetrikus és a két ötszög is egymás középpontosan szimmetrikus képei. A 12 pont bármelyikének egyenlő a távolsága a hozzá közelebb eső ötszög mindegyik csúcsától, és ez a távolság ugyanakkora a 12 pont bármelyike esetén. Ezekből a tulajdonságokból már látszik, hogy az orbit egy ikozaéder csúcsaiból áll. A G csoport ennek az ikozaédernek a forgatásaiból áll és 60 rendű, ezért azonos az ikozaéder mozgáscsoportjával. □

Megjegyzések. (1) A 6.2.10. Tétel bizonyítása a véges forgatáscsoportokat az $SO(3)$-beli konjugáltság erejéig osztályozza. Ez egybeesik az izomorfia szerinti osztályozással.

(2) Az $O(3) \cong SO(3) \times \mathbf{Z}_2$ izomorfiát felhasználva a 6.2.10. Tételből könnyen levezethető $O(3)$ véges részcsoportjainak a teljes osztályozása. Nem nehéz meggondolni például, hogy ezek között a csoportok között csak a $G \times \mathbf{Z}_2$ ($G \leq SO(3)$) alakúak azok, amelyek nem izomorfak a 6.2.10-ben felsoroltak egyikével sem.

6.3. Szabályos politópok

Az előző szakaszban láttuk, hogy 2 és 3 dimenzióban szoros kapcsolat van a véges izometriacsoportok és a szabályos sokszögek, illetve szabályos poliéderek szimmetriái között. A magasabb dimenziójú szabályos politópokat is szimmetriatulajdonságaikon keresztül definiáljuk, majd hasonlóság erejéig osztályozzuk őket.

6.3.1. Definíció (Lapzászló). Legyen $P \subseteq E$ politóp, tegyük föl, hogy $\dim P = d$. A P politóp lapzászlóin azokat az $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1})$ sorozatokat értjük, ahol minden i-re $L_i < P$ lap, $\dim L_i = i$, és minden $i < j$-re $L_i < L_j$.

Az $\mathcal{L}(P)$ lapháló́ban bármely valódi lapokból álló maximális rendezett lánc hossza d, azaz 0-tól $(d-1)$-ig minden dimenzióban szerepel benne lap. Emiatt P lapzászlói pontosan az $\mathcal{L}(P)$ lapháló valódi lapokból álló maximális rendezett láncai.

Ebből az is következik, hogy P bármely valódi lapja (sőt, valódi lapok bármely tartalmazásra rendezett részhalmaza) belefoglalható P-nek legalább egy lapzászlójába.

6.3.2. Állítás. *Ha a P politóp egy szimmetriája P valamely lapzászlóját önmagára képezi, akkor ez a szimmetria identikus P-n.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $\dim P = d$. Feleltessük meg az $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1})$ lapzászlónak azt az egyetlen E-beli $(F_1, F_2, \ldots, F_d)$ zászlót (l. 6.1.15), amelyre $\langle L_{i-1} \rangle = \mathrm{rel}\partial F_i$ és $F_i \subset \langle L_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, d-1)$, valamint F_d az $\langle L_{d-1} \rangle$ hipersík határolta, P-t tartalmazó féltér. A megfeleltetés egyértelműsége miatt a szóban forgó szimmetria fixen hagy egy E-beli zászlót, ezért a 6.1.15-beli hatodik példára hivatkozva ez a szimmetria csak identikus lehet. □

6.3.3. Definíció (Szabályos politóp). A $P \subseteq E$ politópot szabályosnak mondjuk, ha a $\mathrm{Sym}\,(P)$ csoport tranzitívan hat P lapzászlói halmazán.

Ha $\dim P = d$ és P szabályos, akkor a 6.3.2. Állítás miatt ez a hatás egyszeresen tranzitív. Ezért ilyenkor a $\mathrm{Sym}\,(P)$ csoport rendje egyenlő P lapzászlóinak a számával. Ugyancsak a 6.3.2 Állítás következtében bármely (nem feltétlenül szabályos) d-dimenziós P politóp esetében egy lapzászlót valamelyik másikba P-nek legfeljebb egy szimmetriája vihet, ezért általában a szimmetriacsoport rendje legfeljebb a lapzászlók számával egyenlő. A szabályosság definíciója tehát a politóp lehető legnagyobb mértékű szimmetriáját követeli meg.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $d = 2$ és $d = 3$ esetén a szabályos politópok pontosan azok a sokszögek, illetve poliéderek, amelyek a szokásos hétköznapi értelemben szabályosak.

6.3.4. Állítás. *Legyen $P \subseteq E$ szabályos politóp.*

(1) *P-nek létezik körülírt hipergömbje (azaz olyan hipergömb, amely P mindegyik csúcsán áthalad), valamint beírt hipergömbje (azaz olyan hipergömb, amelyet P mindegyik hiperlapja érint). E két hipergömbnek közös a középpontja.*

(2) *P bármely valódi lapja szabályos politóp.*

(3) *Ha $f : E \to E'$ hasonlóság, akkor az $f(P)$ politóp is szabályos.*

Bizonyítás: (1): A $\mathrm{Sym}\,(P) \leq I(E)$ véges izometriacsoportnak 6.2.1 szerint létezik fixpontja, legyen ez O. A P politóp csúcsai P szabályossága miatt ennek a véges csoportnak egy orbitját alkotják, ezért mindannyian ugyanolyan távol vannak O-tól és egy O körüli hipergömbre illeszkednek. A hiperlapok halmazán a $\mathrm{Sym}\,(P)$ csoport ugyancsak tranzitívan hat, ezért O távolsága ugyanannyi mindegyik hiperlapot tartó hipersíktól, azaz ezek a hipersíkok egy O körüli hipergömböt érintenek. Miután ez a hipergömb P-nek részhalmaza, az érintési pontok magukon a hiperlapokon vannak.

(2): Ha L a P politóp tetszőleges valódi lapja, akkor L lapzászlói pontosan a P politóp L-et tartalmazó lapzászlóinak az L valamely hiperlapjában végződő kezdőszeletei. Ezért $\mathrm{Sym}\,(P)$-nek az a részcsoportja, amely az L-et önmagára képező szimmetriákból áll, tranzitívan hat L lapzászlói halmazán.

(3): Egyrészt az $f(P)$ politóp lapzászlói pontosan az $\big(f(L_0), f(L_1), \ldots, f(L_{d-1})\big)$ alakú sorozatok, ahol $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1})$ a P lapzászlója, másrészt $\mathrm{Sym}\,\big(f(P)\big) = f \circ \mathrm{Sym}\,(P) \circ f^{-1}$. Ezekből az állítás rögtön következik. $\square$

Megjegyzés. A továbbiakban a P szabályos politóp középpontjának mondjuk a körülírt (vagy beírt) hipergömb középpontját. Miután 6.3.4.(2) szerint P lapjai is szabályosak, tekinthetjük a lapok középpontjainak a rendszerét, ezek is érdekes szimmetriatulajdonságokat fölmutató véges pontrendszerek. Mindegyik lap középpontja a szóban forgó lap $\mathrm{Sym}\,(P)$-beli stabilizátorának (azaz a lapot mint részhalmazt önmagába képező csoportelemek alkotta részcsoportnak) az egyetlen fixpontja a lap affin burkában. Bármely rögzített $1 \leq i \leq d$ mellett az i-dimenziós lapok középpontjai $\mathrm{Sym}\,(P)$ egy orbitját alkotják, és így egy (i-től függő sugarú) hipergömbön helyezkednek el P középpontja körül. Tekintsük példaképpen a $d = 3$, $i = 1$ esetet: a szabályos tetraéder élfelező pontjai egy szabályos oktaéder csúcsai, míg a többi háromdimenziós szabályos politóp élfelező pontjai „félig szabályos” poliédert feszítenek ki: kuboktaédert a kocka és az oktaéder esetében, ikozidodekaédert az ikozaéder és a dodekaéder esetében. Különös figyelmet érdemel az $i = d-1$ eset, azaz a hiperlapok középpontjainak a rendszere, ezek a pontok éppen a beírt hipergömb érintési pontjai.

6.3.5. Tétel. *Jelölje Q a $P \subseteq E$ politóp hiperlapjai középpontjainak a konvex burkát. Ha P szabályos, akkor Q is szabályos politóp, és P-hez képest duális kombinatorikai szerkezetű.*

Bizonyítás: A poláris politóp 3.4-beli konstrukcióját és tulajdonságait használjuk ki. Válasszuk origónak a P politóp középpontját, ezáltal az E teret azonosítjuk a V euklideszi vektortérrel. A skaláris szorzás segítségével a V^* duális teret V-vel azonosnak tekinthetjük. (Ennél az azonosításnál a $\mathbf{v} \in V$ vektornak az az $\alpha_{\mathbf{v}} : V \to \mathbf{R}$ lineáris forma felel meg, amelynél $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ $(\mathbf{w} \in V)$; itt a $\mathbf{v} \mapsto \alpha_{\mathbf{v}}$ leképezés nyilván lineáris izomorfizmus V és V^* között.)

Mivel most $V^* = V = E$, a $P^* \subseteq V^*$ poláris politóp P-vel együtt ugyancsak az E térben van. Feltehetjük, hogy P beírt hipergömbje egységnyi sugarú. Legyen $\mathbf{w}$ a P^* politóp csúcsa. Ekkor a $H_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1\}$ affin hipersík P^{**}-nak, azaz P-nek egy hiperlapját tartalmazza és így a P-be beírt egységgömböt érinti. Ezért $\|\mathbf{w}\| = 1$ és $\mathbf{w}$ az érintési pont. Tehát $\mathbf{w}$ valóban P egy lapjának, mégpedig a $\mathbf{w}^\diamond$ lapnak a középpontja. Miután a $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}^\diamond$ megfeleltetés bijektív P^* csúcsai és P hiperlapjai között, a P^* poláris politópnak a csúcsai valóban pontosan P hiperlap-középpontjai, azaz $Q = P^*$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Sym}\,(Q) = \mathrm{Sym}\,(P)$. Az $\mathcal{L}(P)$ és $\mathcal{L}(Q)$ laphálók duálisan izomorf volta miatt bijektív kapcsolat áll fenn P és Q lapzászlói között, mégpedig a laponkénti dualizálással, azaz az $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1}) \mapsto (L_{d-1}^\diamond, \ldots, L_1^\diamond, L_0^\diamond)$ hozzárendeléssel. Bármely $f \in \mathrm{Sym}\,(P)$ szimmetriánál $f(L_i^\diamond) = f(L_i)^\diamond$, ezért a szimmetriacsoport a Q politóp lapzászlói halmazán is tranzitívan hat. □

Megjegyzés. Ha P és Q a 6.3.5. Tétel szerinti viszonyban áll, akkor Q-nak a közös középpontból történő alkalmas arányú nagyításával elérhető, hogy P csúcsai essenek Q hiperlap-középpontjaiba. Tehát a szabályos politópok hasonlósági osztályai körében a tételben leírt geometriai dualitási viszony szimmetrikus reláció.

6.3.6. Példák

- Standard d-szimplexnek nevezzük a $\Delta^d = \mathrm{conv}\left(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{d+1}\}\right) \subset \mathbf{R}^{d+1}$ politópot. A Δ^d szimplex az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{d+1} = 1$ egyenletű hipersíkot feszíti ki az $\mathbf{R}^{d+1}$ koordinátatérben. Δ^d lapzászlói bijektív kapcsolatban állnak az $\{1,2,\ldots,d+1\}$ halmaz permutációival annak az $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1}) \leftrightarrow \sigma \in S_{d+1}$ megfeleltetésnek a révén, amelynél $L_0 = \{\mathbf{e}_{\sigma(1)}\}$ és minden $1 \le i \le (d-1)$-re $L_i = \mathrm{conv}\left(L_{i-1} \cup \{\mathbf{e}_{\sigma(i+1)}\}\right)$. Az S_{d+1} szimmetrikus csoport a koordináták permutációi révén izometrikusan hat az $\mathbf{R}^{d+1}$ téren és az Δ^d szimplexet önmagára képezi. Ezért Δ^d szimmetriacsoportjának legalább annyi eleme van, mint a lapzászlók

száma, tehát Δ^d szabályos politóp és $\mathrm{Sym}\,(\Delta^d) \cong S_{d+1}$. Egy politópot szabályos d-dimenziós szimplexnek nevezünk, ha hasonló Δ^d-hez.

- A $\square^d = \mathrm{conv}\,\big(\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)\}\big) \subset \mathbf{R}^d$ politópot (ahol az előlejek kiválasztását az összes lehetséges 2^d módon tekintetbe vesszük) standard d-kockának nevezzük. A lapszászlók leszámlálásához kényelmesebb a hozzá hasonló $[0,1]^d$ egységkockát tekinteni, amelyben az origóbeli csúccsal kezdődő lapszászlók nyilvánvalóan bijektív megfeleltetésben állnak Δ^{d-1} lapszászlóival. Miután $\square^d$ csúcsainak a száma 2^d, ebből az adódik, hogy a standard d-kockának $2^d \cdot d!$ lapszászlója van. Tekintsük $O(d)$-nek azt a részcsoportját, amely a koordinátákon (egymástól függetlenül) végrehajtható előjelváltásokból, továbbá a koordináták permutációiból áll. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ez a csoport a $\mathbf{Z}_2^d \rtimes S_d$ szemidirekt szorzat (ahol S_d úgy hat a $\mathbf{Z}_2^d$ normálosztón, hogy a tényezőket permutálja). Ezek a transzformációk mindannyian $\square^d$ szimmetriái, és ennek a csoportnak a rendje $2^d \cdot d!$. Így tehát $\square^d$ szabályos politóp, és $\mathrm{Sym}\,(\square^d) \cong \mathbf{Z}_2^d \rtimes S_d$. Egy politópot d-dimenziós kockának nevezünk, ha hasonló $\square^d$-hez.

- A $\Diamond^d = \mathrm{conv}\,(\{\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \ldots, \pm \mathbf{e}_d\}) \subset \mathbf{R}^d$ politópot standard d-dimenziós keresztpolitópnak nevezzük. A $\mathrm{conv}\,(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d\})$ hiperlap a Δ^{d-1} szimplexszel azonos, és $\Diamond^d$-nek 2^d egybevágó hiperlapja van. Ezért $\Diamond^d$ lapszászlóinak a száma $2^d \cdot d!$. Miután $\Diamond^d$ csúcsai éppen $\square^d$ hiperlapjainak a középpontjai, $\mathrm{Sym}\,(\Diamond^d) \cong \mathrm{Sym}\,(\square^d)$, és $\square^d$ és $\Diamond^d$ egymás geometriai duálisai. Tehát $\Diamond^d$ is szabályos politóp és $\mathrm{Sym}\,(\Diamond^d) \cong \mathbf{Z}_2^d \rtimes S_d$. Egy politópot szabályos d-dimenziós keresztpolitópnak nevezünk, ha hasonló $\Diamond^d$-hez.

6.3.7. Definíció (Csúcsalakzat). Legyen $P \subset E$ szabályos politóp, $\dim P \geq \geq 1$, és legyen A a P politóp csúcsa. Jelöljük V-vel a P politóp A-val szomszédos csúcsainak a halmazát. A V halmaz tehát azokból a P-beli B csúcsokból áll, amelyekre az $[A, B]$ szakasz éle P-nek. A P politóp A-beli csúcsalakzatán a $C(A, P) = \mathrm{conv}\,(V)$ politópot értjük. A P politóp szabályos volta miatt az összes $A \in P$ csúcsra a $C(A, P)$ csúcsalakzat egybevágó, ezért bevezetjük rá az A-tól független $C(P)$ jelölést. A $C(P)$ csúcsalakzatot tehát a P politóp egybevágóság erejéig egyértelműen határozza meg.

6.3.8. Állítás. *Legyen P szabályos politóp,* $\dim P = d \geq 1$, *$A \in P$ tetszőleges csúcs, $L < P$ tetszőleges hiperlap, és O a P középpontja. Ekkor:*

(1) $\dim C(A, P) = d - 1$ *és* $\langle C(A, P) \rangle$ *az* $\langle A, O \rangle$ *egyenesre merőleges hipersík.*

(2) $C(A, P)$ *szabályos politóp.*

(3) *P csúcsainak a száma a $|Sym\,(P)|/|Sym\,\big(C(A,P)\big)|$ hányadossal, hiperlapjainak a száma a $|Sym\,(P)|/|Sym\,(L)|$ hányadossal egyenlő.*

Bizonyítás: (1): Tekintsük az A csúcs stabilizátorát a $\mathrm{Sym}\,(P)$ szimmetriacsoportban, ez pontonként fixen tartja az $\langle A, O\rangle$ egyenest. Az A-val szomszédos P-beli csúcsok V halmaza a $\mathrm{Sym}\,(P)_A$ stabilizátor egy orbitja, ezért benne van egy $\langle A, O\rangle$-ra merőleges hipersíkban. Végül $\dim\langle A, V\rangle = \dim P = d$ miatt $\dim C(A,P) = \dim\langle V\rangle = d-1$.

(2): Jelölje H a $\langle C(A,P)\rangle$ hipersíkot. Az $L \leftrightarrow H \cap L$ megfeleltetés minden i-re bijektív a P politóp A-t tartalmazó $(i+1)$-dimenziós lapjai és a $C(A,P)$ csúcsalakzat i-dimenziós lapjai között. Ezáltal $C(A,P)$ lapzászlói és P-nek az A csúccsal kezdődő lapzászlói között kapunk bijektív megfeleltetést. Az utóbbi halmazon a $\mathrm{Sym}\,(P)_A$ stabilizátor tranzitívan hat, ugyanakkor $\mathrm{Sym}\,(P)_A \leq \mathrm{Sym}\,C(A,P)$. Ezért $C(A,P)$ szabályos.

(3): Tekintsük a $\mathrm{Sym}\,(P)$ csoport hatását egyrészt a csúcsok halmazán, másrészt a hiperlapok halmazán; az állítás közvetlenül adódik 6.1.11.(2)-ből. □

6.3.9. Példák. Bármely szabályos sokszög csúcsalakzata szakasz. A háromdimenziós szabályos poliéderek közül a tetraéder, a kocka és a dodekaéder csúcsalakzata szabályos háromszög, az oktaéderé négyzet, az ikozaéderé szabályos ötszög. A 6.3.6-beli magasabb dimenziós szabályos politópok közül a szabályos d-szimplex és a d-dimenziós kocka csúcsalakzata szabályos $(d-1)$-szimplex, a szabályos d-dimenziós keresztpolitópé szabályos $(d-1)$-dimenziós keresztpolitóp.

6.3.10. Definíció (Schläfli-szimbólum). A legalább 2-dimenziós szabályos P politópokra a $d = \dim P$ dimenzió szerinti rekurzióval értelmezzük az $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ Schläfli-szimbólumot (mégpedig 2-nél nagyobb egész számoknak egy P-től függő, $d-1$ hosszúságú sorozatát) a következőképpen.

Ha $d = 2$, akkor s_1 egyenlő a P sokszög oldalszámával.

Tegyük fel, hogy $d > 2$ és minden d-nél alacsonyabb (legalább 2) dimenziójú politópra már definiáltuk a Schläfli-szimbólumot. Legyen ekkor s_1 a P-beli 2-dimenziós lapok oldalszáma, és legyen $(s_2, \ldots, s_{d-1})$ a $C(P)$ csúcsalakzat Schläfli-szimbóluma.

6.3.11. Állítás. *A P szabályos politóp Schläfli-szimbólumát az $\mathcal{L}(P)$ lapháló egyértelműen meghatározza, mégpedig a következőképpen:*
Legyen $1 \leq i \leq d-1$ tetszőleges. Válasszunk olyan $L_{i-2}, L_{i+1} \in \mathcal{L}(P)$ elemeket, hogy $\dim L_{i-2} = i-2$, $\dim L_{i+1} = i+1$ és $L_{i-2} < L_{i+1}$ teljesüljön. Tekintsük a lapháló L_{i-2} és L_{i+1} közötti intervallumát, azaz az

$$[L_{i-2}, L_{i+1}] = \{L \in \mathcal{L}(P) : L_{i-2} \leq L \leq L_{i+1}\}$$

részben rendezett halmazt. Ez az intervallum izomorf valamilyen sokszög laphálójával; az s_i szám ennek a sokszögnek az oldalszáma.

Bizonyítás: Az állítást i szerinti teljes indukcióval látjuk be. Az $i = 1$ kiinduló esetben az $[\emptyset, L_2]$ intervallum a 2-dimenziós L_2 lap laphálója, ezért az állítás ekkor magától értetődő. Ha $i > 1$, akkor szemeljünk ki egy $A \in P$ csúcsot, és az $(i-1)$-re vonatkozó indukciós feltevést a $C(A, P)$ csúcsalakzatra alkalmazzuk: az $[A, P]$ intervallum a $C(A, P)$ csúcsalakzat laphálójával izomorf, és ennél az izomorfizmusnál az $[L_{i-2}, L_{i+1}] \subseteq \mathcal{L}(P)$ intervallum eggyel alacsonyabb dimenziójú lapok közti intervallumnak felel meg $\mathcal{L}\big(C(A, P)\big)$-ben. □

6.3.12. Következmények.

(1) *Ha a P szabályos politóp Schläfli-szimbóluma $(s_1, \ldots, s_{d-1})$ és $L \leq P$ tetszőleges k-dimenziós lap, ahol $2 \leq k \leq d$, akkor az L politóp Schläfli-szimbóluma $(s_1, \ldots, s_{k-1})$.*

(2) *Ha a P és Q szabályos politópok duális kombinatorikai szerkezetűek és P Schläfli-szimbóluma $(s_1, \ldots, s_{d-1})$, akkor Q-é $(s_{d-1}, \ldots, s_1)$.*

Bizonyítás: (1): Az L politóp laphálója az $[\emptyset, L]$ intervallum $\mathcal{L}(P)$-ben, ezért az s_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ számokat 6.3.11 szerint meghatározó $[L_{i-2}, L_{i+1}]$ intervallumok azonosak P és L esetében.

(2): Az $\mathcal{L}(P)$ és $\mathcal{L}(Q)$ laphálók duálisan izomorfak, ezért 6.3.11-ből rögtön következik az eredmény. □

6.3.13. Példák. A dodekaéder Schläfli-szimbóluma (5,3), az ikozaéderé (3,5). A dimenzió szerinti indukcióval könnyen látható, hogy a szabályos szimplex Schläfli-szimbóluma (3, . . . ,3), a kockáé (4,3, . . . ,3), a keresztpolitópé (3, . . . ,3,4).

6.3.14. Definíció ($\eta(P)$). Tetszőleges, legalább 2-dimenziós P szabályos politópra $\eta(P)$-vel jelöljük az $l^2/4r^2$ mennyiséget, ahol l a P élének a hossza, r pedig a P köré írható hipergömb sugara.

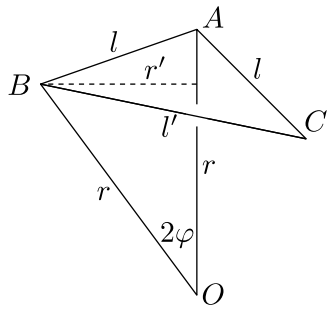
Az $\eta(P)$ szám nyilvánvalóan invariáns a hasonlósági transzformációkkal szemben.

Közvetlen számolással könnyen ellenőrizhető, hogy $\eta(\Delta^d) = (d+1)/2d$, $\eta(\square^d) = 1/d$ és $\eta(\Diamond^d) = 1/2$.

6.3.15. Lemma. *Ha $(s_1, \ldots, s_{d-1})$ a P szabályos politóp Schläfli-szimbóluma, akkor*

$$\eta(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{s_1}}{\eta\big(C(P)\big)} .$$

Bizonyítás: Legyen O a P politóp középpontja, A egy csúcsa, B és C a $C(A,P)$ csúcsalakzat két szomszédos csúcsa, O' a középpontja, l' az élhossza. Jelöljük 2φ-vel az ABO egyenlőszárú háromszög O-nál levő szárszögét. Ekkor:



– az ABO háromszögből $\eta(P) = l^2/4r^2 = \sin^2\varphi$,

– a BCA egyenlőszárú háromszögből $\cos(\pi/s_1) = l'/2l$, és

– az ABO háromszög B-hez tartozó magassága $r' = l\cos\varphi$.

Ezeket a formulákat, valamint az $l'^2 = 4r'^2\eta\big(C(A,P)\big)$ egyenlőséget összevetve

$$\eta(P) = \sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-\frac{r'^2}{l^2} = 1-\frac{r'^2\cdot l'^2}{l^2\cdot 4r'^2\eta\big(C(A,P)\big)} = 1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{s_1}}{\eta\big(C(P)\big)}$$

adódik. □

6.3.16. Tétel. *A legalább 2-dimenziós szabályos politópokat a Schläfli-szimbólum hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározza.*

Bizonyítás: A d dimenzió szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ha P és Q két d-dimenziós szabályos politóp, amelyeknek a Schläfli-szimbóluma ugyanaz az $(s_1,\dots,s_{d-1})$ sorozat, akkor P és Q hasonló.

A $d = 2$ kiinduló esetben ez valóban így van, hiszen bármely két egyenlő oldalszámú szabályos sokszög hasonló.

Tegyük fel, hogy $d > 2$ és d-nél kisebb dimenziókban az állítás igaz. Legyen $L < P$ és $M < Q$ egy-egy hiperlap, ekkor 6.3.12(1)-et alkalmazva az indukciós feltevés szerint L és M hasonló. Tekintsünk egy olyan f hasonlósági transzformációt, amelyre $f(M) = L$ és amely a Q-t tartalmazó $\langle M\rangle$ szerinti félteret a P-t tartalmazó $\langle L\rangle$ szerinti féltérre képezi. Megmutatjuk, hogy ekkor $f(Q) = P$.

A $C(P)$ és $C(Q)$ csúcsalakzatok Schläfli-szimbóluma is egyenlő, ezért az indukciós feltevés miatt a két csúcsalakzat hasonló. Így $\eta\big(C(P)\big) = \eta\big(C(Q)\big)$. A 6.3.15. Lemmát alkalmazva (és felhasználva, hogy s_1 ugyanannyi P és Q esetében) ebből $\eta(P) = \eta(Q)$ következik. Emellett nyilván $\eta(Q) = \eta\big(f(Q)\big)$.

Jelölje O a P politóp középpontját, r a körülírt hipergömb sugarát, l az élhosszt. Az $f(Q)$ politóp élhossza (miután megegyezik $f(M) = L$ élhosszával) ugyancsak l, ezért $\eta(P) = \eta\big(f(Q)\big)$ miatt $f(Q)$ körülírt hipergömbje is r sugarú. Mindkét gömb középpontja az $\langle L\rangle$ hipersíkra L középpontjában állított merőleges egyenesen van ugyanabban a féltérben. Így a sugarak egyenlősége miatt a két hipergömb azonos.

Tekintsük L egy $(d-2)$-dimenziós F lapját. Az L politóp egy F-ben végződő lapszázlóját pontosan kétféleképpen lehet kiegészíteni P lapszázlójává. Az egyiket a másikba vivő szimmetria pontonként helyben hagyja F-et, és ezen kívül az O pontot is, ezért csak a $H = \langle F, O\rangle$ hipersíkra vonatkozó tükrözés lehet. Ugyanezt P helyett az $f(Q)$ politópra is elmondhatjuk, ezért a $\sigma_H(L)$ politóp P-nek is és $f(Q)$-nak is hiperlapja.

Miután bármelyik hiperlapból bármelyik másik hiperlapba el lehet jutni $(d-2)$-dimenziós lapok mentén csatlakozó hiperlapok alkalmas sorozatával, az előző lépés induktív alkalmazásával kapjuk, hogy P és $f(Q)$ hiperlapjai azonosak. Ezért $P = f(Q)$. □

6.3.17. Következmény. *Bármely (legalább 2-dimenziós) P politópra az $\eta(P)$ szám csak P Schläfli-szimbólumától függ.* □

A 6.3.17. Következmény alapján olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ sorozat esetében, amelyhez található olyan politóp, amelynek ez a Schläfli-szimbóluma, bevezethetjük az $\eta(s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ jelölést.

Most a dimenzió szerinti indukcióval áttekintjük, hogy a 6.3.15. Lemma milyen korlátozást von maga után a politópok Schläfli-szimbólumaiként fellépő $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ számsorozatokra nézve. Először a 6.3.15-ből közvetlenül leszűrhető egyenlőtlenségeket rögzítjük.

6.3.18. Lemma. *Ha a $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ sorozat egy politóp Schläfli-szimbóluma, akkor:*

(1) $\cos^2(\pi/s_1) < \eta(s_2, s_3, \ldots, s_{d-1})$*és*

(2) $\eta(s_2, s_3, \ldots, s_{d-1}) > 1/4$.

Bizonyítás: (1): Ha P a szóban forgó politóp, akkor az egyenlőtlenség 6.3.15-ből $\eta(P) > 0$ miatt közvetlenül adódik.

(2): Rögtön következik (1)-ből, mert $s_1 \geq 3$ miatt $\cos^2(\pi/s_1) \geq 1/4$. □

Amikor az indukciós okoskodás során eggyel magasabb dimenzióba lépünk, 6.3.18.(2) korlátozza, hogy az előző lépésben talált sorozatok közül melyek léphetnek föl csúcsalakzat Schläfli-szimbólumaként, és 6.3.18.(1) korlátozza, hogy ezek elé mely számok kerülhetnek s_1-ként. Mivel a $\cos^2(\pi/x)$ függvény ($x \geq 2$ mellett monoton növekedve) 1-hez tart, a 6.3.18.(1) egyenlőtlenség csak véges sok s_1-értéket enged meg.

$d = 2$:

Minden $n \geq 3$-ra létezik szabályos n-szög. Ennek a Schläfli-szimbóluma (n), a hozzá tartozó η-érték pedig $\eta(n) = \sin^2(\pi/n)$.

$d = 3$:

Ha (s_1, s_2) egy 3-dimenziós szabályos politóp Schläfli-szimbóluma, akkor 6.3.18.(2) miatt $\sin^2(\pi/s_2) > 1/4$, ahonnan s_2 csak 3, 4 vagy 5 lehet.
$s_2 = 3$ esetén 6.3.18.(1) alkalmazásával $\cos^2(\pi/s_1) < 3/4$, ahonnan s_1 csak 3, 4 vagy 5 lehet.
$s_2 \geq 4$ esetén 6.3.18.(1)-ből $\cos^2(\pi/s_1) < 1/2$ adódik, ahonnan $s_1 = 3$ következik.

A $d = 3$ esetben tehát csak a (3,3), (4,3), (5,3), (3,4) és (3,5) Schläfli-szimbólumok fordulhatnak elő. Ezek valóban rendre a szabályos tetraéderhez, a kockához, a dodekaéderhez, az oktaéderhez és az ikozaéderhez tartoznak. A megfelelő η-értékek rendre

$$\eta(3,3) = \frac{2}{3}, \qquad \eta(4,3) = \frac{1}{3}, \qquad \eta(5,3) = \frac{3-\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}127,$$

$$\eta(3,4) = \frac{1}{2}, \qquad \eta(3,5) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}276.$$

$d = 4$:

Ha az (s_1, s_2, s_3) számhármas előáll mint valamely 4-dimenziós szabályos politóp Schläfli-szimbóluma, akkor 6.3.18.(2) miatt $\eta(s_2, s_3) > 1/4$, ezért a fenti listából csak $(s_2, s_3) = (3,3)$, (4,3), (3,4) vagy (3,5) jöhet szóba.
$(s_2, s_3) = (3,3)$ esetén 6.3.17.(1) alkalmazásával $\cos^2(\pi/s_1) < 2/3$, ahonnan s_1 csak 3, 4 vagy 5 lehet.
Ha $(s_2, s_3) = (4,3)$, (3,4) vagy (3,5), akkor 6.3.18.(1)-ből $\cos^2(\pi/s_1) < 1/2$, ahonnan $s_1 = 3$ következik.

A $d = 4$ esetben tehát csak a (3,3,3), (4,3,3), (5,3,3), (3,4,3), (3,3,4) és (3,3,5) Schläfli-szimbólumok fordulhatnak elő. Ezek közül (3,3,3), (4,3,3) és (3,3,4) a szabályos 4-dimenziós szimplexnek, kockának, illetve keresztpolitópnak felel meg. A hat lehetséges esetben a megfelelő η-értékek rendre

$$\eta(3,3,3) = \frac{5}{8}, \qquad \eta(4,3,3) = \frac{1}{4}, \qquad \eta(5,3,3) = \frac{7-3\sqrt{5}}{16} \approx 0{,}018,$$

$$\eta(3,4,3) = \frac{1}{4}, \qquad \eta(3,3,4) = \frac{1}{2}, \qquad \eta(3,3,5) = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \approx 0{,}095.$$

$d \geq 5$:

Megmutatjuk, hogy csak a $(3,\ldots,3)$, a $(3,\ldots,3,4)$, vagy a $(4,3,\ldots,3)$ sorozat lehet valamilyen d-dimenziós szabályos politóp Schläfli-szimbóluma.

Teljes indukciót alkalmazunk d szerint. Tegyük fel, hogy $d-1$ dimenzióban csak a ($d-2$ hosszúságú) $(3,\ldots,3)$ és a $(3,\ldots,3,4)$ sorozat ad 1/4-nél nagyobb η-értéket. (Ez $d=5$ esetén az előző lista alapján már így van.) Ekkor a csúcsalakzat Schläfli-szimbóluma csak $(s_2,\ldots,s_{d-1}) = (3,\ldots,3)$ (azaz szimplex, $\eta = d/2(d-1)$) vagy $(s_2,\ldots,s_{d-1}) = (3,\ldots,3,4)$ (azaz keresztpolitóp, $\eta = 1/2$) lehet.
Ha $(s_2,\ldots,s_{d-1}) = (3,\ldots,3)$, akkor 6.3.18.(1) miatt $\cos^2(\pi/s_1) < d/2(d-1)$, ahonnan s_1 csak 3 vagy 4 lehet, ezekkel $\eta = (d+1)/2d$, illetve $\eta = 1/d < 1/4$. Ha $(s_2,\ldots,s_{d-1}) = (3,\ldots,3,4)$, akkor pedig $\cos^2(\pi/s_1) < 1/2$, ahonnan $s_1 = 3$ következik, amellyel $\eta = 1/2$.

Az indukciós állítás tehát továbböröklődik, ezzel megmutattuk, hogy valóban csak a mondott három Schläfli-szimbólum áll elő, amelyek éppen a 6.3.6-beli példákhoz tartoznak.

A 4-dimenziós esetben három olyan Schläfli-szimbólum bukkant fel, amelyek nem illeszkednek az ismert példák közé: (3,4,3), (3,3,5) és (5,3,3). Ezek is szabályos politópokhoz tartoznak. Ezeket a politópokat szabályosságuk bizonyítása nélkül ismertetjük.

6.3.19. Példák

- Tekintsük a négydimenziós kockarács egy kockáját és állítsunk mind a nyolc hiperlapjára kifelé egy-egy olyan gúlát, amelynek az új csúcsát a szomszédos kocka középpontjában vesszük fel. A kocka és a nyolc gúla egyesítése szabályos politóp, amelyet 24-cellának neveznek. A 24-cella Schläfli-szimbóluma (3,4,3).

  Ugyancsak 24-cellához jutunk, ha képezzük akár egy négydimeziós kocka kétdimenziós lapjai középpontjainak, akár egy négydimenziós szabályos keresztpolitóp élfelező pontjainak a konvex burkát. A 24-cella hiperlap-középpontjai szintén 24-cellát feszítenek ki, azaz ez a szabályos politóp önmagának a geometriai duálisa.

  Ha $\mathbf{R}^4$-ben tekintjük a $\Diamond^4$ standard keresztpolitóp és a felére zsugorított standard kocka, azaz az $\frac{1}{2}\square^4$ politóp egyesítésének a konvex burkát, szintén 24-cellát kapunk. Azonosítsuk $\mathbf{R}^4$-et a szokásos módon a kvaterniók algebrájával, és tekintsük az egységgömbön értelmezett $f : \mathbf{S}^3 \to SO(3)$ fedőhomomorfizmust. Legyen az $A_4 \leq SO(3)$ csoport

konkrétan a $\square^3$ kockába beírt (bármelyik) szabályos tetraéder mozgáscsoportja. Az $f^{-1}(A_4) \leq \mathbf{S}^3$ csoportot binér tetraédercsoportnak nevezik. Konvex burka éppen a fenti módon $\mathbf{R}^4$-ben definiált 24-cella.

A 24-cellának 24 csúcsa és 24 hiperlapja van, csúcsalakzatai és hiperlapjai mindannyian szabályos oktaéderek. Szimmetriacsoportja 1152 rendű. A binér tetraédercsoport bal-jobb-szorzásai (azaz az $x \mapsto axb$ alakú leképezések, ahol a és b rögzített csoportelemek) a 24-cella irányítástartó szimmetriái. Megmutatható, hogy ezek csoportja 4 indexű a szimmetriacsoportban, azaz a mozgások felét teszi ki.

- Álljon az $A_5 \leq SO(3)$ csoport egy olyan $\mathbf{R}^3$-beli ikozaéder mozgásaiból, amelynek vannak mindhárom koordinátatengellyel párhuzamos élei. (Például a $\Diamond^3$ oktaéder élein alkalmasan választott pontok konvex burkaként előállított ikozaéder ilyen.) Az $f^{-1}(A_5) \leq \mathbf{S}^3$ csoportot binér ikozaédercsoportnak nevezik. A $\operatorname{conv}\big(f^{-1}(A_5)\big)$ politóp újabb példa szabályos négydimenziós politópra; a neve 600-cella, Schläfli-szimbóluma (3,3,5). A 600-cellának 120 csúcsa és 600 hiperlapja van, csúcsalakzatai ikozaéderek, hiperlapjai szabályos tetraéderek. Szimmetriacsoportja 14400 rendű, benne a mozgások 2 indexű részcsoportját a binér ikozaédercsoport bal-jobb-szorzásai alkotják.

- A 600-cella hiperlap-középpontjainak a konvex burka a 600-cella geometriai duálisát, a 120-cellát szolgáltatja, amelynek a Schläfli-szimbóluma (5,3,3). A 120-cellának 600 csúcsa és 120 hiperlapja van, csúcsalakzatai szabályos tetraéderek, hiperlapjai dodekaéderek. Szimmetriacsoportja azonos a 600-celláéval.

Ezzel (a 6.3.19-beli példák szabályos voltának ellenőrzésétől eltekintve) bebizonyítottuk a szabályos politópok alábbi osztályozási tételét.

6.3.20. Tétel (Schläfli tétele). *Bármely legalább kétdimenziós szabályos politóp hasonló az alábbi (négy végtelen sorozatot alkotó és további öt „sporadikus”) páronként egymáshoz nem hasonló példák egyikéhez:*

- *d-dimenziós szabályos szimplex* ($d = 2,3,\ldots$),
- *d-dimenziós kocka* ($d = 2,3,\ldots$),
- *d-dimenziós szabályos keresztpolitóp* ($d = 3,4,\ldots$),
- *n-oldalú szabályos sokszög* ($n = 5,6,\ldots$),
- *dodekaéder, ikozaéder,* 24-*cella,* 600-*cella,* 120-*cella.* $\square$

7. Konvex testek euklideszi térben

Az euklideszi térben fekvő idomok néhány metrikus jellemzőjét (térfogat, felszín, átmérő, szélesség) vizsgáljuk. Ennek fontos eszköze a konvex testek politópokkal történő approximációja, és ezeknek a metrikus adatoknak a viselkedése határátmenet során. Ezért a konvex testeket egy alkalmasan definiált metrikus tér elemeiként tekintjük, és ennek a metrikus térnek a tulajdonságait derítjük föl. Végül kitérünk a konvex testek metrikus jellemzőivel kapcsolatos néhány klasszikus egyenlőtlenségre.

7.1. Térfogat és felszín

Az euklideszi térben fekvő halmazok metrikus adatai közül az egyik legfontosabb a (magasabb dimenziós) térfogat fogalma, amelyet az analízisből ismert Jordan-mérték felhasználásával értelmezünk.

7.1.1. Emlékeztető (Jordan-mérték). Felhasználjuk a Jordan-mérhető halmaz és a Jordan-mérték fogalmát, amelyet az $\mathbf{R}^d$ koordinátatérre vonatkozó többváltozós analízisből ismerünk. Egy $M \subseteq \mathbf{R}^d$ Jordan-mérhető halmaz Jordan-mértékére itt a $V_d(M)$ jelölést használjuk. Felidézzük a Jordan-mérték analízisből ismert fő tulajdonságait:

- A Jordan-mérték nemnegatív, additív, eltolásinvariáns, és az egységkocka mértéke 1. (Ezek a tulajdonságok a Jordan-mértéket egyértelműen meghatározzák.)
- Ha M egy $\mathbf{R}^d$-beli hipersíkban fekvő korlátos részhalmaz, akkor $V_d(M) = 0$.
- Egy $M \subseteq \mathbf{R}^d$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha $V_d(\partial M) = 0$.
- Cavalieri-elv: ha $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2}$ a $d = d_1 + d_2$ összegfelbontáshoz tartozó ortogonális direktszorzat-felbontás, $i = 1{,}2$-re $p_i : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d_i}$ a felbontáshoz tartozó ortogonális vetítés, és $M \subseteq \mathbf{R}^d$, akkor

$$V_d(M) = \int_{X \in p_1(M)} V_{d_2}\big(p_2\big(p_1^{-1}(X) \cap M\big)\big)\,\mathrm{d}V_{d_1},$$

  ahol feltesszük, hogy minden szükség szerint mérhető, illetve integrálható.

- Ha $M \subseteq \mathbf{R}^d$ és $\varphi \in GL(d, \mathbf{R})$, akkor $V_d\big(\varphi(M)\big) = |\det \varphi| \cdot V_d(M)$.

Az utolsó tulajdonság speciális eseteként következik, hogy a Jordan-mérték az $\mathbf{R}^d$ tér minden egybevágóságára nézve invariáns (nem csak az eltolásokra). Ennek alapján a következőképpen definiálhatjuk a térfogat fogalmát most már tetszőleges euklideszi térben:

7.1.2. Definíció (Térfogat). Legyen E euklideszi tér és $M \subseteq E$. Az M halmazt Jordan-mérhetőnek nevezzük, ha valamely $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszert választva $\mathbf{x}(M) \subseteq \mathbf{R}^d$ Jordan-mérhető. Ilyenkor M térfogatán a $V_d(M) = V_d\big(\mathbf{x}(M)\big)$ számot értjük. Miután bármely két $\mathbf{x}, \mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszerre $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ egybevágóság, az M halmaz mérhető volta, illetve térfogata nem függ $\mathbf{x}$ választásától. A térfogatot $d = 1$ esetén hossznak, $d = 2$ esetén területnek mondjuk.

A 7.1.1-beli utolsó tulajdonságot felhasználva meghatározható az affin leképezések hatása a térfogatra:

7.1.3. Állítás. *Ha $f : E \to E'$ affin izomorfizmus az E és E' d-dimenziós euklideszi terek között, akkor bármely $M \subseteq E$ Jordan-mérhető halmazra*

$$V_d\big(f(M)\big) = |\det L(f)| \cdot V_d(M)\,. \qquad \square$$

7.1.4. Következmények. *Legyen E euklideszi tér.*

(1) *Ha $H, H' \subset E$ egymásra nem merőleges hipersíkok és $f : H \to H'$ a H'-re történő ortogonális vetítés, akkor bármely $M \subseteq H$ Jordan-mérhető halmazra $V_{d-1}\big(f(M)\big) = \cos\alpha \cdot V_{d-1}(M)$, ahol α a két hipersík által bezárt szög.*

(2) *Ha valamely $f : E \to E$ hasonlóság aránya λ, akkor bármely $M \subseteq E$ Jordan-mérhető halmazra $V_d\big(f(M)\big) = \lambda^d \cdot V_d(M)$.* $\square$

7.1.5. Példák

- Bármely $P \subseteq E$ politóp Jordan-mérhető, hiszen P korlátos és ∂P előáll véges sok nullmértékű részhalmaz (a d-nél kisebb dimenziós lapok) egyesítéseként. Emellett $V_d(P)$ pontosan akkor pozitív, ha $\dim P = d$ (azaz ha $\operatorname{int} P \neq \emptyset$).

- Ha a P politóp egy Q alapú, m magasságú d-dimenziós hasáb, akkor $V_d(P) = V_{d-1}(Q) \cdot m$. Ez a Cavalieri-elv közvetlen következménye.

- Legyen P az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_d$ független vektorok által kifeszített d-dimenziós parallelotóp. Ekkor $V_d(P)^2 = \Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$ az $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_d$ vektorokhoz tartozó Gram-mátrix determinánsa. Jelölje ugyanis A az $\mathbf{a}_i$ vektorokból mint oszlopvektorokból összeállított mátrixot, ekkor $V_d(P) = \det A$. A Gram-mátrix ij-edik eleme $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = (A^\top A)_{ij}$, ezért $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d) = \det(A^\top A) = \det A^\top \det A = (\det A)^2 = V_d(P)^2$.

- Ha a P politóp egy Q alapú, m magasságú d-dimenziós gúla, akkor $V_d(P) = \frac{1}{d} \cdot V_{d-1}(Q) \cdot m$. Ez 7.1.4.(2)-ből és a $\int_0^1 \lambda^{d-1}\, d\lambda = \frac{1}{d}$ formulából adódik a Cavalieri-elv felhasználásával.

- Ha S jelöli az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_d$ független vektorok által kifeszített d-dimenziós szimplexet, akkor $V_d(S)^2 = \frac{1}{d!}\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d)$. Ez az előző két példából adódik d szerinti indukcióval.

7.1.6. Definíció (Konvex test). A $K \subseteq E$ részhalmazt konvex testnek nevezzük, ha konvex, kompakt, és a belseje nem üres. Például bármely d-dimenziós politóp konvex test E-ben. A $d = 1$ esetben a konvex testek a (nemelfajuló) szakaszok, $d = 2$ esetén konvex test helyett inkább konvex lemeznek szokás nevezni őket.

7.1.7. Jelölések, elnevezések

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E) = \{C \subseteq E : C \neq \emptyset \text{ kompakt halmaz}\}$.

- $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E) = \{P \subseteq E : P \neq \emptyset \text{ politóp}\}$.

- $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^+(E) = \{P \in \mathcal{P}(E) : \dim P = \dim E\}$.

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E) = \{K \subseteq E : K \neq \emptyset \text{ kompakt és konvex}\}$. Nyilván $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \subseteq \mathcal{C}$.

- $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+(E) = \{K \in \mathcal{K}(E) : \dim K = \dim E\}$ az E-beli konvex testek halmaza. Nyilván $\mathcal{P}^+ \subseteq \mathcal{K}^+$.

- Legyen $d \geq 1$, $O \in E$ és $r > 0$. A $B(O, r) = \{A \in E : \rho(O, A) < r\}$ halmazt az O körüli r sugarú nyílt gömbtestnek, a $\overline{B}(O, r) = \{A \in \in E : \rho(O, A) \leq r\} = \overline{B(O, r)}$ halmazt az O körüli r sugarú zárt gömbtestnek nevezzük. Nyilván $\overline{B}(O, r) \in \mathcal{K}^+$. Az $\mathbf{R}^d$-beli origó körüli egységsugarú gömbtestekre a $B^d = B(\mathbf{0},1)$, $\overline{B}^d = \overline{B}(\mathbf{0},1)$ jelölést is használjuk.

- Legyen $d \geq 1$ és $M \subseteq E$. Tetszőleges $r > 0$ esetén az M halmaz r sugarú nyílt, illetve zárt környezetének nevezzük a $B(M, r) = \bigcup_{A \in M} B(A, r)$, illetve $\overline{B}(M, r) = \bigcup_{A \in M} \overline{B}(A, r)$ halmazokat. Ezeket a halmazokat szokás az M halmaz r sugarú nyílt, illetve zárt paralleltartományainak is

nevezni. Ha az E teret valamely (tetszőlegesen választott) O kezdőponttal vektorizáljuk, akkor a paralleltartományok a $B(M,r) = M+B(O,r)$ és $\overline{B}(M,r) = M + \overline{B}(O,r)$ formulák szerint Minkowski-összegként állnak elő. Emiatt bármely $K \in \mathcal{K}$ és $r > 0$ esetén $\overline{B}(K,r) \in \mathcal{K}^+$.

- Egy $M \subseteq E$ nemüres korlátos halmaz átmérője alatt a $\operatorname{diam}(M) = \sup\{\rho(A,B) : A, B \in M\}$ számot értjük. Nyilván $d \geq 1$ esetén $A \in E$-re $\operatorname{diam}\big(B(A,r)\big) = \operatorname{diam}\big(\overline{B}(A,r)\big) = 2r$, valamint nemüres korlátos $M \subset E$-re $\operatorname{diam}\big(B(M,r)\big) = \operatorname{diam}\big(\overline{B}(M,r)\big) = \operatorname{diam}(M) + 2r$.

- A nyílt gömbtest, halmaz nyílt környezete, átmérő stb. elnevezéseket és a $B(O,r)$, $B(M,r)$, $\operatorname{diam} M$ stb. jelöléseket nem csak euklideszi térben, hanem tetszőleges metrikus térben is használhatjuk (ugyanazokkal a definíciókkal).

7.1.8. Lemma (Politóp-approximáció). *Legyen $K \in \mathcal{K}^+$ tetszőleges konvex test.*

(1) *Bármely $L \subseteq \operatorname{int} K$ kompakt halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $P \in \mathcal{P}^+$ politóp, hogy $L \subseteq \operatorname{int} P$, $P \subseteq \operatorname{int} K$ és $K \subseteq B(P,\varepsilon)$.*

(2) *Bármely $O \in \operatorname{int} K$ ponthoz és $\eta > 1$ számhoz létezik olyan $P \in \mathcal{P}^+$ politóp, hogy $P \subseteq \operatorname{int} K$ és $K \subseteq \operatorname{int} H_{O,\eta}(P)$.*

Bizonyítás: (1): Válasszunk minden $X \in L$ ponthoz olyan $S_X \subset \operatorname{int} K$ szimplexet, hogy $X \in \operatorname{int} S_X$, majd L kompaktságára hivatkozva válasszunk ezek közül véges sokat úgy, hogy lefedjék L-et: $L \subset S_{X_1} \cup S_{X_2} \cup \ldots \cup S_{X_m}$.

Tekintsük most a K belső pontjai körüli ε sugarú nyílt gömbtesteket. Bármely konvex K halmazra $K \subseteq \overline{\operatorname{relint} K}$, ezért ezek a nyílt gömbtestek lefedik K-t: $K \subset \bigcup_{Y \in \operatorname{int} K} B(Y,\varepsilon)$. Most K kompaktságát használva kiválaszthatunk véges sokat, amelyek lefedik K-t: $K \subset B(Y_1,\varepsilon) \cup B(Y_2,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(Y_n,\varepsilon)$.

Legyen $P = \operatorname{conv}\{S_{X_1}, \ldots S_{X_m}, Y_1, \ldots Y_n\}$, ekkor magától értetődően $P \subseteq \operatorname{int} K$ és $K \subseteq B(P,\varepsilon)$ teljesül.

(2): Legyen $L = H_{O,1/\eta}(K)$, ekkor az L-hez (és tetszőleges ε-hoz) (1) szerint választott P politópra nyilván $P \subseteq \operatorname{int} K$, továbbá $H_{O,\eta}(L) = K$ miatt $K \subseteq \operatorname{int} H_{O,\eta}(P)$ is teljesül. □

7.1.9. Állítás. *Bármely konvex test Jordan-mérhető.*

Bizonyítás: Legyen $K \in \mathcal{K}^+$ és $\varepsilon > 0$ adott. Elegendő azt belátni, hogy léteznek olyan $P, Q \in \mathcal{P}^+$ politópok, hogy $P \subseteq K \subseteq Q$ és $V_d(Q) - V_d(P) < \varepsilon$. Ez pedig 7.1.8.(2) felhasználásával rögtön adódik. □

7.1.10. Következmény. *Bármely $K \subseteq E$ konvex testre*

$$\begin{aligned} V_d(K) &= \sup\{V_d(P) : P \in \mathcal{P}^+, P \subseteq \operatorname{int} K\} = \\ &= \inf\{V_d(Q) : Q \in \mathcal{P}^+, K \subseteq \operatorname{int} Q\}. \end{aligned}$$ □

7.1.11. Példa (Gömbtestek térfogata). Jelölje κ_d az $\mathbf{R}^d$-beli egységgömbtest térfogatát, ekkor tetszőleges O középpontú, r sugarú E-beli gömbtest térfogata $V_d\big(\overline{B}(O,r)\big) = \kappa_d \cdot r^d$. A dimenzió szerinti indukcióval, a Cavalieri-elv alkalmazásával és integrálással κ_d értékére az alábbi formula adódik:

$$\kappa_d = \begin{cases} \dfrac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}\,, & \text{ha } d \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{2^{(d+1)/2}\,\pi^{(d-1)/2}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot d}\,, & \text{ha } d \text{ páratlan}\,. \end{cases}$$

Tehát például $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = \pi$, $\kappa_3 = 4\pi/3$, $\kappa_4 = \pi^2/2$. A faktoriálist tartalmazó nevező miatt a dimenzió növelésével a κ_d sorozat gyorsan tart 0-hoz, különösen, ha a gömböt magában foglaló 2 élű kocka térfogatával, 2^d-nel hasonlítjuk össze. A 10-dimenziós gömbtest például körülbelül negyed százaléknyi térfogatot foglal el csupán a köré írt kockából.

7.1.12. Definíció (Politóp felszíne). Ha $d = \dim E \geq 2$ és $P \subseteq E$ d-dimenziós politóp, akkor P felszínén a hiperlapok $d-1$-dimenziós térfogatainak az összegét értjük. A felszínt $A(P)$-vel jelöljük. (A $d = 2$ esetben felszín helyett a P konvex sokszög kerületének nevezzük az $A(P)$ számot.) Tehát bármely $P \in \mathcal{P}^+(E)$-re

$$A(P) = \sum_{\substack{L \leq P \\ \dim L = d-1}} V_{d-1}(L)\,.$$

Ha $f : E \to E'$ hasonlóság, amelynek az aránya λ, akkor bármely $P \in \mathcal{P}^+$ $+(E)$-re nyilván $A\big(f(P)\big) = \lambda^{d-1} \cdot A(P)$.

A következő állítást a háromszögegyenlőtlenség d-dimenziós általánosításaként is felfoghatjuk.

7.1.13. Állítás. *A $P \in \mathcal{P}^+$ politóp bármely L hiperlapjára*

$$V_{d-1}(L) < \frac{1}{2} A(P)\,.$$

Bizonyítás: Azt kell megmutatnunk, hogy az L lap $(d-1)$-dimenziós térfogata kisebb az összes többi hiperlap $(d-1)$-dimenziós térfogatának összegénél. Vetítsük ortogonálisan az L-től különböző (és L-re nem merőleges) hiperlapokat

az L-et tartalmazó hipersíkra. A vetületek együtt lefedik L-et és a hiperlapok $(d-1)$-dimenziós térfogata 7.1.4.(1) miatt nem nőhet a vetítés során, sőt vannak olyanok a hiperlapok között (mégpedig az L-lel nem párhuzamosak), amelyek esetében a térfogat határozottan csökken. □

7.1.14. Állítás. *Ha $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^+$ és $P_1 \subseteq P_2$, akkor $A(P_1) \leq A(P_2)$.*

Bizonyítás: Legyen $r = r(P_1, P_2)$ a P_1 politóp azon L hiperlapjainak a száma, amelyekre $L \nsubseteq \partial P_2$, azaz az L-et tartó hipersík belemetsz P_2 belsejébe. Teljes indukciót alkalmazunk az r szám szerint. Ha $r = 0$, akkor $P_1 = P_2$ és nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $r(P_1, P_2) > 0$ és bármely olyan politóp-párra igaz az állítás, amelyhez ennél kisebb r-érték tartozik. Legyen $L \leq P_1$ olyan hiperlap, amelyre $L \nsubseteq \partial P_2$. Vágjuk ketté a P_2 politópot az $\langle L \rangle$ hipersíkkal: legyen F' a P_1 politóp L-hez tartozó támaszféltere, F'' pedig az $\langle L \rangle$ szerinti másik féltér. A $P_2' = P_2 \cap F'$ politópra $P_1 \subseteq P_2'$ és $r(P_1, P_2') < r(P_1, P_2)$, így az indukciós feltevést a (P_1, P_2') párra alkalmazva $A(P_1) \leq A(P_2')$. A $P_2'' = P_2 \cap F''$ politópra és annak $L'' = \langle L \rangle \cap P_2$ hiperlapjára a 7.1.13. Állítást alkalmazzuk, ezzel

$$A(P_1) \leq A(P_2') \leq A(P_2') + \big(A(P_2'') - 2V_{d-1}(L'')\big) = A(P_2). \qquad \square$$

Megjegyzés. A 7.1.14. Állításban nyilván szigorú egyenlőtlenség is mondható, ha P_1 valódi része P_2-nek.

7.1.15. Állítás. *Bármely $K \in \mathcal{K}^+$ konvex testre*

$$\sup\{A(P_1) : P_1 \in \mathcal{P}^+, P_1 \subseteq K\} = \inf\{A(P_2) : P_2 \in \mathcal{P}^+, K \subseteq P_2\}\,.$$

Bizonyítás: A $\leq$ egyenlőtlenség azonnal következik 7.1.14-ből. Másrészt 7.1.8.(2) alapján bármely $\eta > 1$-hez találhatók olyan $P_1 \subseteq K$ és $P_2 \supseteq K$ politópok, hogy $A(P_2) = \eta^{d-1} A(P_1)$, emiatt a $\geq$ egyenlőtlenség is érvényes. □

7.1.16. Definíció (Konvex test felszíne). $d \geq 2$ és $K \in \mathcal{K}^+(E)$ esetén K felszínének nevezzük és $A(K)$-val jelöljük a 7.1.15-beli szuprémum és infimum közös értékét.

A $d = 2$ esetben felszín helyett az L konvex lemez kerületének nevezzük az $A(L)$ számot, és $A(L)$ helyett inkább a $k(L)$ jelölést alkalmazzuk rá.

Ha $f : E \to E'$ hasonlóság, amelynek az aránya λ, akkor (a politópokra vonatkozó hasonló tartalmú észrevételből rögtön adódóan) bármely $K \in \mathcal{K}^+(E)$-re $A\big(f(K)\big) = \lambda^{d-1} \cdot A(K)$.

7.1.17. Állítás. *Ha $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^+$ és $K_1 \subseteq K_2$, akkor $A(K_1) \leq A(K_2)$.*

Bizonyítás: Azonnal következik 7.1.15-ből. □

7.1.18. Példa (Gömbök felszíne). Legyen $d \geq 2$. A 7.1.8.(2)-beli politóp-approximációra hivatkozva minden $n \in \mathbf{N}$-re választhatunk olyan $P_n \in \mathcal{P}^+$ politópot, hogy $\overline{B}^d \subseteq P_n \subseteq \overline{B}(\mathbf{0},1+1/n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} V_d\big(\overline{B}(\mathbf{0},1+1/n)\big) &= (1+1/n)^d \cdot \kappa_d \;\to\; \kappa_d \quad (n \to \infty) \\ \text{és} \quad A\big(\overline{B}(\mathbf{0},1+1/n)\big) &= (1+1/n)^{d-1} \cdot A(\overline{B}^d) \;\to\; A(\overline{B}^d) \quad (n \to \infty), \\ \text{valamint} \quad \kappa_d &\leq V_d(P_n) \leq V_d\big(\overline{B}(\mathbf{0},1+1/n)\big) \\ \text{és} \quad A(\overline{B}^d) &\leq A(P_n) \leq A\big(\overline{B}(\mathbf{0},1+1/n)\big) \end{aligned}$$

miatt $V_d(P_n) \to \kappa_d$ és $A(P_n) \to A(\overline{B}^d)$ $(n \to \infty)$ érvényes. A P politóp minden $L \leq P$ hiperlapjára állítsunk origó csúcsú gúlát, azaz képezzük a $\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, L\}$ politópokat. A $\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, L\}$ gúlának az L alaphoz tartozó magassága az origónak a P_n politóp L-et tartalmazó támaszhipersíkjától mért távolságával, azaz a $\rho(\mathbf{0}, \langle L \rangle)$ számmal egyenlő. A gúlák P_n egymásba nem nyúló politópokra történő felbontását adják, ezért

$$V_d(P_n) = \sum_{\substack{L \leq P_n \\ \dim L = d-1}} V_d(\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, L\}) = \sum_{\substack{L \leq P_n \\ \dim L = d-1}} \frac{1}{d} \cdot V_{d-1}(L) \cdot \rho(\mathbf{0}, \langle L \rangle)\,.$$

Itt mindegyik L-re $1 \leq \rho(\mathbf{0}, \langle L \rangle) \leq 1 + 1/n$, emiatt

$$\frac{1}{d} \cdot A(P_n) \leq V_d(P_n) \leq \frac{1}{d} \cdot (1+1/n) \cdot A(P_n),$$

ahonnan határátmenettel $\kappa_d = \frac{1}{d} \cdot A(\overline{B}^d)$ következik. Így tehát bármely O középpontú, r sugarú E-beli gömb felszínére az

$$A\big(\overline{B}(O,r)\big) = d \cdot \kappa_d \cdot r^{d-1}$$

képlet adódik. Például 2, 3 és 4 dimenzióban az r sugarú gömb felszíne rendre $2r\pi$, $4r^2\pi$, illetve $2r^3\pi^2$. □

7.2. Szélesség

Ebben a szakaszban föltesszük, hogy $d \geq 1$. Ha $K \subset E$ konvex test, és rögzítünk E-ben egy tetszőleges hipersíkállást, akkor K-nak pontosan két olyan támaszhipersíkja van, amely ehhez a hipersíkálláshoz tartozik. Ezek távolsága – a K test szélessége – általában függ a választott hipersíkállástól. Ezért a szélességet mint a normálvektor függvényét célszerű értelmezni.

7.2.1. Definíció (Szélesség, $w_K(\mathbf{u})$). Jelölje S a V euklideszi vektortér egységgömbjét. Legyen $K \subset E$ konvex test. Válasszunk egy tetszőleges $O \in E$ pontot, és értelmezzük a $w_K : S \to \mathbf{R}$ függvényt a

$$w_K(\mathbf{u}) = \max_{A \in K} \left(\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OA}\right) - \min_{B \in K} \left(\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OB}\right)$$

formulával. A K halmaz kompaktsága miatt a képletben szereplő maximum és minimum létezik. Világos, hogy a képlet a két $\mathbf{u}$-ra merőleges támaszhipersík távolságát adja meg, így nem függ az O origó speciális választásától.

7.2.2. Állítás. *Bármely $K \subset E$ konvex testre*

(1) *$w_K : S \to \mathbf{R}$ pozitív, folytonos, páros függvény;*

(2) $\operatorname{diam}(K) = \max_{\mathbf{u} \in S} w_K(\mathbf{u})$*;*

(3) *ha $K' \subset E$ is konvex test és $K \subseteq K'$, akkor $w_K \leq w_{K'}$;*

(4) *bármely $r > 0$ esetén $w_{\overline{B}(K,r)} = w_K + 2r$;*

(5) *ha a λ arányú $f : E \to E$ hasonlóságnak a linearizáltja $\lambda \cdot \varphi$, ahol $\varphi \in O(V)$, akkor $w_{f(K)} = \lambda \cdot w_K \circ (\varphi^{-1}|_S)$.*

Bizonyítás: A w_K függvény folytonosságán kívül az összes állítás magától értetődik. A folytonosságot a w_K definíciójában szereplő különbség mindkét tagjára belátjuk. Elég az $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) = \max_{A \in K} \left(\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OA}\right)$ függvénnyel foglalkozni, a másik tag ugyanúgy kezelhető. Jelölje C az $\{\|\overrightarrow{OX}\| \, X \in K\}$ számhalmaz egy felső korlátját (ami K kompaktsága miatt létezik). Megmutatjuk, hogy bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ mellett $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq C|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, ami elegendő f folytonosságához. Legyen $A, B \in S$ olyan, hogy $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OA}$ és $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{OB}$, ekkor $f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OA} - \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{OB} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \overrightarrow{OA} + \left(\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{OA} - \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{OB}\right) \leq (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \overrightarrow{OA} \leq C|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, és hasonlóképpen igazolható $f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) \leq C|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ is. □

Értelmezni szeretnénk a $K \subset E$ konvex test átlagos szélességét, a $w(K)$ számot. Kézenfekvő, hogy ehhez a w_K függvény átlagát kell venni az S gömbön. Ehhez görbült felületeken történő integrálást kell alkalmazni, amit a többváltozós analízis és a differenciálgeometria eszközeivel lehet bevezetni. Mi itt a kétdimenziós esetre szorítkozunk, amikor a szóban forgó integrálás egyetlen változó, a körülfordulás szöge szerint történhet.

Tegyük föl tehát a továbbiakban (7.2.6-ig bezárólag), hogy $\dim E = 2$, és legyen $L \subset E$ konvex lemez. Rögzítsük a V vektortér egy irányítását és egy $\mathbf{u}_0 \in S$ kezdővektort, ezzel S elemei $\mathbf{u}_\alpha$ alakban írhatók, ahol α szögű pozitív

forgatás viszi $\mathbf{u}_0$-t $\mathbf{u}_\alpha$-ba. Ekkor az $\alpha \mapsto \mathbf{u}_\alpha$ hozzárendelés egy $\mathbf{u} : \mathbf{R} \to S$ folytonos leképezést eredményez, amely 2π szerint periodikus.

7.2.3. Definíció (Konvex lemez átlagos szélessége). Az $L \subset E$ konvex lemez átlagos szélességét, a $w(L)$ számot a

$$w(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_L(\mathbf{u}_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

képlettel értelmezzük. A $w(L)$ szám nyilván nem függ sem V irányításának, sem az $\mathbf{u}_0$ kezdővektornak a speciális megválasztásától.

Az átlagos szélesség alábbi tulajdonságai rögtön következnek a 7.2.2-beli megállapításokból.

7.2.4. Állítás. *Bármely $L \subset E$ konvex lemezre*

(1) $0 < w(L) \le \operatorname{diam}(L)$;

(2) *ha $L' \subset E$ is konvex lemez és $L \subseteq L'$, akkor $w(L) \le w(L')$;*

(3) *ha L-et λ arányú hasonlóság viszi M-be, akkor $w(M) = \lambda w(L)$;*

(4) *bármely $r > 0$ esetén $w\big(\overline{B}(L,r)\big) = w(L) + 2r$.* □

Nevezetes tény, hogy közvetlen összefüggés van konvex lemezek átlagos szélessége és kerülete között (l. 7.2.6). Ezt először a sokszögek esetére tisztázzuk.

7.2.5. Állítás. *Legyen P konvex sokszög az E euklideszi síkban. Ekkor*

$$k(P) = \pi \cdot w(P)\,.$$

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ a P sokszög élvektorai egy körüljárás szerint felsorolva. Bármelyik $\mathbf{u} \in S$ egységvektort rögzítve az $\mathbf{u}$-ra merőleges két támaszegyenesen kiszemelhetjük P egy-egy csúcsát. Ez a két csúcs két részre osztja P határát, és ezáltal az élvektorok halmazát két olyan részhalmazra bontja, amelyek mindegyikében a vektorok $\mathbf{u}$ irányú összetevői hosszának az összege $w_P(\mathbf{u})$-val egyenlő. Emiatt

$$w_P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_i|\,,$$

ahonnan

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_P(\mathbf{u}_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} |\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{a}_i|\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Legyen α_i az $\mathbf{a}_i$ vektor forgásszöge az $\mathbf{u}_0$ kezdőiránytól számítva, ekkor $\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{a}_i = |\mathbf{a}_i| \cos(\alpha - \alpha_i)$. A $|\cos(\alpha - \alpha_i)|$ függvény integrálja 0 és 2π között 4-gyel egyenlő, ezért

$$w(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{a}_i| \int_0^{2\pi} |\cos(\alpha - \alpha_i)| \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{a}_i| = \frac{k(P)}{\pi} . \qquad \square$$

7.2.6. Tétel. *Bármely $L \subset E$ konvex lemezre érvényes a*

$$k(L) = \pi \cdot w(L)$$

összefüggés.

Bizonyítás: A 7.1.8-ban tisztázott approximációs eljárással a tételt visszavezethetjük konvex sokszögek esetére. Ha $\varepsilon > 0$, akkor 7.1.8(1) és 7.1.15 alapján választhatunk olyan P konvex sokszöget, amelyre $P \subseteq L \subseteq \overline{B}(P, \varepsilon)$ és $|k(L) - k(P)| \leq \varepsilon$ érvényes. Ekkor 7.2.4 alapján $|w(L) - w(P)| \leq 2\varepsilon$, és így a 7.2.5. Állítást is felhasználva

$$|k(L) - \pi \cdot w(L)| \leq |k(L) - k(P)| + |\pi \cdot w(P) - \pi \cdot w(L)| \leq (1 + 2\pi)\varepsilon .$$

Ez az egyenlőtlenség minden $\varepsilon > 0$-ra érvényes, így $k(L) - \pi \cdot w(L) = 0$. $\square$

Megjegyzés. A magasabb dimenziós esetekben a konvex test felszíne nem az átlagos szélességgel van szoros kapcsolatban. A 7.2.5-beli bizonyítást nem volna nehéz a háromdimenziós esetre átvinni (az egyetlen nehézséget a gömbfelületen történő integrálás szabatos értelmezése jelenti). Ezzel 7.2.5. térbeli megfelelőjeként azt kapnánk, hogy bármely háromdimenziós politóp felszíne a kétdimenziós síkokra eső merőleges vetületek területei átlagának a négyszeresével egyenlő. Politóp-approximációval adódik, hogy ugyanez érvényes bármely háromdimenziós konvex testre is. Ez a tétel annak az ún. Cauchy-féle integrálformulának a háromdimenziós esete, amely – mint a 7.2.6. Tétel messzemenő általánosítása – kapcsolatot teremt valamely magasabb dimenziós konvex test felszíne és a hipersíkokra eső merőleges vetületek térfogatainak az átlaga között (l. a 7.4.11. Tételt követő megjegyzést).

7.2.7. Definíció (Állandó szélességű konvex test). A $K \subset E$ konvex testet állandó szélességűnek mondjuk, ha a $w_K : S \to \mathbf{R}$ szélességfüggvény konstans.

Egy E-beli r sugarú gömbtest nyilván állandó $2r$ szélességű test. Az alábbi példák mutatják, hogy a gömbtesteken kívül még igen sok állandó szélességű konvex test létezik.

7.2.8. Példák

- Legyen $d = 2$. Tekintsünk a síkon egy w oldalhosszúságú szabályos háromszöget, és legyen L annak a három w sugarú körlemeznek a közös része, amelynek a középpontjai a háromszög csúcsaiban vannak. Ezt az L idomot w szélességű Reuleaux-háromszögnek nevezik. Könnyű meggyőződni arról, hogy L állandó w szélességű konvex lemez. Ezt a konstrukciót nyilvánvaló módon általánosíthatjuk háromszög helyett tetszőleges páratlan oldalszámú szabályos sokszög esetére.

- Ha $d > 2$, akkor választunk egy 2-dimenziós altérben fekvő tengelyesen szimmetrikus állandó szélességű konvex lemezt, és $O(d-2)$-szimmetriával megforgatjuk a szimmetriatengelye körül E-ben. A forgatás során söpört E-beli konvex test is nyilván állandó szélességű. (Lehet egyébként nem forgásszimmetrikus állandó szélességű konvex testeket is konstruálni, csak nehézkesebb módon.)

- Könnyen látható, hogy két állandó szélességű konvex test tetszőleges Minkowski-kombinációja is állandó szélességű. Ilyen módon rengeteg újabb példa nyerhető az eddigiekből. Speciális esetként megemlíthetjük, hogy állandó szélességű konvex testek paralleltartományai is állandó szélességűek.

Megjegyzések. (1) A 7.2.6. Tétel következtében minden állandó w szélességű konvex lemeznek ugyanannyi a kerülete, mégpedig $w\pi$. Közöttük a legkisebb területe Blaschke és Lebesgue nevezetes tétele szerint a Reuleaux-háromszögnek van. A legnagyobb területet a körlemez adja, mégpedig nem csak az állandó szélességű konvex lemezek körében, hanem az összes rögzített kerületű konvex lemez között; ez a később bizonyítandó ún. izoperimetrikus egyenlőtlenség (7.6.2. Tétel) kétdimenziós speciális esete.

(2) Kettőnél magasabb dimenzióban jóval kevesebbet tudunk az állandó szélességű konvex testekről; nem ismeretes például a Blaschke–Lebesgue-tétel háromdimenziós megfelelője sem.

7.3. Hausdorff-távolság

Ebben a szakaszban értelmezzük az euklideszi tér részhalmazai között azt a távolságfogalmat, amelynek segítségével a konvex testek egy metrikus tér elemeiként, a 7.1.8-beli approximációs állítások pedig ennek a metrikus térnek a tulajdonságaiként foghatók fel.

7.3.1. Definíció (Hausdorff-távolság). Legyen X tetszőleges metrikus tér. Az $M, N \subseteq X$ nemüres korlátos halmazok Hausdorff-féle távolságán a

$$\rho_H(M,N) = \inf\{\eta \in \mathbf{R} : M \subseteq B(N,\eta) \text{ és } N \subseteq B(M,\eta)\}$$

számot értjük.

7.3.2. Állítás

(1) *$\rho_H(M,N) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\overline{M} = \overline{N}$.*

(2) *Ha $L \subseteq B(M,\xi)$ és $M \subseteq B(N,\eta)$, akkor $L \subseteq B(N,\xi+\eta)$.* □

7.3.3. Következmény. *A ρ_H függvény metrika az X-beli nemüres korlátos zárt halmazok halmazán.* □

Így például az X-beli nemüres kompakt halmazok alkotta $\mathcal{C}(X)$ halmaz is metrikus térré válik a Hausdorff-távolság bevezetésével. Az $X = E$ esetben ennek a térnek nevezetes altereit alkotják a 7.1.7-ben bevezetett $\mathcal{P}^+(E) \subseteq \subseteq \mathcal{K}^+(E) \subseteq \mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{C}(E)$ halmazok.

7.3.4. Állítás. *$\rho_H\big(\overline{B}(K,r), \overline{B}(L,r)\big) = \rho_H(K,L)$ teljesül bármely $K, L \in \in \mathcal{K}(E)$-re és $r > 0$-ra. Más szóval, rögzített $r > 0$ mellett a $K \mapsto \overline{B}(K,r)$ hozzárendelés távolságtartó leképezés a $\big(\mathcal{K}(E), \rho_H\big)$ metrikus térből saját magába.* □

7.3.5. Állítás

(1) *$\mathcal{P}^+(E)$ sűrű részhalmaz $\mathcal{K}^+(E)$-ben.*

(2) *$\mathcal{K}(E)$ zárt részhalmaz $\mathcal{C}(E)$-ben.*

Bizonyítás: (1): Rögtön adódik 7.1.8.(1)-ből.
(2): Ha $C \in \mathcal{C}(E) - \mathcal{K}(E)$, akkor C nem konvex, ezért választhatunk olyan $X, Y \in C$ és $Z \in [X,Y]$ pontokat, hogy $Z \notin C$. A C halmaz zártsága miatt alkalmas $\varepsilon > 0$ számra $B(Z,\varepsilon) \cap C = \emptyset$. Állítjuk, hogy ekkor $C' \in \mathcal{C}(E)$, $\rho_H(C',C) < \varepsilon/2$ esetén a C' halmaz nem lehet konvex. Valóban, C' tartalmaz X-hez és Y-hoz $\varepsilon/2$-nél közelebbi X', illetve Y' pontokat, ezért az $[X',Y']$ szakasz belemetsz a $B(Z,\varepsilon/2)$ halmazba, amely $B(C,\varepsilon/2)$-től, és annál inkább C'-től is diszjunkt. □

7.3.6. Állítás. $\operatorname{diam} : \mathcal{C}(E) \to \mathbf{R}$ *és* $V, A : \mathcal{K}^+(E) \to \mathbf{R}$ *folytonos függvények.*

Bizonyítás: Ha $M, N \subseteq E$ nemüres korlátos halmazok és $M \subseteq B(N,\eta)$, akkor a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $\operatorname{diam} M \leq \operatorname{diam} N + 2\eta$. Emiatt

a diam függvény Lipschitz-egyenlőtlenségnek tesz eleget a 2 számmal mint Lipschitz-konstanssal. Így diam : $\mathcal{C}(E) \to \mathbf{R}$ egyenletesen folytonos.

Legyen $K \in \mathcal{K}^+$, megmutatjuk, hogy a $V : \mathcal{K}^+(E) \to \mathbf{R}$ függvény folytonos a K pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Rögzítsünk egy $O \in \operatorname{int} K$ pontot. Ha $\mu < 1 < \nu$ és $K^- = H_{O,\mu}(K)$, $K^+ = H_{O,\nu}K$, akkor 7.1.4.(2) felhasználásával $V_d(K^+) - V_d(K^-) = (\nu^d - \mu^d) \cdot V_d(K)$, ami ε-nál kisebbé tehető μ és ν alkalmas megválasztásával. Legyen $\delta = \min\{\rho(K^-, E - \operatorname{int} K)\,,\, \rho(K, E - \operatorname{int} K^+)\}$, ekkor K^-, K és K^+ kompaktsága miatt $\delta > 0$ és bármely $L \in \mathcal{K}^+$, $\rho_H(K, L) < \delta$ esetén $K^- \subseteq L \subseteq K^+$ teljesül. Így V_d monotonitását felhasználva $|V_d(K) - V_d(L)| \le V_d(K^+) - V_d(K^-) < \varepsilon$.

Az A függvény folytonosságát szóról szóra ugyanígy lehet belátni azzal a jelentéktelen eltéréssel, hogy a számolásban $\nu^d - \mu^d$ helyett $\nu^{d-1} - \mu^{d-1}$ lép fel. Az utolsó lépésben a 7.1.17-beli monotonitásra hivatkozunk. □

Megjegyzés. Az is könnyen igazolható volna, hogy a $w : \mathcal{K}^+(E) \to \mathbf{R}$ függvény is folytonos (legalábbis $\dim E = 2$ esetén, amikor az átlagos szélességet egyáltalán értelmeztük), de erre a későbbiekben nem lesz szükségünk.

7.3.7. Tétel. *Ha az X metrikus tér kompakt, akkor $\big(\mathcal{C}(X), \rho_H\big)$ is kompakt metrikus tér.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy bármely $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(X)$ végtelen halmaznak létezik torlódási pontja $\mathcal{C}(X)$-ben.

Először rögzítsünk minden $n \in \mathbf{N}$-re egy H_n véges $1/n$-hálót X-ben, azaz olyan $H_n \subseteq X$ véges halmazt, amelyre $B(H_n,1/n) = X$ fennáll. Az X tér kompaktsága miatt ilyen H_n minden n-re választható.

Rekurzióval definiáljuk a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \supseteq \mathcal{C}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{C}_n \supseteq \ldots$ végtelen halmazrendszereket és az $F_n \subseteq H_n$ részhalmazokat úgy, hogy minden $C \in \mathcal{C}_n$-re $\rho_H(C, F_n) < 1/n$ teljesüljön.

Tegyük föl, hogy $n \ge 1$ és már definiáltuk a $\mathcal{C}_{n-1}$ végtelen halmazrendszert. Tekintsük $C \in \mathcal{C}_{n-1}$-re a $H_n \cap B(C,1/n)$ halmazt. Miután $\mathcal{C}_{n-1}$ végtelen és H_n véges, létezik végtelen sok olyan C eleme $\mathcal{C}_{n-1}$-nek, amelyekre $H_n \cap B(C,1/n)$ ugyanaz az $F_n \subseteq H_n$ részhalmaz. Ezek a $\mathcal{C}_{n-1}$-beli elemek alkotják $\mathcal{C}_n$-et. Ha $C \in \mathcal{C}_n$, akkor egyrészt $F_n \subseteq B(C,1/n)$, másrészt mivel a H_n halmaz $1/n$-háló, $C \subseteq B(F_n,1/n)$ is teljesül. Ezért valóban $\rho_H(C, F_n) < 1/n$.

Legyen $n \in \mathbf{N}$-re $Q_n = \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k}$. Állítjuk, hogy minden $C \in \mathcal{C}_n$-re $\rho_H(C, Q_n) \le 3/n$. Valóban, egyrészt $C \subseteq B(Q_n,1/n)$ nyilvánvalóan teljesül, hiszen $\rho_H(C, F_n) < 1/n$ miatt $C \subseteq B(F_n,1/n)$ és $F_n \subseteq Q_n$ miatt $B(F_n,1/n) \subseteq B(Q_n,1/n)$. Másrészt pedig bármely $k \ge n$ esetén tetszőleges $C' \in \mathcal{C}_k$-t választva $\mathcal{C}_k \subseteq \mathcal{C}_n$ miatt $\rho_H(F_n, C') < 1/n$ és így $\rho_H(C, F_k) \le \rho_H(C, F_n) + \rho_H(F_n, C') + \rho_H(C', F_k) < (1/n) + (1/n) + (1/k) \le 3/n$. Emiatt $\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \subseteq B(C,3/n)$ és így $\rho_H(C, Q_n) = \rho_H(C, \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k) \le 3/n$.

Legyen $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$. Kompakt térben nemüres zárt halmazok fogyó sorozatának a metszete nemüres, ezért $F \in \mathcal{C}(X)$. Állítjuk, hogy $\rho_H(Q_n, F) \to 0$ $(n \to \infty)$. Egyrészt $F \subseteq Q_n$ miatt nyilván minden $\eta > 0$-ra $F \subseteq B(Q_n, \eta)$, másrészt ha volna olyan $\eta > 0$, hogy minden n-re $Q_n \nsubseteq B(F, \eta)$ állna, akkor a $Q_n - B(F, \eta)$ nemüres zárt halmazok üres metszetű fogyó sorozatot alkotnának X-ben, ami lehetetlen.

Az eddigiekből következik, hogy a $\mathcal{C}$ halmaznak F torlódási pontja a $\big(\mathcal{C}(X), \rho_H\big)$ metrikus térben, hiszen egyrészt az n természetes számot elég nagynak választva a $\rho_H(Q_n, F)$ távolság tetszőlegesen kicsivé tehető, másrészt $\mathcal{C}$-nek végtelen sok eleme (nevezetesen $\mathcal{C}_n$ elemei) Q_n-től $1/n$-nél kisebb Hausdorff-távolságra van. □

Megjegyzés. Egy metrikus teret teljesen korlátosnak (vagy prekompaktnak) mondunk, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik benne véges ε-háló. Könnyű ellenőrizni, hogy egy metrikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes. A 7.3.7. Tétel bizonyításából kiolvasható, hogy X teljesen korlátos volta, illetve teljessége külön-külön, egymástól függetlenül is maga után vonja $\mathcal{C}(X)$ teljesen korlátos voltát, illetve teljességét.

7.3.8. Következmény (Blaschke kiválasztási tétele). *Ha a $K_n \subseteq E$ $(n \in \mathbf{N})$ nemüres kompakt halmazok mindannyian benne vannak valamilyen E-beli korlátos halmazban (például egy elég nagy gömbtestben), akkor a $\{K_n\}$ sorozatból kiválasztható olyan részsorozat, amely a Hausdorff-metrikára nézve konvergens.* □

7.4. Paralleltartományok térfogata

Ha S konvex n-szög az euklideszi síkban és $r > 0$, akkor a $\overline{B}(S, r)$ paralleltartomány jól áttekinthető módon felbomlik néhány egymásba nem nyúló konvex lemez uniójára. Ebben a felbontásban magán S-en kívül szerepel egyrészt n darab téglalap (melyek egyik oldala S egy oldala, másik oldala r hosszúságú), másrészt n darab r sugarú körcikk, amelyek eltolt példányaival egy körlemez éppen kitölthető. Ebből könnyen nyerhetünk képletet $\overline{B}(S, r)$ területére:

$$V_2\big(\overline{B}(S, r)\big) = \pi \cdot r^2 + k(S) \cdot r + V_2(S)\,.$$

Határátmenettel rögtön látható, hogy ugyanez a formula érvényes S helyett tetszőleges L konvex lemezre. Ennek a szakasznak a célja, hogy ezt a formulát általánosítsuk tetszőleges dimenzióra (l. 7.4.11). Ehhez először tisztázni kell az iménti felbontás magasabb dimenziós általánosítását.

7.4.1. Definíció (Normális kúp). Legyen $K \subset E$ tetszőleges d-dimenziós konvex zárt halmaz és $A \in \partial K$. A K halmaz A-hoz tartozó normális kúpjának nevezzük és $N_K(A)$-val jelöljük a tér azon pontjainak a halmazát, amelyekhez K pontjai közül A van a legközelebb:

$$N_K(A) = \{X \in E \,:\, \rho(X, K) = \rho(X, A)\}.$$

Jelöljük $\overrightarrow{N}_K(A)$-val az $N_K(A)$ halmaz vele egybevágó linearizált változatát, vagyis az $\{\overrightarrow{AX} : X \in N_K(A)\}$ részhalmazt a V vektortérben.

7.4.2. Állítás

(1) *$A, B \in \partial K$, $A \neq B$ esetén $N_K(A) \cap N_K(B) = \emptyset$.*

(2) *$N_K(A)$ az A ponton kívül azokból és csak azokból az $X \in E$ pontokból áll, amelyekre az $\overrightarrow{AX}$ vektor a K halmaz valamely A-t tartalmazó támaszhipersíkjának a K-t nem tartalmazó félterébe mutató normálvektora.*

(3) *$N_K(A)$ zárt konvex kúp az E_A vektortérben (és ugyanígy $\overrightarrow{N}_K(A)$ zárt konvex kúp V-ben).*

Bizonyítás: (1): Valamely $X \in E$ pontra $X \in N_K(A)$ nyilván akkor és csak akkor áll, ha a K halmaz az A pontjától eltekintve az X középpontú, $\rho(X, A)$ sugarú G hipergömbnek teljes egészében a külsejében fekszik. Ezért X az A pontot egyértelműen meghatározza.

(2): Ha $X \in N_K(A)$, akkor az ehhez a G hipergömbhöz tartozó T_AG érintőhipersík K-nak támaszhipersíkja, hiszen ha valamely $B \in K$ pont ennek a hipersíknak az X-et tartalmazó félterébe esne, akkor az $[A, B]$ szakasz belemetszene G belsejébe, ami K konvexitása miatt lehetetlen. Az $\overrightarrow{AX}$ ennek a támaszhipersíknak a kifelé mutató normálvektora. A fordított irányú állítás nyilvánvaló.

(3): Tekintsük az E_A vektortérben a K halmaz A határpontbeli „szögletét”, azaz az A-ból K felé irányuló félegyenesek söpörte

$$K_A = \{C \in E \,:\, \text{létezik olyan } B \in K \text{ és } \varepsilon > 0, \text{ hogy } \overrightarrow{AB} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{AC}\,\}$$

halmazt. A K_A halmaz nyilván konvex kúp E_A-ban. Az E_A euklideszi vektortér duálisát a már korábban (7.3.5-ben) tisztázott módon azonosnak tekintjük magával E_A-val. Ekkor a (2) állítás alapján $N_K(A)$ éppen a K_A poláris kúpja (l. 3.4.12). Tehát 3.4.13.(1)-re hivatkozva $N_K(A)$ valóban zárt konvex kúp. □

Megjegyzés. Ha A csúcsa K-nak, akkor az $N_K(A)$ halmazban nemcsak K_A poláris kúpjára, hanem a 2.5.5-ben használt $C(A)$ kúpra is ráismerhetünk.

7.4.3. Következmények

(1) *Ha $L \subset K$ a K valódi lapja és $A, B \in \operatorname{relint} L$, akkor $N_K(B) = t_{\overrightarrow{AB}}\big(N_K(A)\big)$, és így $\overrightarrow{N}_K(A) = \overrightarrow{N}_K(B)$.*

(2) $E = K \cup \bigcup_{A \in \partial K} N_K(A)$.

(3) *Ha K korlátos, akkor $V = \bigcup_{A \in \partial K} \overrightarrow{N}_K(A)$.*

Bizonyítás: (1): Az A-beli és a B-beli támaszhipersíkok azonosak, és a $t_{\overrightarrow{AB}}$ eltolás önmagukban mozgatja őket, ezért az állítás 7.4.2.(2)-ből következik.

(2): Ha $X \in E - K$, akkor K zártsága miatt létezik benne X-hez legközelebb fekvő $A \in \partial K$ pont, és így $X \in N_K(A)$.

(3): Adott $\mathbf{v} \in V$-vel tetszőlegesen rögzített $O \in E$ origó mellett a $B \mapsto \langle \overrightarrow{OB}, \mathbf{v} \rangle$ folytonos függvénynek a K kompakt halmazon létezik valamely $A \in \partial K$ pontban maximumhelye, ekkor $\mathbf{v} \in \overrightarrow{N}_K(A)$. (Ha $\mathbf{v} \neq 0$, akkor K-nak két $\mathbf{v}$-re merőleges állású támaszhipersíkja van, ezek közül A ahhoz tartozik, amelynek a K-t nem tartalmazó félterébe mutat a $\mathbf{v}$ vektor.) □

7.4.4. Példák

- Ha K egy E-beli d-dimenziós gömbtest, akkor minden $A \in \partial K$-ra $N_K(A)$ az A-ból kifelé induló, ∂K-ra merőleges (azaz sugárirányú) félegyenes.
- Ha K féltér E-ben, akkor minden $A \in \partial K$-ra $N_K(A)$ az A-ból kifelé induló, a határhipersíkra merőleges félegyenes.
- Ha K két (nem párhuzamos hipersíkokkal határolt) zárt féltér metszete, akkor a hipersíkok közös pontjaiban a K-hoz tartozó normális kúp egy (a metszetaltér kétdimenziós ortogonális komplementerében fekvő) zárt szögtartomány.

A következő állítást a poláris kúpra vonatkozó 3.4.14-beli és 3.4.15-beli eredmények átfogalmazásával kapjuk.

7.4.5. Állítás. *Legyen P d-dimenziós konvex poliéder E-ben, $A \in \partial P$ és $A \in \operatorname{relint} L$, ahol $L \in \mathcal{L}(P)$. Ekkor $N_P(A)$ konvex poliéderkúp, $\dim N_P(A) = d - \dim L$, továbbá $\langle L \rangle$ és $\langle N_P(A) \rangle$ ortogonális komplementer alterek az E_A euklideszi vektortérben.* □

7.4.6. Jelölés. Ha $P \subset E$ d-dimenziós konvex poliéder és $L \subset P$ valódi lap, akkor $\overrightarrow{N}_P(L)$ jelöli az $\overrightarrow{N}_P(A) \leq V$ kúpot, ahol $A \in \operatorname{relint} L$. (7.4.3.(1) miatt ez a halmaz nem függ az A pont választásától.)

Nyilván $\emptyset \neq L \leq L' < P$ esetén $\overrightarrow{N}_P(L) \supseteq \overrightarrow{N}_P(L')$.

7.4.7. Állítás. *Legyen $P \subset E$ d-dimenziós konvex poliéder. Ekkor:*

(1) *A P-beli L valódi lapokhoz tartozó V-beli $\overrightarrow{N}_P(L)$ kúpok a tartalmazásra nézve részben rendezett halmazt alkotnak, amely duálisan izomorf a P valódi lapjai alkotta részben rendezett halmazzal (azaz $\big(\mathcal{L}(P) - \{\emptyset, P\}\big)$-vel).*

(2) *Ha P korlátos, akkor $V = \bigcup\{\overrightarrow{N}_P(A) : A \in P$ csúcs$\}$.*

Bizonyítás: (1): Az $L \mapsto N_P(L)$ hozzárendelés 7.4.2.(1) miatt bijektív, és a 7.4.6-beli megállapítás miatt rendezésfordító.

(2): 7.4.3.(3) alapján V-t lefedik a lapokhoz tartozó linearizált normális kúpok. Miután P korlátos, minden valódi lapjának létezik csúcsa. Ezért a 7.4.6-beli megállapítás alapján mindegyik szóban forgó kúp benne van egy csúcshoz tartozó kúpban. Tehát már a csúcsokhoz tartozó linearizált normális kúpok is lefedik V-t. □

7.4.8. Definíció (E normális felbontása). Legyen $P \subset E$ tetszőleges d-dimenziós konvex poliéder. Előállítjuk az E teret véges sok páronként közös belső pont nélküli konvex poliéder egyesítéseként a következőképpen. Minden $L \leq P$ valódi laphoz tekintsük az

$$N_P(L) = \overline{\bigcup_{A \in \operatorname{relint} L} N_P(A)} = \{X \in E \,:\, \rho(X, P) = \rho(X, L)\}$$

halmazt. A 7.4.5. Állítás miatt $N_P(L)$ egybevágó az $\overrightarrow{N}_P(L) \times L$ ortogonális direkt szorzattal, így $N_P(L)$ is d-dimenziós konvex poliéder. Legyen végül az $L = P$ nem valódi lap esetében $N_P(P) = P$.

Ekkor nyilvánvalóan

$$E = \bigcup_{\emptyset \neq L \in \mathcal{L}(P)} N_P(L),$$

továbbá $L \neq L'$ esetén $\operatorname{int} N_P(L) \cap \operatorname{int} N_P(L') = \emptyset$. Ezt az unió-előállítást nevezzük a tér P-hez tartozó normális felbontásának.

7.4.9. Definíció (Paralleltartomány normális felbontása). Az E tér normális felbontása közvetlenül származtatja a benne fekvő d-dimenziós P konvex poliéder bármely paralleltartományának is egy felbontását d-dimenziós konvex zárt részhalmazokra. Legyen $r > 0$ tetszőleges és definiáljuk a $D_P(L, r) \subset E$ és $\overrightarrow{D}_P(L, r) \subset V$ halmazokat a következőképpen:

$$D_P(L, r) = N_P(L) \cap \overline{B}(P, r), \qquad \overrightarrow{D}_P(L, r) = \overrightarrow{N}_P(L) \cap \overline{B}(\mathbf{0}, r),$$

ahol $\overline{B}(P,r)$ a P halmaz r sugarú zárt paralleltartománya E-ben, $\overline{B}(\mathbf{0},r)$ a V-beli r sugarú zárt gömbtest az origó körül, L pedig P egy tetszőleges valódi lapja. Ekkor

$$\overline{B}(P,r) = \bigcup_{\emptyset \neq L \in \mathcal{L}(P)} D_P(L,r),$$

továbbá $L \neq L'$ esetén $\operatorname{int} D_P(L,r) \cap \operatorname{int} D_P(L',r) = \emptyset$. Ezt a felbontást nevezzük a $\overline{B}(P,r)$ paralleltartomány normális felbontásának. Ha L valódi lap, akkor a felbontás L-hez tartozó tagja, $D_P(L,r)$, a $\overrightarrow{D}_P(L,r) \times L$ ortogonális direkt szorzattal egybevágó.

7.4.10. Példák.

- Ha $L \leq P$ hiperlap, akkor $\overrightarrow{D}_P(L,r)$ egy r hosszúságú szakasz, és $D_P(L,r)$ egy L alapú, r magasságú hasáb.
- Ha P korlátos, akkor a $\overline{B}(P,r)$ paralleltartomány normális felbontásából a P csúcsaihoz tartozó tagokat közös kezdőpontba tolva azok együttesen egy r sugarú gömbtest felbontását adják. Ez 7.4.7.(2)-ból és abból következik, hogy ha L a P csúcsa, akkor $D_P(L,r)$ és $\overrightarrow{D}_P(L,r)$ egybevágó.

7.4.11. Tétel (Steiner–Minkowski-tétel). *Bármely $K \in \mathcal{K}^+(E)$ konvex testhez léteznek olyan $m_i(K) \geq 0$ $(i = 0,1,\ldots,d)$ együtthatók, hogy minden $r > 0$-ra*

$$V_d\big(\overline{B}(K,r)\big) = \sum_{i=0}^{d} m_i(K)\, r^i.$$

Az $m_i : \mathcal{K}^+ \to \mathbf{R}$ függvények folytonosak, $m_0 = V_d$, $m_1 = A$ és $m_d = \kappa_d$.

Bizonyítás: Először tegyük föl, hogy $K = P \in \mathcal{P}^+(E)$ politóp és tekintsük a $\overline{B}(P,r)$ paralleltartomány normális felbontását. Ha $L \leq P$ valódi lap, akkor $V_d\big(D_P(L,r)\big) = V_d\big(\overrightarrow{D}_P(L,r) \times L\big) = V_{d-\dim L}\big(\overrightarrow{D}_P(L,r)\big) \cdot V_{\dim L}(L)$, ezzel

$$V_d\big(\overline{B}(K,r)\big) = V_d(P) + \sum_{\emptyset \neq L < P} V_{d-\dim L}\big(\overrightarrow{D}_P(L,r)\big) \cdot V_{\dim L}(L).$$

Itt az $i = d - \dim L$ jelöléssel 7.1.4.(2)-re hivatkozva $V_i\big(\overrightarrow{D}_P(L,r)\big) = V_i\big(\overrightarrow{D}_P(L,1)\big) \cdot r^i$. Ezért legyen

$$m_0(P) = V_d(P), \quad m_i(P) = \sum_{\substack{L \leq P \\ \dim L = d-i}} V_i\big(\overrightarrow{D}_P(L,1)\big) \cdot V_{d-i}(L) \quad (i = 1,\ldots,d-1).$$

Ekkor bármely $P \in \mathcal{P}^+(E)$-re valóban $V_d\big(\overline{B}(P,r)\big) = \sum_{i=0}^{d} m_i(P)\, r^i$.

Legyen most $K \in \mathcal{K}^+(E)$ tetszőleges. Válasszunk egy $P_n \in \mathcal{P}^+(E)$ $(n \in \mathbf{N})$ politópsorozatot, amely K-hoz konvergál a Hausdorff-metrikában. Van olyan R, hogy mindegyik P_n politóp benne van egy R sugarú gömbtestben, ezért bármely $r > 0$ mellett

$$V_d\big(\overline{B}(P_n, r)\big) = \sum_{i=0}^{d} m_i(P_n)\, r^i \le \kappa_d \cdot (R + r)^d.$$

Emiatt minden i-re $m_i(P_n) \le \kappa_d \cdot (R+r)^d / r^i$, azaz az $m_i(P_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat korlátos. Feltehető tehát (alkalmas részsorozatra áttérve), hogy minden i-re konvergens; legyen $m_i(K)$ a határérték. A 7.3.4. Állítást felhasználva

$$\overline{B}(K, r) = \overline{B}(\lim_{n\to\infty} P_n, r) = \lim_{n\to\infty} \overline{B}(P_n, r).$$

Most 7.3.6-ra és a politópokra már bizonyított állításra hivatkozva

$$\begin{aligned} V_d\big(\overline{B}(K, r)\big) &= V_d\big(\lim_{n\to\infty} \overline{B}(P_n, r)\big) = \lim_{n\to\infty} V_d\big(\overline{B}(P_n, r)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{d} m_i(P_n)\, r^i = \sum_{i=0}^{d} m_i(K)\, r^i. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy a $V_d\big(\overline{B}(K, r)\big)$ függvény az r változónak polinomfüggvénye. Miután egy valós polinomfüggvény az együtthatóit egyértelműen meghatározza, következik, hogy az $m_i(K)$ számok valóban csak K-tól és i-től függnek, és attól nem, hogy milyen $P_n \to K$ politópsorozatot választottunk.

Ha d-edfokú valós polinomfüggvények egy sorozata a pozitív számokon pontonként konvergál egy d-edfokú polinomfüggvényhez, akkor az együtthatók is rendre konvergálnak a limeszfüggvény együtthatóihoz. Ebből következik, hogy az m_i függvények folytonosak, hiszen $K_n \to K$ esetén 7.3.4 és 7.3.6 miatt minden $r > 0$-ra $V_d\big(\overline{B}(K_n, r)\big) \to V_d\big(\overline{B}(K, r)\big)$.

Végül az $m_0 = V_d$, $m_1 = A$, $m_d = \kappa_d$ egyenlőségek politópokra rögtön láthatók a normális felbontás 7.4.9-beli és 7.4.10-beli tulajdonságaiból, általános konvex testekre pedig 7.3.5.(1)-ből következnek, mivel a szóban forgó függvények folytonosak. □

7.4.12. Példák

- Legyen K gömbtest E-ben, jelölje r_0 a sugarát. Ekkor a $\overline{B}(K, r)$ paralleltartomány $r_0 + r$ sugarú gömbtest, így a térfogata

$$V_d\big(\overline{B}(K, r)\big) \;=\; (r_0 + r)^d\, \kappa_d \;=\; \sum_{i=0}^{d} \left(\binom{d}{i} r_0^{d-i} \kappa_d \right) r^i\,,$$

  ahonnan $m_i(K) = \binom{d}{i} r_0^{d-i} \kappa_d$ adódik $i = 0, \ldots, d$-re.

- Legyen P d-dimenziós kocka E-ben, jelölje a az élhosszát. A normális felbontást használva meghatározzuk $\overline{B}(P,r)$ térfogatát. Ha L a P egy j-dimenziós valódi lapja, akkor egyrészt $V_j(L) = a^j$, másrészt $\overrightarrow{D}_P(L,r)$ egy $(d-j)$-dimenziós gömbtest 2^{d-j}-edrésze. Ezekből $V_d\big(D_P(L,r)\big) = a^j \kappa_{d-j} r^{d-j}/2^{d-j}$ adódik. Miután a kockának $\binom{d}{j}2^{d-j}$ darab j-dimenziós lapja van, a paralleltartomány térfogata

$$V_d\big(\overline{B}(P,r)\big) \;=\; a^d + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} a^j \kappa_{d-j}\, r^{d-j} \;=\; a^d + \sum_{i=1}^{d} \left(\binom{d}{i} a^{d-i} \kappa_i \right) r^i \,.$$

  Ebből az $m_i(P) = \binom{d}{i} a^{d-i}\kappa_i$ képleteket kapjuk $(i = 1, \ldots, d)$.

Megjegyzés. A 7.4.11. Tételben szereplő $m_i(K)$ $(i = 0,1,\ldots,d-1)$ együtthatók a K konvex test fontos geometriai jellemzői. Megmutatható, hogy ezek az együtthatók bármely K-ra pozitívak. Ez politóp esetén a bizonyításból rögtön látszik, viszont a határátmenet alkalmazásával csak $m_i(K) \geq 0$ adódik közvetlenül. Nevezetes tény, hogy az $m_i(K)\kappa_{d-i}/\binom{d}{i}\kappa_d$ szám a K testnek a $(d-i)$-dimenziós alterekre eső ortogonális vetületei $(d-i)$-dimenziós térfogatainak az átlagával egyenlő. Ennek a tételnek az $i = 1$-re vonatkozó esete a 7.2.8. utáni megjegyzésben már említett Cauchy-féle integrálformula, amely a felszínt állítja elő a hipersíkokra eső vetületek $(d-1)$-dimenziós térfogatainak a segítségével. Az $i = d-1$ eset szerint pedig az $m_{d-1}(K)$ együttható a K halmaz átlagos szélességének a $\big(d \cdot \kappa_d/2\big)$-szerese. A $d = 2$ speciális esetben ezekből újra megkapjuk a 7.2.6. Tételt.

7.4.13. Következmény (Steiner–Minkowski-formula). *Bármely $K \in \mathcal{K}^+(E)$ konvex testre*

$$A(K) = \lim_{r\to 0} \frac{V_d\big(\overline{B}(K,r)\big) - V_d(K)}{r}\,.$$

Bizonyítás: Bármely $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ valós polinomfüggvény esetében a lineáris tag együtthatóját az $a_1 = \lim_{x\to 0}\big(f(x) - a_0\big)/x$ határátmenettel származtathatjuk. Ezt a 7.4.11-beli polinomfüggvényre alkalmazva kapjuk a formulát. □

7.5. Steiner-féle szimmetrizáció

Itt vezetjük be a következő szakaszban bizonyítandó nevezetes geometriai egyenlőtlenségek technikai eszközét. Adott konvex testet egy egyszerű és szemléletes eljárással olyan, vele egyenlő térfogatú konvex testté alakítunk

át, amely egy előre kijelölt hipersíkra szimmetrikus. Az előző szakasz eredményeire támaszkodva megmutatjuk, hogy a felszín az eljárás során nem nő.

7.5.1. Definíció (Kompakt konvex halmaz szimmetrizáltja). Legyen $K \subset E$ kompakt konvex halmaz és $H \subset E$ rögzített hipersík. Jelölje $\pi : E \to H$ az ortogonális vetítést. Bármely $A \in \pi(K)$ pontra az $I_A = K \cap \pi^{-1}(A)$ halmaz (esetleg elfajuló) szakasz. Legyen J_A az I_A szakasznak az az eltoltja, amelynek A a felezőpontja. A K halmaz H-ra vonatkozó Steiner-szimmetrizáltján az

$$S_H(K) = \bigcup_{A \in \pi(K)} J_A$$

halmazt értjük.

Nyilván $\sigma_H\big(S_H(K)\big) = S_H(K) = S_H\big(\sigma_H(K)\big)$, $\sigma_H(K) = K$ esetén $S_H(K) = K$, valamint $K_1 \subseteq K_2$ esetén $S_H(K_1) \subseteq S_H(K_2)$.

7.5.2. Állítás. *Az $S_H(K)$ halmaz is kompakt és konvex.*

Bizonyítás: Nyilván $S_H(K)$ korlátos, belátjuk, hogy zárt. Tegyük fel, hogy az $S_H(K)$-beli X_n pontok sorozata konvergál az $X \in E$ ponthoz, meg kell mutatnunk, hogy $X \in S_H(K)$. Az $A_n = \pi(X_n)$ és $A = \pi(X)$ vetületekre $A_n \to A$ érvényes, így $\pi(K)$ kompaktsága miatt $A \in \pi(K)$. Jelöljük l_n-nel a J_{A_n} szakasz hosszát, valamint l-lel a J_A szakasz hosszát.

Állítjuk, hogy $l \geq \liminf_{n\to\infty} l_n$. Azonosítsuk E-t a $H \times \pi^{-1}(A)$ ortogonális direkt szorzattal. Legyen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett I_A^ε az I_A szakasz ε sugarú nyílt környezete a $\pi^{-1}(A)$ egyenesen. Ekkor található az A pontnak olyan U nyílt környezete H-ban, hogy $K \cap \pi^{-1}(U) \subseteq U \times I_A^\varepsilon$. (Egyébként ugyanis választható volna olyan $P_n = (B_n, C_n) \in H \times \pi^{-1}(A)$ konvergens sorozat K-ból, amelyre $B_n \to A$ és $C_n \notin I_A^\varepsilon$, és ennek a sorozatnak a határértéke $\pi^{-1}(A)$-ban, de nem I_A-ban lenne, ami ellentmondás.) Ezért elég nagy n-re ($A_n \in U$ esetén bizonyosan) $l_n \leq l + 2\varepsilon$. Miután ez minden $\varepsilon > 0$-ra érvényes, valóban $l \geq \liminf_{n\to\infty} l_n$.

Ebből már könnyen következik, hogy $X \in S_H(K)$, hiszen

$$\rho(X, A) = \lim_{n\to\infty} \rho(X, A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} l_n/2 \leq l/2.$$

Az $S_H(K)$ halmaz konvexitásának igazolásához legyenek $X, Y \in S_H(K)$ tetszőleges pontok. Tegyük fel, hogy $X \in J_A$ és $Y \in J_B$. Tekintsük a $\operatorname{conv}\{I_A, I_B\}$ és a $\operatorname{conv}\{J_A, J_B\}$ (esetleg elfajuló) trapézokat. Az utóbbi (szimmetrikus) trapéz lefedi az $[X, Y]$ szakaszt, és éppen az előbbinek a H-ra vonatkozó Steiner-szimmetrizáltja, így része $S_H(K)$-nak. □

Megjegyzések. (1) A fenti bizonyításban szereplő l_n sorozat tulajdonképpen konvergens és a limesze l. Ennek legtömörebb indoklása az, hogy az $A \mapsto l$

hozzárendelés folytonos, hiszen konkáv függvény a $\pi(K)$ halmazon. Többváltozós függvényeket akkor nevezünk konkávnak (vagy konvexnek), ha az egyenesekre történő megszorításaik konkávak (illetve konvexek). Az egyváltozós esethez hasonlóan a konkáv (illetve konvex) függvények folytonosak, sőt majdnem mindenütt differenciálhatók. Ez az észrevétel egyúttal $S_H(K)$ konvexitásának indoklására is alkalmas.

(2) Felmerül a kérdés, vajon a $K \mapsto S_H(K)$ hozzárendelés folytonos-e az E-beli kompakt konvex halmazok (Hausdorff-metrikával ellátott) $\mathcal{K}(E)$ terén. Ez nincs így: legyen E a sík és konvergáljon egy a H egyenesre nem merőleges szakaszokból álló sorozat egy H-ra merőleges szakaszhoz. A szimmetrizált szakaszok H-ban fekszenek és hosszuk 0-hoz tart, így egypontú halmazhoz és nem a merőleges szakasz szimmetrizáltjához konvergálnak. Meggondolható viszont, hogy nemüres belsejű halmazokra szorítkozva a Steiner-szimmetrizáció folytonos $\mathcal{K}^+(E) \to \mathcal{K}^+(E)$ leképezés.

7.5.3. Állítás. $V_d\big(S_H(K)\big) = V_d(K)$.
Bizonyítás: Közvetlenül következik a Cavalieri-elvből. □

7.5.4. Állítás. $diam\,\big(S_H(K)\big) \leq diam\,(K)$.
Bizonyítás: Legyenek $X, Y \in S_H(K)$ tetszőleges pontok, $X \in J_A$ és $Y \in$ $\in J_B$. Tekintsük a $\operatorname{conv}\{I_A, I_B\}$ és $\operatorname{conv}\{J_A, J_B\}$ (esetleg elfajuló) trapézokat. Közülük az utóbbi (szimmetrikus) trapéz átlójának j hossza legfeljebb akkora, mint az előbbi hosszabbik átlójának h hossza. Így $\rho(X, Y) \leq j \leq h \leq$ $\leq \operatorname{diam}(K)$. □

7.5.5. Állítás. *Bármely két $K, L \subset E$ kompakt konvex halmazra és bármely $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ együtthatókra*

$$\lambda S_H(K) + \mu S_H(L) \subseteq S_H(\lambda K + \mu L).$$

Ha E-t valamely $O \in H$ origó választásával vektorizáljuk, akkor ez a $\lambda+\mu = 1$ feltétel elejtésével is érvényes.

Bizonyítás: Nyilván elegendő a vektorizált változatot bebizonyítani. A π : : $E \to H$ leképezés lineáris, emiatt bármely $A, B \in \pi(K)$-ra $\lambda I_A + \mu I_B \subseteq$ $\subseteq I_{\lambda A+\mu B}$, és így $\lambda J_A + \mu J_B \subseteq J_{\lambda A+\mu B}$. (Itt az A, B, illetve $\lambda A + \mu B$ indexszel ellátott J és I halmazok rendre a K, L, illetve $\lambda K + \mu L$ halmaz Steiner-szimmetrizációjához tartoznak.) Ezért $\lambda S_H(K) + \mu S_H(L) = \bigcup_{A \in K, B \in L} \lambda J_A +$ $+ \mu J_B \subseteq \bigcup_{A \in K, B \in L} J_{\lambda A+\mu B} = S_H(\lambda K + \mu L)$. □

Megjegyzés. A 7.5.5-beli tartalmazási reláció általában valódi. Példaként legyen E a sík, K és L két, egymással és a H egyenessel sem párhuzamos szakasz. Ekkor $K + L$ és $S_H(K + L)$ nemüres belsejű konvex lemezek, míg $S_H(K)$, $S_H(L)$ és $S_H(K + L)$ mindannyian H-ban fekvő szakaszok.

7.5.6. Következmény. $\overline{B}\big(S_H(K), r\big) \subseteq S_H\big(\overline{B}(K, r)\big)$.

Bizonyítás: $O \in H$ origó választásával és 12.4 felhasználásával $\overline{B}\big(S_H(K), r\big) = S_H(K) + r\overline{B}^d = S_H(K) + rS_H(\overline{B}^d) \subseteq S_H(K + r\overline{B}^d) = S_H\big(\overline{B}(K, r)\big)$. □

7.5.7. Következmény. $V_d\big(\overline{B}\big(S_H(K), r\big)\big) \leq V_d\big(S_H\big(\overline{B}(K, r)\big)\big)$. □

Megjegyzés. A 7.5.6-beli és a 7.5.7-beli tartalmazási relációkban sem áll általában egyenlőség. Síkbeli példaként K-nak bármely, H-val nem párhuzamos szakasz vehető.

7.5.8. Állítás. *Bármely $K \in \mathcal{K}^+(E)$-re $A\big(S_H(K)\big) \leq A(K)$.*

Bizonyítás: 7.4.13, 7.5.7, 7.5.3, majd ismét 7.4.13 felhasználásával

$$\begin{aligned} A\big(S_H(K)\big) &= \lim_{r\to 0} \frac{V_d\big(\overline{B}\big(S_H(K), r\big)\big) - V_d\big(S_H(K)\big)}{r} \leq \\ &\leq \lim_{r\to 0} \frac{V_d\big(S_H\big(\overline{B}(K, r)\big)\big) - V_d\big(S_H(K)\big)}{r} = \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{V_d\big(\overline{B}(K, r)\big) - V_d(K)}{r} = A(K). \end{aligned}$$ □

7.5.9. Tétel (Blaschke tétele a gömbről). *Legyen $O \in E$ rögzített pont, és legyen $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}^+$ konvex testek olyan rendszere, amely*

(1) *zárt halmaz a $\mathcal{C}(E)$ metrikus térben (a Hausdorff-metrikára nézve) és*

(2) *zárt az O-n áthaladó hipersíkokra vonatkozó Steiner-szimmetrizációkra nézve (azaz $S_H(F) \in \mathcal{F}$, valahányszor $H \subset E$ hipersík, $O \in H$ és $F \in \mathcal{F}$).*

Ekkor az $\mathcal{F}$ halmazrendszer tartalmaz O középpontú gömbtestet.

Bizonyítás: Legyen $r = \inf\{s > 0 :$ létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, hogy $F \subseteq \overline{B}(O, s)\}$. Ekkor $r > 0$, hiszen különben az (1) feltétel miatt $\{O\} \in \mathcal{F}$ következne, ami lehetetlen, mert $\mathcal{F}$ csupa (nemüres belsejű) konvex testből áll. A Blaschke-féle kiválasztási tételt (7.3.8. Következmény) és újra az (1) feltételt alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, amelyre $F \subseteq \overline{B}(O, r)$ (azaz az r-et definiáló infimum tulajdonképpen minimum); rögzítsünk egy ilyen F halmazt.

Azt állítjuk, hogy $F = \overline{B}(O, r)$. Ehhez elég belátni, hogy a $G = \partial\overline{B}(O, r)$ gömb része F-nek, mert F konvex és $\overline{B}(O, r) = \operatorname{conv}(G)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $X \in G - F$ pont. Az $\varepsilon = \rho(X, F)$ távolság F zártsága miatt pozitív. A G halmaz kompaktsága miatt választhatunk véges sok $X = X_0, X_1, \ldots, X_n \in G$ pontot úgy, hogy $G \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B(X_i, \varepsilon)$ teljesüljön.

Vegyük észre, hogy ha H tetszőleges hipersík az O ponton át és U olyan G-beli nyílt halmaz, melyre $F \cap U = \emptyset$, akkor $S_H(F) \cap \big(U \cup \sigma_H(U)\big) = \emptyset$ is teljesül. (Valóban, az $S_H(F)$ szimmetrizáltat alkotó J_A szakaszok közül azok, amelyekre $A \in \pi(U)$, a G gömbnek szigorúan a belsejébe kerülnek.)

Legyen $k = 1, \dots, n$-re H_k az X_0 és X_k pontok felező merőleges hipersíkja, ekkor $O \in H_k$. Legyen $U = G \cap B(X, \varepsilon)$, és $k = 1, \dots, n$-re $U_k = \sigma_{H_k}(U) = G \cap B(X_k, \varepsilon)$. A fenti észrevételt iterálva adódik, hogy minden $k = 1, \dots, n$-re

$$S_{H_k}\big(S_{H_{k-1}}\big(\dots(S_{H_1}(F))\dots\big)\big) \cap \bigcup_{i=0}^{k} U_i = \emptyset.$$

A $k = n$ esetben legyen $F^* = S_{H_n}\big(S_{H_{n-1}}\big(\dots(S_{H_1}(F))\dots\big)\big)$, ekkor a (2) feltételt alkalmazva $F^* \in \mathcal{F}$. Az $\bigcup_{i=0}^{n} U_i$ halmaz viszont G-vel egyenlő, így $F^* \cap G = \emptyset$ adódik. Ez viszont ellentmond az r sugár minimalitásának, hiszen ekkor az F^* halmaz, kompakt lévén, belefér egy r-nél határozottan kisebb sugarú gömbbe. □

7.6. Nevezetes egyenlőtlenségek

7.6.1. Tétel (Izodiametrikus egyenlőtlenség). *Rögzített átmérőjű E-beli konvex testek között a gömbtestnek a térfogata a legnagyobb.*
Egyenértékű átfogalmazással: tetszőleges $K \in \mathcal{K}^+(E)$-re

$$V_d(K) \le \left(\frac{\operatorname{diam}(K)}{2}\right)^d \cdot \kappa_d.$$

Bizonyítás: Az átfogalmazás valóban egyenértékű, mert $(\operatorname{diam}(K)/2)^d \cdot \kappa_d$ éppen annak a gömbtestnek a térfogata, amelynek az átmérője $\operatorname{diam}(K)$.
Legyen $O \in E$ tetszőleges, és tekintsük az

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{K}^+ \,:\, V_d(F) = V_d(K) \text{ és } \operatorname{diam}(F) \le \operatorname{diam}(K)\}$$

halmazrendszert. A 7.5.9. Tétel feltételei közül (1) teljesül 7.3.5.(2) és 7.3.6 miatt, (2) pedig 7.5.3-ból és 7.5.4-ből következik. A tétel alkalmazásával közvetlenül adódik az állítás. □

7.6.2. Tétel (Izoperimetrikus egyenlőtlenség). *Rögzített felszínű E-beli konvex testek között a gömbtestnek a térfogata a legnagyobb.*
Egyenértékű átfogalmazásokkal: tetszőleges $K \in \mathcal{K}^+(E)$-re

$$V_d(K) \le \left(\frac{A(K)}{d \cdot \kappa_d}\right)^{\frac{d}{d-1}} \cdot \kappa_d\,,$$

illetve

$$\left(\frac{V_d(K)}{\kappa_d}\right)^{\frac{1}{d}} \leq \left(\frac{A(K)}{d\cdot\kappa_d}\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Bizonyítás: Az átfogalmazások valóban egyenértékűek, mert az $A(K)$ felszínű gömbtest térfogata éppen $\big(A(K)/(d\cdot\kappa_d)\big)^{d/(d-1)}\cdot\kappa_d$.

Legyen $O\in E$ tetszőleges, és tekintsük az

$$\mathcal{F}=\{F\in\mathcal{K}^+ \,:\, V_d(F)=V_d(K) \text{ és } A(F)\leq A(K)\}$$

halmazrendszert. A 7.5.9. Tétel feltételei közül (1) teljesül 7.3.5.(2) és 7.3.6 miatt, (2) pedig 7.5.3-ból és 7.5.8-ból következik. A tétel alkalmazásával közvetlenül adódik az állítás. □

Megjegyzések. (1) A 7.6.2. Tétel további, jól használható átfogalmazását kapjuk, ha bevezetjük a konvex testek ún. izoperimetrikus hányadosát:

$$q(K)=V_d(K)^{d-1}/A(K)^d.$$

(A kitevők ilyen megválasztásával lesz az izoperimetrikus hányados invariáns a hasonlósági transzformációkra nézve.) A tétel szerint az összes E-beli konvex test között a gömbtesteknek van a legnagyobb izoperimetrikus hányadosa, mégpedig $q(\overline{B}^d)=1/(d^d\kappa_d)$.

(2) A két egyenlőtlenség a konvexitás követelményének elejtése mellett is igaz olyan E-beli kompakt Jordan-mérhető halmazokra, amelyeknek (7.6.2 esetében) van felszíne. Az izodiametrikus egyenlőtlenség ilyen kiterjesztése minden további nélkül következik a 7.6.1. Tételből, hiszen a konvex burokra áttérve a térfogat nem csökken és az átmérő nem változik. Az izoperimetrikus egyenlőtlenség kiterjesztésének egyik akadályát a felszín nem konvex halmazokra vonatkozó szabatos definíciójának nehézségei jelentik. Tegyük fel, hogy a felszínt kielégítően definiáltuk. Szemléletünkre alapítva azt várjuk, hogy a konvex burokra áttérve a felszín nem nőhet. A kétdimenziós esetben ez valóban így is van (és elvezet az egyenlőtlenség kívánt kiterjesztéséhez), viszont már 3 dimenzióban könnyen található olyan ponthalmaz, amelynek a felszíne kisebb a konvex burka felszínénél. Így a 7.6.2. Tétel nem konvex halmazokra való kiterjesztéséhez más módszereket kell használni.

(3) Mindkét tételnek érvényes az a kiegészítése, hogy egyenlőség csak gömbtestek esetében áll fönn. Ez annak a segédtételnek a meggondolása útján igazolható, hogy ha egy konvex test átmérője vagy felszíne bármely hipersíkra vonatkozó Steiner-szimmetrizáció során változatlan, akkor a test szükségképpen gömbtest.

(4) A két egyenlőtlenség itt bemutatott bizonyítása, amely a Steiner-szimmetrizáción és Blaschke tételén alapul, történetileg az elsők közé tartozó, hagyományos bizonyítás. Itt említjük meg a konvex geometria egyik legalapvetőbb tételét, a Brunn–Minkowski-egyenlőtlenséget, amely szerint a térfogat d-edik gyöke konkáv függvény a konvex testek terén. A konkávságot itt a Minkowski-kombinációkra nézve kell érteni, tehát pontos megfogalmazásban a tétel úgy szól, hogy bármely $K, L \in \mathcal{K}^+(E)$-re a [0,1] intervallumon értelmezett $t \mapsto V_d\big((t\,K + (1-t)\,L\big)^{1/d}$ valós függvény konkáv. Ennek a tételnek az alkalmazásával más jellegű, rövid bizonyítás volna adható 7.6.1-re is és 7.6.2-re is.

Projektív geometria

A projektív geometria fogalmait történetileg az az igény hívta életre, hogy a középpontos vetítést (l. 8.3.10) kielégítően kezelni képes matematikai apparátust hozzunk létre. Ezt a célt a projektív geometria eredetileg a tér „végtelen távoli" térelemekkel való kibővítése útján érte el. Mi nem ezt az eljárást alkalmazzuk a projektív tér definíciójában, hanem ennél absztraktabb, lineáris algebrai kiindulást választunk, és majd a 8.4. szakaszban tisztázzuk ennek kapcsolatát a kibővítéses módszerrel. Tételeink zöme tetszőleges test fölötti geometriában is érvényes, ezért a projektív geometria fogalmait is ilyen általánosságban értelmezzük. Később egyes speciális kérdésekben majd a valós vagy a komplex testre fogunk szorítkozni.

8. A projektív tér szerkezete

8.1. Projektív terek és alterek

8.1.1. Definíció (Projektív tér). Legyen $\mathbf{F}$ (kommutatív) test, W vektortér $\mathbf{F}$ fölött. A W vektortér projektivizáltjának (vagy a W-hez asszociált projektív térnek) nevezzük a

$$P = P(W) = W - \{\mathbf{0}\} \big/ \sim$$

faktorhalmazt, ahol a nemzérus $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ vektorokra a $\sim$ ekvivalenciarelációt így értelmezzük:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v}\,, \quad \text{ha alkalmas } \lambda \in \mathbf{F} \text{ mellett } \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}\,.$$

Az ekvivalenciaosztályokat, azaz $P(W)$ elemeit a projektív tér pontjainak nevezzük. Ezek pontosan az egydimenziós alterek W-ben (az origótól megfosztva), ezért szokás a projektív teret az origón átmenő egyenesek terének is tekinteni.

Ugyanezt az ekvivalenciarelációt és osztályozást nyerjük, ha a $W - \{\mathbf{0}\}$ halmazon $\mathbf{F}^*$-nak, az $\mathbf{F}$ test multiplikatív csoportjának a természetes (szorzással történő) hatása szerinti orbitjait tekintjük. Így $P(W) = W - \{\mathbf{0}\}/\mathbf{F}^*$.

Ha $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{w}$-t tartalmazó ekvivalenciaosztályt $[\mathbf{w}]$-vel jelöljük. A $\mathbf{w}$ vektort a $[\mathbf{w}]$ pont reprezentáns vektorának nevezzük.

Ha W véges dimenziós vektortér, akkor a P projektív tér dimenzióján a $\dim W - 1$ számot értjük. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy az általunk vizsgált projektív terek véges dimenziósak. Általában P dimenzióját jelöljük d-vel, tehát $\dim W = d + 1$.

8.1.2. Példák

- Az $\mathbf{F}^{d+1}$ koordinátatér projektivizáltját, $P(\mathbf{F}^{d+1})$-et standard d-dimenziós projektív térnek nevezzük és $\mathbf{P}^d$-vel jelöljük. (A $P^d(\mathbf{F})$ és az $\mathbf{F}P^d$ jelölés is használatos $\mathbf{P}^d$-re.)

- A (-1)-dimenziós projektív tér az üres halmaz, a 0-dimenziós projektív terek egyeleműek. Az egydimenziósakat projektív egyeneseknek, a kétdimenziósakat projektív síkoknak nevezzük.

- Jelölje szokás szerint W^* a W vektortér duális terét. Ekkor az $[\alpha] \longleftrightarrow \operatorname{Ker} \alpha$ megfeleltetés bijekció a $P(W^*)$ projektív tér és a W-beli lineáris hipersíkok halmaza között. A $P(W^*)$ projektív teret a $P(W)$ projektív tér duálisának szokás nevezni, ez tehát az origón átmenő W-beli hipersíkok tere.

- A véges testek fölötti projektív terek (az alábbiakban definiálandó projektív altereiket és projektív transzformációikat tekintve) érdekes példákat szolgáltatnak erős szimmetriatulajdonságokkal bíró kombinatorikai struktúrákra. Egyszerűen leszámlálható, hogy például egy q-elemű test fölötti d-dimenziós projektív térben a pontok száma $(q^{d+1} - 1)/(q - 1)$.

8.1.3. Definíció (Projektív altér). Ha $U \leq W$ tetszőleges lineáris altér, akkor $P(U) \subseteq P(W)$. Az ilyen módon keletkező részhalmazokat nevezzük $P = P(W)$ projektív altereinek.

Az üres halmaz bármely projektív térnek projektív altere, mégpedig az egyetlen (-1)-dimenziós projektív altér. A 0-dimenziós alterek pontosan az egyelemű részhalmazok (amelyeket azonosnak tekintünk a projektív tér pontjaival). Az egydimenziós projektív altereket P-beli egyeneseknek, a k-dimenziósakat k-síkoknak, a $(d-1)$-dimenziósakat hipersíkoknak is nevezzük.

Projektív alterek tetszőleges rendszerének a metszete is projektív altér. Bármely $M \subseteq P$ részhalmazhoz egyértelműen létezik legszűkebb, M-et tartalmazó projektív altér, ezt az M által generált altérnek nevezzük és az $\langle M \rangle$ jellel

jelöljük. Nyilván valamely $A = [\mathbf{w}] \in P$ pont akkor és csak akkor tartozik az $\langle M \rangle$ altérhez, ha a $\mathbf{w}$ vektor lineárisan függ az M elemeit reprezentáló vektoroktól. Például az $A, B \in P$ pontok akkor és csak akkor különbözők, ha reprezentáló vektoraik lineárisan függetlenek. Ilyenkor $\langle A, B \rangle$ az A-n és B-n átfektetett (egyértelműen létező) projektív egyenest jelöli.

Rögtön látható, hogy P összes projektív altere hálót alkot, amelyben a 0 elem az üres altér, az 1 elem az egész P, a műveleteket pedig az $S \wedge T = S \cap T$, $S \vee \vee T = \langle S \cup T \rangle$ formulák adják. Ez a háló nyilvánvalóan azonos a W vektortér altérhálójával.

8.1.4. Példa. Feleltessük meg a W vektortér tetszőleges $U \leq W$ alterének a W^* duális vektortérben az $U^\perp = \{\alpha \in W^* : \alpha|_U = 0\}$ alteret (azaz U „annullátorát"). Ez az $U \mapsto U^\perp$ leképezés bijektív és rendezésfordító, inverze az a $V \mapsto V^\perp$ hozzárendelés, amelynél $V^\perp = \bigcap_{\alpha \in V} \operatorname{Ker} \alpha \leq W$. Így tehát W és W^* altérhálói természetes módon duálisan izomorfak. Emiatt ugyanez érvényes a $P(W)$ projektív tér és a $P(W^*)$ duális projektív tér altérhálójára. Ennél a duális izomorfizmusnál k-dimenziós $P(W)$-beli projektív altereknek $(d-k-1)$-dimenziós projektív alterek felelnek meg $P(W^*)$-ban.

Például a $P(W^*)$ projektív tér egyenesei a $P(W)$-beli hipersíksorok, azaz hipersíkok olyan halmazai, amelyek valamely rögzített $P(W)$-beli $(d-2)$-dimenziós alteret tartalmazó összes hipersíkból állnak. A hipersíksort sugársornak nevezzük, ha $d = 2$, azaz ha egyenesekből áll.

Legyen most $d = 2$ és tekintsünk egy $P = P(W)$ projektív síkot és annak $P^* = P(W^*)$ duálisát. A P^*-beli pontok azonosak a P-beli egyenesekkel, a P^*-beli egyenesek pedig a P-beli sugársorokkal. Nem vezet félreértésre, ha egy „A és L illeszkednek egymásra" típusú állítást akár úgy értünk, hogy az A pont illeszkedik az L egyenesre, akár úgy, hogy az L egyenes illeszkedik az A tartópontú sugársorhoz, hiszen mindkét megfogalmazás ugyanazt jelenti. Ezért a P-beli sugársorokat az illeszkedési viszonyok szempontjából azonosíthatjuk a P-beli pontokkal. Így a P^* duális projektív sík egyenesei azonosak P pontjaival.

Ebben az utolsó azonosítási lépésben ráismerhetünk a kétszeres dualizálással kapott W^{**} vektortérnek az eredeti W vektortérrel való természetes izomorfiájára: valójában a $P(W^{**})$ projektív teret $P(W)$-vel azonosnak tekintettük.

8.1.5. Állítás (Dimenzióformula). *Tetszőleges $S, T \subseteq P$ projektív alterekre*

$$\dim\langle S \cup T \rangle + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T.$$

Bizonyítás: Ha $P = P(W)$, $S = P(U)$ és $T = P(V)$, ahol $U, V \leq W$ lineáris alterek, akkor $\dim\langle S \cup T \rangle = \dim(U+V) - 1$, $\dim(S \cap T) = \dim(U \cap V) - 1$, $\dim S = \dim U - 1$ és $\dim T = \dim V - 1$ miatt elég a $\dim(U+V) + \dim(U \cap \cap V) = \dim U + \dim V$ „lineáris" dimenzióformulát ellenőrizni. Ez pedig rögtön

adódik abból, hogy ha az $U \cap V$ altér egy bázisát külön-külön kiegészítjük egy-egy bázissá U-ban és V-ben, akkor ezek a vektorok együttesen bázist alkotnak az $U + V$ altér számára. □

A dimenzióformula közvetlen következménye például az a projektív síkgeometriára nézve jellegzetes tulajdonság, hogy a projektív síkon bármely két különböző egyenesnek létezik egyetlen közös pontja. Felsorolunk még néhány, a dimenzióformulából azonnal levezethető állítást, amelyek közül egyik-másik később is szerepet játszik majd (l. 8.3.4, 8.3.10).

8.1.6. Következmények.

(1) *P-ben d darab hipersíknak mindig van közös pontja.*

(2) *Ha $\dim S + \dim T \geq d$, akkor $S \cap T \neq \emptyset$.*

(3) *Ha $S \cap T = \emptyset$ és $\dim S + \dim T = d - 1$, akkor az S alteret hipersíkként tartalmazó (és így $(\dim S + 1)$-dimenziós) P-beli projektív alterek halmaza és T között bijektív leképezést létesít az $L \mapsto L \cap H$ ($L \subseteq P$ altér, $\dim L = \dim S + 1$, $S \subset L$) megfeleltetés. Az inverz leképezést az $X \mapsto \langle S, X \rangle$ ($X \in T$) formula adja.*

Speciálisan:

(4) *Ha $H \subset P$ hipersík és $A \in P - H$ tetszőleges pont, akkor az A ponton áthaladó P-beli egyenesek halmaza és H között bijektív leképezést létesít az $L \mapsto L \cap H$ ($L \subseteq P$ egyenes, $A \in L$) megfeleltetés. Az inverz leképezést a $B \mapsto \langle A, B \rangle$ ($B \in H$) formula adja.* □

8.2. Koordináták

Következő célunk az, hogy koordinátákat és koordinátarendszert vezessünk be a projektív tereken. Ez távolról sem olyan egyszerű, mint az affin tér vagy az euklideszi tér esetében: a koordinátarendszerrel szembeni szokásos elvárásainkból mindenképpen engedményeket kell tennünk. Ha meg akarjuk őrizni a koordinátarendszernek az elemi geometriában megszokott egyegyértelműségi tulajdonságát, a tér valódi részhalmazaira kell szorítkoznunk (hipersíkok komplementereire, l. 8.2.1–8.2.4) és az egész tér leírásához kénytelenek vagyunk egynél több koordinátarendszert egyszerre használni. Ez vezet el minket a 8.2.2-ben bevezetendő „atlasz” fogalmához. Ha viszont ahhoz ragaszkodunk, hogy egyetlen koordinátarendszerrel kezeljük a teret, akkor azzal a jelenséggel kell együtt élnünk, hogy a pont nem határozza meg egyértelműen a koordinátáit, l. 8.2.5.

Ha $P = P(W)$ projektív tér és $H \subset P$ hipersík, akkor a P projektív tér struktúrájából kanonikus eljárással lehet affin struktúrát származtatni a $P - H$ komplementer halmazon. Nem könnyű megmondani, hogy mely V vektortérre kell ezt az affin struktúrát építeni ahhoz, hogy az eljárás „természetes" legyen, tehát V ne függjön további választásoktól, például bázis kijelölésétől W-ben.

8.2.1. Állítás. *Legyen $U < W$ lineáris hipersík és jelölje X a $P(U)$ projektív hipersík komplementerét a $P(W)$ projektív térben. Jelöljük V-vel a d-dimenziós* $\mathrm{Hom}\,(W/U, U)$ *vektorteret. Ekkor a*

$$\varphi[\mathbf{w}] = [\varphi(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}] \qquad (\varphi \in V,\ [\mathbf{w}] \in X\ )$$

formula a V vektortér additív csoportjának egyszeresen tranzitív hatását definiálja az X halmazon.

Bizonyítás: Nyilván $\varphi = \mathbf{0}$-ra $\mathbf{0}[\mathbf{w}] = [\mathbf{0}(U + \mathbf{w})] + \mathbf{w}] = [\mathbf{w}]$. Ha $\varphi, \psi \in V$, akkor $\psi(\varphi[\mathbf{w}]) = \psi[\varphi(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = [\psi\big(U + \varphi(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}\big) + \varphi(U + \mathbf{w}) + {}$ $+ \mathbf{w}] = [\psi(U + \mathbf{w}) + \varphi(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = [(\psi + \varphi)(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = (\psi + \varphi)[\mathbf{w}]$ mutatja, hogy valóban csoporthatásról van szó.

A tranzitivitás ellenőrzéséhez vegyük észre, hogy ha $[\mathbf{w}_1], [\mathbf{w}_2] \in X$ tetszőlegesen adott elemek, akkor egyrészt $\mathbf{w}_2$-nek létezik olyan $\mathbf{w}_2'$ skalárszorosa, hogy $\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_1 \in U$, másrészt $U + \mathbf{w}_1$ a W/U egydimenziós vektortér nemzérus eleme, ezért létezik olyan $\varphi : W/U \to U$ lineáris leképezés, melyre $\varphi(U + \mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_1$. Ezekkel $\varphi[\mathbf{w}_1] = [\varphi(U + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_1] = [\mathbf{w}_2'] = [\mathbf{w}_2]$.

Végül egy $\varphi \in V$ vektor pontosan akkor tartozik a $[\mathbf{w}]$ elem stabilizátorához, ha $[\varphi(U + \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = [\mathbf{w}]$, azaz ha a $\varphi(U + \mathbf{w})$ vektor és a $\mathbf{w}$ vektor lineárisan összefüggők. Viszont $\varphi(U + \mathbf{w}) \in U$, ugyanakkor $\mathbf{w}$ független az U altértől, így ez csak $\varphi(U + \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\varphi = \mathbf{0}$ esetén lehetséges. □

8.2.2. Definíció (Természetes affin struktúra). Ha $H = P(U)$ tetszőleges hipersík a $P = P(W)$ projektív térben, akkor a 8.2.1-beli csoporthatás affin térré teszi a $P - H$ halmazt. Az ehhez tartozó affin struktúrában valamely A, $B \in P - H$ pontok közötti $\overrightarrow{AB} \in V$ vektort a következőképpen határozhatjuk meg:

Válasszunk olyan $\mathbf{w}$, $\mathbf{z} \in W$ reprezentáns vektorokat A, illetve B számára, amelyek ugyanabban az U szerinti $U' = U + \mathbf{w} = U + \mathbf{z}$ mellékosztályban vannak (ez lehetséges, mert A-t is és B-t is U-tól független vektorok reprezentálják és a W/U faktortér egydimenziós), majd legyen $\overrightarrow{AB} = \varphi : W/U \to U$, melyre $\varphi(U') = \mathbf{z} - \mathbf{w}$. Ekkor a 8.2.1. szerinti hatásnál valóban $\varphi[\mathbf{w}] = [\varphi(U + {}$ $+ \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = [\varphi(U') + \mathbf{w}] = [(\mathbf{z} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}] = [\mathbf{z}]$.

Ezt az affin struktúrát a $P - H$ halmaz természetes affin struktúrájának nevezzük.

8.2.3. Példa. Legyen $X \subset W$ affin hipersík, melyre $\mathbf{0} \notin X$. Jelöljük V-vel azt a W-beli lineáris hipersíkot, amelynek X eltoltja, azaz $V = \overrightarrow{X}$. Ekkor a $\mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}]$ ($\mathbf{w} \in X$) megfeleltetés nyilvánvalóan bijektív módon képezi az X halmazt a $P(V)$ hipersík $P(W)$-beli komplementerére. Megmutatjuk, hogy ha X-et ennek a bijekciónak a segítségével azonosnak tekintjük a $P(W) - P(V)$ halmazzal, akkor X-nek a W vektortérből örökölt affin struktúrája megegyezik a 8.2.2-ben definiált természetes affin struktúrával.
Először is a $\mathrm{Hom}\,(W/V, V)$ vektorteret most azonosnak tekinthetjük V-vel, miután a W/V egydimenziós faktortérnek van egy kitüntetett nemzérus eleme, mégpedig az X mellékosztály. A két vektortér azonosítását a $\varphi \mapsto \varphi(X)$ megfeleltetés adja.
Ezután tetszőleges $\mathbf{w}$, $\mathbf{z} \in X$-re egyrészt a W-ből örökölt affin struktúrában $\overrightarrow{\mathbf{wz}} = \mathbf{z} - \mathbf{w} \in V$, másrészt 8.2.2 szerint $\overrightarrow{[\mathbf{w}][\mathbf{z}]}$ az a $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(W/V, V)$ vektor, melyre $\varphi(X) = \mathbf{z} - \mathbf{w}$. Tehát a fenti azonosítás mellett valóban $\overrightarrow{[\mathbf{w}][\mathbf{z}]} = \mathbf{z} - \mathbf{w}$. □

8.2.4. Definíció (Térkép, atlasz). A P projektív téren térképnek nevezünk egy tetszőleges $\mathbf{x} : P - H \to \mathbf{F}^d$ affin koordinátarendszert, ahol $H \subset P$ projektív hipersík és a $P - H$ halmazt a természetes affin struktúrájával ellátott affin térnek tekintjük.

Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{d+1} \subset P$ olyan hipersíkok, hogy $\bigcap_{i=1}^{d+1} H_i = \emptyset$. (Ha például $P = P(W)$ és a W^* duális vektortérben α_1, α_2, …, α_{d+1} bázis, akkor a $H_i = P(\mathrm{Ker}\,\alpha_i)$ hipersíkok ilyenek.) Válasszunk minden i-re egy-egy $\mathbf{x}_i : P - H_i \to \mathbf{F}^d$ térképet, akkor ezek értelmezési tartományai együtt lefedik az egész P-t. Ilyenkor az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_{d+1}$ térképek rendszerét P-beli atlasznak nevezzük.

Megjegyzés. Az atlasz fogalma a geometriai tér modern matematikai felfogásának, a geometriai sokaság definíciójának fontos alkotóeleme. A szóban forgó geometriát az határozza meg, milyen tulajdonságai vannak az egyes térképpárok közti ún. átmenetfüggvényeknek, azaz azoknak a leképezéseknek, amelyek meghatározzák, hogy a tér egy darabján használt két különböző koordinátarendszer hogyan kapcsolódik egymáshoz, milyen geometriai viszonyban áll. Ha az átmenetfüggvények valamely ismert transzformációtípushoz tartoznak, akkor a koordinátatér minden olyan lokális geometriai tulajdonsága, amelyet ezek a transzformációk megőriznek, átvihető a sokaságra. Ez az elv teszi lehetővé, hogy geometriai jellegű struktúrával ruházzunk föl topologikus sokaságokat, és beszélhessünk például differenciálható, komplex, affin, euklideszi, gömbi, projektív, stb. sokaságokról. A projektív tér fenti atlaszának átmenetfüggvényeit a 8.2.6. Példában vizsgáljuk meg.

8.2.5. Definíció (Homogén koordináták). Rögzítsünk egy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázist W-ben. Ha $A = [\mathbf{w}] \in P$ tetszőleges pont, akkor $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d+1} x_i \mathbf{a}_i$ esetén az x_1, x_2, …, $x_{d+1} \in \mathbf{F}$ skalárokat az A pontnak a rögzített bázisra vonatkozó homogén koordinátáinak nevezzük. A bázis rögzítésével W-t azonosítottuk a $\mathbf{F}^{d+1}$ koordinátatérrel, ennek alapján a $\mathbf{w} = (x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ és $A = [x_1 : x_2 : \ldots : x_{d+1}]$ jelöléseket is használjuk.

Látható, hogy nincs olyan P-beli pont, amelynek mindegyik homogén koordinátája 0 volna. A (0,0,…,0)-n kívül viszont bármely testelem-$(d+1)$-es előáll alkalmas (egyértelműen meghatározott) P-beli pont homogén koordinátáiként. Valamely P-beli pont a homogén koordinátáit nem egyértelműen határozza meg, csak arányosság erejéig. Nincs értelme például valamely pont i-edik homogén koordinátájának konkrét értékéről beszélni. Az viszont értelemmel bír, ha egy pont valamelyik koordinátájának zérus vagy nemzérus voltáról beszélünk, hiszen ez a tulajdonság egyformán van érvényben a pont összes reprezentáns vektorára vonatkozóan.

8.2.6. Példa. Tekintsük a $\mathbf{P}^d = P(\mathbf{F}^{d+1})$ standard projektív térben az $\mathbf{F}^{d+1}$-beli standard bázishoz tartozó α_1, α_2, …, α_{d+1} duális bázis által meghatározott $H_i = P(\operatorname{Ker} \alpha_i)$ koordináta-hipersíkokat ($i = 1,2,\ldots,d+1$), és ezek komplementereit a természetes affin struktúrával ellátva. Minden i-re a H_i-hez nem tartozó $\mathbf{P}^d$-beli pontok egyértelműen reprezentálhatók olyan F^{d+1}-beli vektorral, amelynek az i-edik koordinátája 1-gyel egyenlő. Emiatt az i-edik koordináta elhagyásával nyert

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i \,:\, \mathbf{P}^d - H_i \quad &\to \quad \mathbf{F}^d \\ [x_1 : x_2 : \ldots : x_{d+1}] \quad &\mapsto \quad \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{d+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

leképezés térkép $\mathbf{P}^d$-n. Rögtön látható, hogy $\mathbf{x}_i$ inverzét az

$$\mathbf{x}_i^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_i : \ldots : x_d]$$

formula adja. Az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_{d+1}$ atlaszt a $\mathbf{P}^d$ projektív tér standard atlaszának nevezzük.

Meghatározzuk a standard atlaszhoz tartozó átmenetfüggvényeket, azaz $i < j$-re az $\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1} : \mathbf{F}^d \to \mathbf{F}^d$ kompozíciókat, amelyek nem az egész $\mathbf{F}^d$ téren, hanem csak az $\mathbf{x}_i(H_j) \subset \mathbf{F}^d$ affin hipersík komplementerén vannak értelmezve. Esetünkben ez azokat az $\mathbf{F}^d$-beli pontokat jelenti, amelyek j-edik koordinátája különbözik 0-tól. Tegyük föl, hogy $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbf{F}^d$ és $x_j \neq 0$, ekkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= \mathbf{x}_j\big([x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_i : \ldots : x_d]\big) = \\ &= \left(\frac{x_1}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}}, \frac{1}{x_{j-1}}, \frac{x_i}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{j-2}}{x_{j-1}}, \frac{x_j}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_d}{x_{j-1}} \right). \end{aligned}$$

Látható, hogy a képletben szereplő függvények egyszerű szerkezetűek: a koordináták hányadosai. Megjegyezzük, hogy a standard atlasz helyett tetszőleges atlaszt használva is csak a koordináták ún. törtlineáris függvényei (azaz: legfeljebb elsőfokú polinomfüggvények hányadosai) szerepelhetnének a képletekben, hiszen más affin koordinátákra való áttérés inhomogén lineáris helyettesítést jelent.

Vizsgáljuk meg külön a $d = 1$ speciális esetet. Ilyenkor két térképet, $\mathbf{x}_1$-et és $\mathbf{x}_2$-t használunk és az $\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1} : \mathbf{F} - \{0\} \to \mathbf{F}$ leképezés képlete $(\mathbf{x}_2 \circ \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x) = 1/x$. Emiatt a $\mathbf{P}^1$ projektív egyenest felfoghatjuk olyan alakzatként, amelyet az $\mathbf{F}$ alaptest két példányából állítunk elő az $x \mapsto 1/x$ leképezés mentén történő összeragasztással.

8.2.7. Definíció (Természetes topológia). Tegyük fel, hogy az alaptest $\mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$. Ekkor a W vektortér természetes topológiájából a faktortopológia képzése útján a $P(W)$ projektív tér is topologikus térré válik; ezt a topológiát nevezzük a valós, illetve komplex projektív tér természetes topológiájának.

Érdekes jelenség, hogy a valós és a komplex projektív terek topológiai (elsősorban algebrai topológiai) szerkezete az affin vagy euklideszi terekénél jóval bonyolultabb.

Az alábbi topológiai természetű észrevételek könnyen meggondolhatók.

- A térképek homeomorf módon képezik a hipersíkok komplementereit a koordinátatérre. Más szóval, a hipersík-komplementerek természetes affin struktúrájához tartozó természetes topológia azonos a projektív tér természetes topológiájának a megszorításával.

- A $P^1(\mathbf{R})$ valós projektív egyenes homeomorf az $\mathbf{S}^1$ körvonallal, a $P^1(\mathbf{C})$ komplex projektív egyenes homeomorf az $\mathbf{S}^2$ gömbfelülettel (Riemann-féle számgömb, l. 8.4.3). Mindkét esetben az affin egyenesnek mint topologikus térnek az egypontos kompaktifikációjáról van szó.

- Rögzítsünk W-ben egy pozitív definit bilineáris, illetve Hermite-féle formát és jelöljük ki az ehhez tartozó $S \subset W$ egységsugarú hipergömböt. Ekkor S metszi az összes W-beli egydimenziós lineáris alteret (mégpedig a valós esetben egy átellenes pontpárban, a komplex esetben egy főkörben), emiatt $P(W)$ előáll az S gömb faktoraként. Az S topológiájából származó faktortopológia azonos $P(W)$ természetes topológiájával. Emiatt $P(W)$ kompakt.

- A valós esetben az $S \to P(W)$ faktorizáló leképezés kétrétegű fedés. A W euklideszi vektortér egységgömbje $\dim W \geq 3$ esetén egyszeresen összefüggő, emiatt $d \geq 2$ estén $P^d(\mathbf{R})$ fundamentális csoportja kételemű. A csoport nemtriviális elemét bármelyik projektív egyenes (mint

$P^d(\mathbf{R})$-beli hurok) reprezentálja. Ha $d = 3$, az $S = \mathbf{S}^3$ gömbön az átellenes párok szerinti faktorizálás 4.5.11 alapján az $SO(3)$ topologikus csoportot eredményezi. Ezért $P^3(\mathbf{R})$ homeomorf $SO(3)$-mal.

- A valós projektív geometriában az elválasztási (azaz összefüggőségi) tulajdonságok eltérnek az affin vagy az euklideszi geometriában megszokottól. Például egy hipersík a teret nem vágja ketté, hiszen komplementere affin tér, ami összefüggő. Ezzel összhangban a projektív egyenesen egyetlen pont nem képes két másikat egymástól elválasztani. Ezért a szakasz fogalma sem értelmezhető olyan módon, hogy a szakaszt a két végpontja egyértelműen meghatározza. Az egyenest két pontja két szakaszra bontja (ahogyan a körvonalat két pontja két körívre bontja). A valós projektív egyenesre vonatkozó helyes elválasztásfogalom az egyenes pontpárjai között fellépő reláció: az $\{A, B\}$ pontpár elválasztja a $\{C, D\}$ pontpárt, ha C és D az A és B által meghatározott két különböző nyílt szakaszra esik. Ezáltal az elválasztást mint szimmetrikus relációt tudjuk értelmezni az egyenes különböző pontokból álló rendezetlen pontpárjainak a halmazán.

- A komplex esetben az $S \to P(W)$ faktorizáló leképezésnél a pontok ősképei a Clifford-párhuzamos főkörök 4.7.13-ban tárgyalt seregét alkotják S-ben. Speciálisan a komplex projektív egyenes esetében olyan szürjektív, folytonos $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$ leképezésről van szó (az ún. Hopf-leképezésről), amelynél a pontok inverz képei egy Hopf-féle körrendszer tagjai. Ismeretes, hogy (a valós esettel ellentétben) a $P^d(\mathbf{C})$ terek egyszeresen összefüggők.

A 8.2.5. Definíció alapján a projektív térben homogén koordináták bevezetéséhez nem elegendő a tér bizonyos pontjait mint koordinátarendszert rögzíteni, hanem ki kell tüntetni azok konkrét reprezentáns vektorait (azaz fel kell venni egy bázist a W vektortérben). Ettől a kényelmetlenségtől meg tudunk szabadulni annak az árán, hogy a koordinátarendszerben eggyel több pontot szerepeltetünk.

8.2.8. Definíció (Projektív bázis). Tegyük fel, hogy $d \geq 1$. A d-dimenziós $P = P(W)$ projektív térben projektív bázisnak nevezzük a $(d+2)$-elemű A_0, A_1, …, $A_{d+1} \in P$ pontrendszert, ha létezik a W vektortérben olyan $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázis, hogy $i = 1, \ldots, (d+1)$-re $A_i = [\mathbf{a}_i]$ és $A_0 = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{d+1}]$.

Szokás az A_1, …, A_{d+1} pontokat a projektív bázis alappontjainak, az A_0 pontot egységpontnak nevezni.

8.2.9. Lemma. *Tegyük föl, hogy az A_0, A_1, …, $A_{d+1} \in P$ projektív bázishoz a 8.2.8. Definícióbeli $\mathbf{a}_i$ vektorok mellett az $\mathbf{a}'_i$ $(i = 0, \ldots, d+1)$ vektorrendszer is megfelel az ottani követelményeknek. Ekkor alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}^*$ skalárral minden $i = 0, \ldots, (d+1)$ -re $\mathbf{a}'_i = \lambda \mathbf{a}_i$.*

Bizonyítás: Léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1} \in \mathbf{F}^*$ skalárok, hogy $\mathbf{a}'_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$ $(i = 1, \ldots, d+1)$. Ezen kívül $[\mathbf{a}'_1 + \ldots + \mathbf{a}'_{d+1}] = A_0 = [\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_{d+1}]$ miatt létezik olyan $\lambda \in \mathbf{F}^*$, hogy $\mathbf{a}'_1 + \ldots + \mathbf{a}'_{d+1} = \lambda(\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_{d+1})$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{d+1}\mathbf{a}_{d+1} = \lambda \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda \mathbf{a}_{d+1}$, és miután $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázis, innen $\lambda_i = \lambda$ $(i = 1, \ldots, d+1)$ következik. □

8.2.10. Definíció (Projektív koordináták). Rögzítsük a P projektív térben az A_0, A_1, …, A_{d+1} projektív bázist. Egy tetszőleges P-beli pontnak erre a projektív bázisra vonatkozó projektív koordinátáin a pont homogén koordinátáit értjük valamely, a 8.2.8. Definíció szerint választott W-beli $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázisra vonatkozóan.

A 8.2.9. Lemma és a 8.2.5. Definíció alapján a P-beli pontok arányosság erejéig egyértelműen határozzák meg projektív koordinátáikat.

8.2.11. Definíció (Független pontrendszer). Egy $P(W)$-beli pontrendszert (projektív értelemben) függetlennek mondunk, ha elemei lineárisan független W-beli vektorokkal reprezentálhatók. Nyilván ilyenkor tetszőleges reprezentáns vektorokat választva azok lineárisan függetlenek.

A lineáris függetlenség jól ismert tulajdonságaiból következően az A_1, A_2, …, A_{k+1} pontrendszer akkor és csak akkor független, ha az általa kifeszített projektív altér k-dimenziós, illetve ha a pontok egyike sincs benne a többi pont által kifeszített projektív altérben.

Megjegyezzük, hogy projektív térben egy maximális független pontrendszer nem alkot projektív bázist.

8.2.12. Állítás. *Egy $(d+2)$-elemű P-beli pontrendszer akkor és csak akkor projektív bázis, ha minden $(d+1)$-elemű része független.*

Bizonyítás: Ha $A_i = [\mathbf{a}_i]$ $(i = 1,2, \ldots, d+1)$ egy projektív bázis alappontjai és $\mathbf{a}_0 = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_i$ reprezentálja az A_0 egységpontot, akkor egyrészt definíció szerint az $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ vektorok bázist alkotnak W-ben, másrészt nyilván ugyancsak bázist kapunk, ha valamelyik $\mathbf{a}_i$-t kicseréljük az $\mathbf{a}_0$ vektorral.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $A_i = [\mathbf{a}_i]$ $(i = 1,2, \ldots, d+1)$ pontrendszer minden $(d+1)$-elemű részrendszere független. Ekkor $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázis W-ben és $\mathbf{a}_0 = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{a}_i$ alkalmas $\lambda_i \neq 0$ együtthatókkal. Cseréljük ki $i = 1, \ldots, (d+1)$ -re mindegyik $\mathbf{a}_i$-t $\lambda_i \mathbf{a}_i$-vel, ezzel az A_0, A_1, …, A_{d+1} pontokat a 8.2.8. Definíció követelményeinek eleget tevő vektorokkal reprezentáltuk. □

Ennek a szakasznak a hátralevő részében az alaptest megváltoztatásának kérdésével foglalkozunk. Bár általában a szóban forgó projektív terek egy rögzített alaptest felett vannak értelmezve, és ez a test mindvégig változatlan marad, mégis bizonyos kérdésekben hasznos lesz tisztázni, milyen viszonyban áll két projektív tér, ha a hozzájuk tartozó alaptestek közül az egyik részteste a másiknak. A alkalmazásokban ez a szituáció a leggyakrabban a valós és a komplex számtest viszonylatában fordul elő, ezért ezt az esetet alaposabban is megvizsgáljuk.

Legyen tehát az $\mathbf{F}$ test a $\mathbf{G}$ részteste. A $\mathbf{G}$ fölötti vektortereket automatikusan $\mathbf{F}$ fölötti vektortereknek is tekinthetjük. Ugyanezt a vektorterek projektivizáltjairól már nem mondhatjuk, hiszen az ekvivalenciareláció, amelyet a projektív tér származtatásában bevezetünk, különböző a kétféle test esetében. A $\mathbf{G}$ fölötti projektív terekben viszont ki tudunk jelölni bizonyos részhalmazokat, amelyeket $\mathbf{F}$ fölötti projektív tereknek tekinthetünk.

8.2.13. Definíció (Résztér). Legyen $P = P(W)$ projektív tér a $\mathbf{G}$ test fölött, $d = \dim P$, azaz $d + 1 = \dim_{\mathbf{G}} W$. Válasszunk P-ben egy A_0, A_1, …, A_{d+1} projektív bázist és a hozzá tartozó $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{d+1} \in W$ vektorrendszert (amely bázis W-ben $\mathbf{G}$ fölött). Ezek a vektorok $\mathbf{F}$ fölött is lineárisan függetlenek, ezért az $\mathbf{F}$-beli együtthatókkal vett lineáris kombinációik egy $(d+1)$-dimenziós $V \subseteq W$ vektorteret alkotnak $\mathbf{F}$ fölött. Ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$-ra $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ valamilyen $\lambda \in \mathbf{G}$-vel, akkor könnyen ellenőrizhető módon csak $\lambda \in \mathbf{F}$ lehetséges. A $V - \{\mathbf{0}\}$ halmazra szorítkozva tehát az $\mathbf{F}$ fölötti ekvivalenciareláció azonos a $\mathbf{G}$ fölöttivel, és ezért az $\mathbf{F}$ fölötti $P(V)$ projektív tér részhalmaza P-nek. Az ilyen módon keletkező P-beli részhalmazokat a P projektív tér $\mathbf{F}$ fölötti d-dimenziós résztereinek (vagy $\mathbf{F}$-résztereinek) nevezzük.

Világos, hogy egy résztérben felvett ($\mathbf{F}$ fölötti) projektív bázis egyúttal az egész térben is projektív bázis ($\mathbf{G}$ fölött).

Az $\mathbf{F}$ fölötti alacsonyabb dimenziójú részterek (vagy $\mathbf{F}$-alterek) származtatása céljából tekinthetjük egyrészt P altereinek az $\mathbf{F}$-résztereit, másrészt az $\mathbf{F}$-részterek altereit $\mathbf{F}$ fölött. Könnyen látható, hogy a kétféle eljárással ugyanazokhoz a P-beli részhalmazokhoz jutunk.

A P-beli k-dimenziós $\mathbf{F}$-altereket tehát olyan A_0, A_1, …, A_{k+1} pont-$(k + 2)$-esekkel lehet egyértelműen kijelölni, amelyek projektív bázist alkotnak P valamely ($\mathbf{G}$ fölötti) k-dimenziós alterében. Az A_1, …, A_{k+1} független pontrendszer kifeszíti azt $\mathbf{G}$ fölötti k-dimenziós alteret, amelyen belül A_0 különböző kijelöléseihez különböző k-dimenziós $\mathbf{F}$-alterek tartozhatnak. Tehát például míg két különböző P-beli pont egyértelműen definiál egy ($\mathbf{G}$ fölötti) egyenest, az $\mathbf{F}$-egyenesek egyértelmű megadásához három $\mathbf{G}$ fölött kollineáris pont kijelölése kell. Ezt a jelenséget a $k = d = 1$ esetben jól illusztrálja a $P^1(\mathbf{C})$ komplex projektív egyenes (azaz a szokásos azonosítás útján a

Riemann-számgömb), amelyben a valós egyenesek pontosan a gömbön fekvő körök, l. 8.7.4.

Vizsgáljuk most meg a fordított helyzetet: tegyük föl, hogy $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ mellett most egy $\mathbf{F}$ fölötti P projektív tér adott, amelyből szeretnénk – lehetőleg természetes módon, tehát bázis vagy koordináták használata nélkül – olyan $\mathbf{G}$ fölötti projektív teret származtatni, amelynek P résztere. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk az $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{G} = \mathbf{C}$ esetre.

8.2.14. Definíció (Komplexifikáció). Valós vektorterek és valós projektív terek komplexifikáltját értelmezzük. Legyen először adott az $\mathbf{R}$ feletti W vektortér. A $W \oplus W$ direkt összeget $\mathbf{C}$ feletti vektortérré tesszük. Ehhez (az $\mathbf{R}$ feletti műveletek megtartása mellett) csak annyit kell tisztázni, hogy az $i \in \mathbf{C}$ elemmel való szorzás hogyan hat az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \oplus W$ párokon. A második komponenst képzetes résznek gondolva kézenfekvő az $i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-\mathbf{v}, \mathbf{u})$ definícióval élni. Az így nyert $\mathbf{C}$-vektorteret W komplexifikáltjának nevezzük, és $W^{\mathbf{C}}$-vel jelöljük. A $W = W \oplus \{\mathbf{0}\}$ azonosítás mellett a komplexifikált vektortér $W^{\mathbf{C}} = W \oplus iW$ alakban is írható. Nyilvánvaló, hogy W-beli vektorok egy rendszere pontosan akkor lineárisan független, illetve bázis, ha $W^{\mathbf{C}}$-ben $\mathbf{C}$ fölött tekintve az.

Legyen most $P = P(W)$ valós projektív tér. P komplexifikáltjának a komplexifikált vektortér $\mathbf{C}$ feletti projektivizáltját, azaz a $P^{\mathbf{C}} = P(W^{\mathbf{C}})$ komplex projektív teret nevezzük. Ekkor P valóban valós résztere $P^{\mathbf{C}}$-nek. Ennek alapján a továbbiakban egy valós projektív teret mindig felfoghatunk egy komplex projektív tér (konkrétan a komplexifikált projektív tér) résztereként.

Ha $U \leq W$ lineáris altér, akkor $U^{\mathbf{C}}$ automatikusan altér a $W^{\mathbf{C}}$ komplex vektortérben. Ezért ha S a P valós projektív tér altere, akkor $S^{\mathbf{C}}$ altér a $P^{\mathbf{C}}$ komplex projektív térben. Így a valós tér altérhálója részhálóként fogható fel a komplexifikált tér altérhálójában.

Megjegyzés. Az általános $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ esetben egy $\mathbf{F}$ fölötti W vektortérből a $W^{\mathbf{G}} = W \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{G}$ konstrukcióval nyerjük a $\mathbf{G}$ fölötti $W^{\mathbf{G}}$ vektorteret, ahol $\otimes_{\mathbf{F}}$ az $\mathbf{F}$ feletti tenzori szorzatot jelöli. (Az $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{G} = \mathbf{C}$ esetben ez a 8.2.14-ben leírt komplexifikációvá specializálódik.) A projektív terek esetében a definíció 8.2.14 mintáját követi: $P(W)^{\mathbf{G}} = P(W^{\mathbf{G}})$.

8.3. Projektív transzformációk

8.3.1. Definíció (Projektív leképezés). Legyen $\varphi : W \to W'$ tetszőleges lineáris leképezés. Ekkor a $[\varphi][\mathbf{w}] = [\varphi(\mathbf{w})]$ formulával definiált leképezést a φ által indukált $[\varphi] : P(W) \to P(W')$ projektív leképezésnek nevezzük. Általában $[\varphi]$ nincs az egész $P(W)$ téren értelmezve, csak a $P(\operatorname{Ker} \varphi)$ projektív

altér komplementerén, hiszen a $[\varphi(\mathbf{w})]$ kifejezésnek nincs értelme $\mathbf{w} \in \operatorname{Ker} \varphi$ esetén.

Észrevehetjük, hogy egy projektív tér saját magába menő projektív leképezéseinél a fixpontokat éppen az indukáló lineáris leképezés (nemzérus sajátértékhez tartozó) sajátvektorai reprezentálják.

Nyilvánvaló, hogy $[id_W] = id_{P(W)}$, továbbá $\varphi : W \to W'$ és $\psi : W' \to W''$ esetén $[\psi \circ \varphi] = [\psi] \circ [\varphi]$. Ezek miatt ha φ invertálható, akkor $[\varphi]$ is bijektív és $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$.

Könnyen meggondolható, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$ esetén a projektív leképezések folytonosak a projektív terek természetes topológiájára nézve.

8.3.2. Példa. A 8.3.1-beli észrevételek alapján projektív leképezéssel nem lehet egy projektív tér egészét alacsonyabb dimenziójú projektív térbe képezni. Az elemi geometriában megszokott, alacsonyabb dimenziójú altérre történő vetítések például a projektív geometriában szükségképpen nincsenek mindenütt értelmezve.

Tekintsük példaként a valós projektív síkot és egy abban fekvő projektív egyenest. Már a topológiai viszonyokból is látható, hogy az egyenes nem „retraktuma” a projektív síknak, azaz nem lehet a síkot az egyenesre folytonosan rávetíteni, ugyanis a sík fundamentális csoportjának ($\mathbf{Z}_2$-nek) nincs szürjektív homomorfizmusa az egyenes fudamentális csoportjára ($\mathbf{Z}$-re). Ha viszont a síkból elhagyunk egy az egyeneshez nem tartozó tetszőleges pontot, akkor a maradék halmaznak már van projektív leképezése az egyenesre. (Topologikusan ez a leképezés a nyílt Möbius-szalag vetítése a középvonalára.)

8.3.3. Definíció (Projektív transzformáció). A bijektív projektív leképezéseket, tehát azokat, amelyeket lineáris izomorfizmusok indukálnak, projektív transzformációknak vagy projektivitásoknak nevezzük.

Projektív transzformációnál bármely projektív altér képe nyilván ugyanakkora dimenziójú projektív altér.

A projektív transzformációkat nevezhetjük projektív izomorfizmusoknak is, hiszen bijektívek és inverzük is projektív transzformáció.

Valós vagy komplex esetben a projektív transzformációk homeomorfizmusok.

8.3.4. Példa. Rögzítsünk a d-dimenziós $P = P(W)$ projektív térben egy tetszőleges k-dimenziós $S \subseteq P$ projektív alteret; legyen $S = P(U)$, ahol $U \leq \leq W$. Az S-et tartalmazó $(k+1)$-dimenziós P-beli alterek halmaza természetes módon azonosítható a $P(W/U)$ projektív térrel, hiszen az U-val történő faktorizálás bijekciót létesít az U-t tartalmazó W-beli $(k+2)$-dimenziós lineáris alterek halmaza és a W/U faktortér egydimenziós lineáris alterei halmaza között.

Ha most kijelölünk egy S-től diszjunkt, $(d-k-1)$-dimenziós T alteret P-ben, akkor a 8.1.6.(3)-beli bijektív megfeleltetés (és így a 8.1.6.(4)-beli is) projektív transzformáció $P(W/U)$ és T között. Valóban, ha $T = P(V)$, akkor a feltevések miatt W az U és V alterek direkt összege, és a $\varphi : W/U \to V$ természetes faktorizáló izomorfizmus a szóban forgó megfeleltetést indukálja. □

Ugyanazon alaptest fölött bármely két egyenlő dimenziójú projektív tér izomorf. Ilyenkor természetesen az altérhálók is izomorfak. Ennek az észrevételnek a következményeként a projektív síkgeometria alábbi nevezetes tulajdonságát kapjuk.

8.3.5. Állítás (A dualitás elve). *Tegyük föl, hogy egy a projektív sík pontjairól, egyeneseiről és a köztük fönnálló illeszkedési viszonyokról szóló állítás igaz. Ekkor az az ún. duális állítás is igaz, amelyet úgy nyerünk, hogy az eredeti állításban a „pont" és az „egyenes" szavakat egymással felcseréljük.*

Bizonyítás: Valóban, az eredeti állítás a duális projektív síkra vonatkozóan is igaz, és azt az ottani objektumokra megfogalmazva 8.1.4 alapján éppen a duális állítást kapjuk. □

Megjegyzések. (1) Az illeszkedési állítások dualizálása leggyakrabban csak némi átfogalmazás árán végezhető el a szavak mechanikus cseréjével. Például a „Bármely két különböző ponton át egy és csak egy egyenes fektethető" állítást először ilyen alakban fogalmazzuk meg: „Bármely két különböző ponthoz egy és csak egy olyan egyenes létezik, amely mindkét pontra illeszkedik", majd alkalmazzuk a dualizálási eljárást és a „Bármely két különböző egyeneshez egy és csak egy olyan pont létezik, amely mindkét egyenesre illeszkedik" állítást kapjuk, amelyet végül átfogalmazhatunk a gördülékenyebb „Bármely két különböző egyenesnek egyetlen közös pontja van" alakra.

(2) A dualitás elve lehetővé teszi, hogy tételekből dualizálás útján újabb tételeket nyerjünk. Erre a 8.4. szakaszban látunk majd érdekes példákat.

(3) Vannak természetesen a dualitás elvének magasabb dimenziójú projektív terekre vonatkozó változatai is, ezek megfogalmazásától nehézkességük miatt eltekintünk. A duális állításban nyilván a „k-dimenziós altér" kifejezést kell a „$(d-k-1)$-dimenziós altér" kifejezésre kicserélni.

(4) Bár a W vektortér izomorf a W^* duális vektortérrel, és így a $P = P(W)$ projektív tér is izomorf a $P^* = P(W^*)$ duális projektív térrel, nincs közöttük természetes izomorfizmus. Konkrét izomorfizmus létesítéséhez általában valamilyen további struktúra fölvétele szükséges W-n, illetve P-n. Ilyen struktúra lehet például egy nemelfajuló szimmetrikus bilineáris függvény W-n, ami az ún. polaritás segítségével projektív izomorfizmust származtat majd P és P^* között (l. a 9.2. szakaszt).

Ez alól az általános elv alól kivételt jelentenek a $d \leq 1$ esetek. Ha $\dim W = 1$, akkor ugyan W és W^* még mindig nem temészetes módon izomorfak, de bármely két izomorfizmus egymás konstansszorosa, ezért projektivizálás után az izomorfizmus egyértelmű. Ez persze nem meglepő, hiszen a 0-dimenziós projektív terek pontok, és persze bármely két pont természetes módon izomorf projektív tér.
Érdekesebb a $d = 1$ eset. Ilyenkor P^* elemei, P-beli hipersíkok lévén, azonosak P elemeivel, és így természetes $P \to P^*$ bijekciót kapunk. Ez a bijekció projektivitás, hiszen indukálható alkalmas $\varphi : W \to W^*$ lineáris izomorfizmussal. Egy ilyen φ leképezésnek az $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \varphi(\mathbf{x})$ követelményt kell teljesítenie minden $\mathbf{x} \in W$-re. Magát φ-t nem tudjuk természetes úton származtatni, de könnyen meggondolható, hogy ($\dim W = 2$ esetén) bármely két ilyen lineáris leképezés egymás konstansszorosa. A kívánt φ lineáris izomorfizmus megadható a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszal, ha W-ben tetszőlegesen felveszünk egy bázist, és W^*-ban az ehhez tartozó duális bázist használjuk.

8.3.6. Állítás. *A $\varphi, \psi : W \to W'$ lineáris izomorfizmusokra $[\varphi] = [\psi]$ pontosan akkor áll, ha alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}^*$ skalárral $\psi = \lambda\varphi$.*

Bizonyítás: $\psi = \lambda\varphi$ esetén nyilvánvalóan $[\varphi] = [\psi]$. A megfordításhoz tegyük fel, hogy $[\varphi] = [\psi]$ és tekintsük a $\psi^{-1} \circ \varphi \in GL(W)$ lineáris automorfizmust. Ekkor $[\psi^{-1} \circ \varphi] = [\psi]^{-1} \circ [\varphi] = id_W$ miatt a $\psi^{-1} \circ \varphi$ leképezésnek minden W-beli nemzérus vektor sajátvektora, így csak az identitás skalárszorosa lehet. □

8.3.7. Definíció (Projektív csoport). A $P \to P$ projektivitások a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak. Ha $P = P(W)$, akkor ezt a csoportot a W vektortér projektív csoportjának nevezzük és $PGL(W)$-vel jelöljük. A 8.3.6. Állítás alapján $PGL(W) = GL(W)/\mathbf{F}^* id_W$. Ha $W = \mathbf{F}^{d+1}$, akkor $PGL(\mathbf{F}^{d+1})$ helyett szokás $PGL(d+1, \mathbf{F})$-et is írni, ez tehát a $(d+1) \times (d+1)$-es invertálható mátrixok alkotta csoportnak a nemzérus skalármátrixok normálosztója szerint vett faktorcsoportja.

8.3.8. Tétel. *Legyenek A_0, A_1, …, A_{d+1} és A'_0, A'_1, …, A'_{d+1} projektív bázisok a P, illetve P' projektív térben. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $f : P \to P'$ projektív transzformáció, amelynél $f(A_i) = A'_i$ $(i = 0, 1, \ldots, d+1)$.*

Bizonyítás: Legyen $P = P(W)$, $P' = P(W')$ és válasszunk az alappontokhoz a 8.2.8. Definíció szerint $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{d+1} \in W$, illetve $\mathbf{a}'_1$, $\mathbf{a}'_2$, …, $\mathbf{a}'_{d+1} \in W'$ reprezentáns vektorokat. Létezik olyan $\varphi : W \to W'$ lineáris izomorfizmus, amelyre $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}'_i$ $(i = 1, \ldots, d+1)$, ekkor automatikusan $[\varphi](A_i) = A'_i$ és $[\varphi](A_0) = \left[\varphi(\sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_i)\right] = \left[\sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}'_i\right] = A'_0$, tehát $f = [\varphi]$ megfelelő.

Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi : W \to W'$ és mind $f = [\varphi]$, mind $g = [\psi]$ az A_i pontokat rendre A'_i-be viszi. Ekkor a $(\psi^{-1} \circ \varphi)(\mathbf{a}_i)$ vektorok is az A_i pontokat reprezentálják ($i = 0,1, \ldots, d+1$) és kielégítik a 8.2.8. Definíció követelményeit, ezért a 8.2.9. Lemma alapján alkalmas λ skalárral minden i-re $(\psi^{-1} \circ \varphi)(\mathbf{a}_i) = \lambda \mathbf{a}_i$, azaz $\varphi(\mathbf{a}_i) = \lambda\psi(\mathbf{a}_i)$. Így $\varphi = \lambda\psi$, ahonnan $f = g$. □

8.3.9. Következmény. *A $PGL(W)$ csoport egyszeresen tranzitívan hat a $P(W)$-beli rendezett projektív bázisok halmazán.* □

Az alább következő példa a projektív transzfomációk legfontosabb típusa. A projektív geometriát mint tudományterületet az az igény hívta életre, hogy ez a transzformációtípus matematikailag kezelhető legyen. Maga a projektív geometria elnevezés is innen származik.

8.3.10. Definíció (Centrális vetítés, perspektivitás). Legyen H és $H' \subset \subset P$ két hipersík a P projektív térben és legyen $C \in P - (H \cup H')$ tetszőleges pont. A H hipersíknak H'-re történő C középpontú centrális vetítésén azt az $f : H \to H'$ leképezést értjük, amelynél minden $A \in H$ pontra C, A és $f(A)$ kollineáris.

Ez a követelmény 8.1.6.(4) miatt egyértelműen definiálja minden $A \in H$-ra az $f(A) \in H'$ pontot. Az is rögtön látszik, hogy f bijektív és inverze a H' hipersík centrális vetítése H-ra ugyanabból a C középpontból.

A centrális vetítés fogalmára használatban van a perspektivitás elnevezés is. Két alakzatot (ponthalmazt) perspektívnek nevezünk, ha alkalmas perspektivitással egymásba vihetők.

8.3.11. Állítás. *A centrális vetítés projektív transzformáció.*

Bizonyítás: Használjuk a 8.3.10-beli jelöléseket. Legyen $H = P(U)$ és $H' = = P(U')$, ahol U és U' lineáris hipersíkok W-ben, továbbá $C = [\mathbf{c}]$, ahol a $\mathbf{c} \in W$ vektor lineárisan független U-tól is és U'-től is. Jelöljük φ-vel a W-beli $\mathbf{c}$ irányú párhuzamos vetítést U-ról U'-re, ekkor $\varphi : U \to U'$ lineáris izomorfizmus. Állítjuk, hogy $f = [\varphi]$. Valóban, tetszőleges $\mathbf{a} \in U$ vektorra $\varphi(\mathbf{a})$ benne van a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ kifeszítette 2-dimenziós lineáris altérben, azaz $[\mathbf{c}]$, $[\mathbf{a}]$ és $[\varphi(\mathbf{a})]$ kollineáris. □

Megjegyzés. A 8.3.11. Állítás rögtön következik a 8.1.6.(4)-ben és 8.3.4-ben ($k = 1$ mellett) vizsgált projektív megfeleltetés kétszeri alkalmazásával is.

Ennek a szakasznak a végén kitérünk a projektív transzformációknak az alaptest leszűkítésével, illetve kibővítésével kapcsolatos viselkedésére.

8.3.12. Tétel. *Legyenek P és P' projektív terek $\mathbf{G}$ fölött, és legyen $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ résztest.*

(1) *Ha $f : P \to P'$ projektív transzformáció, akkor f a P tér $\mathbf{F}$-résztereit a P' tér $\mathbf{F}$-résztereire képezi.*

(2) *Ha $Q \subseteq P$, $Q' \subseteq P'$ $\mathbf{F}$-részterek, akkor bármely $Q \to Q'$ projektív transzformáció egyértelműen kiterjeszthető $P \to P'$ projektív transzformációvá.*

(3) *Ha P-ben rögzítünk egy Q részteret $\mathbf{F}$ fölött, akkor bármely P-beli $\mathbf{F}$-résztér előáll mint Q képe a P alkalmas projektivitásánál.*

Bizonyítás: Mindhárom állítás közvetlenül következik a résztér definíciójából a 8.3.8. Tétel felhasználásával. □

A tétel következményeként kapjuk, hogy a komplex projektív terek bármely valós részterükből származtathatók komplexifikációval.

8.3.13. Következmény. *Ha Q tetszőleges valós résztér a P komplex projektív térben, akkor létezik egyetlen olyan $Q^{\mathbf{C}} \to P$ komplex projektív izomorfizmus, amely identikus Q-n.*

Bizonyítás: A 8.3.12. Tétel (2) állítását alkalmazhatjuk $Q' = Q$ választással az identikus leképezésre. □

8.3.14. Definíció (Valós projektív transzformáció komplexifikáltja). Legyenek $P = P(W)$ és $P' = P(W')$ valós projektív terek és legyen $f = [\varphi] : P \to P'$ projektív transzformáció. Az $\mathbf{R}$ fölött lineáris $\varphi : W \to W'$ leképezést a $\varphi^{\mathbf{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v})$ formulával kiterjeszthetjük egy $\mathbf{C}$-lineáris $W^{\mathbf{C}} \to {W'}^{\mathbf{C}}$ izomorfizmussá. Az általa indukált $f^{\mathbf{C}} = [\varphi^{\mathbf{C}}] : P^{\mathbf{C}} \to {P'}^{\mathbf{C}}$ komplex projektív transzformációt nevezzük f komplexifikáltjának.

Ha bázist választunk W-ben és W'-ben (és ezáltal $W^{\mathbf{C}}$-ben és ${W'}^{\mathbf{C}}$-ben is), akkor ezekre a bázisokra nézve φ és $\varphi^{\mathbf{C}}$ mátrixa a definícióból kiolvashatóan ugyanaz. A $P = P' = P(\mathbf{R}^{d+1})$ esetben a $\mathbf{P}^d \to \mathbf{P}^d$ projektivitások komplexifikációjában emiatt ráismerhetünk a $PGL(d+1, \mathbf{R}) \subseteq PGL(d+1, \mathbf{C})$ természetes tartalmazásra.

A komplexifikált transzformáció alábbi tulajdonságai is azonnal adódnak a definícióból.

8.3.15. Állítás. *Legyenek P, P' és P'' valós projektív terek, $f : P \to P'$ és $g : P' \to P''$ projektív transzformációk. Ekkor*

(1) $f^{\mathbf{C}}|_P = f$,

(2) $id_P^{\mathbf{C}} = id_{P^{\mathbf{C}}}$,

(3) $(f^{-1})^{\mathbf{C}} = (f^{\mathbf{C}})^{-1}$, *és*

(4) $(g \circ f)^{\mathbf{C}} = g^{\mathbf{C}} \circ f^{\mathbf{C}}$. □

Megjegyzés. A 8.3.15-ben felsorolt tulajdonságok a komplexifikációs eljárás „természetes” voltát mutatják.

8.4. Az affin geometria és a projektív geometria kapcsolata

Az előző szakasz 8.2.1–8.2.3. pontjaiban láttuk, hogy projektív térben hipersík komplementere természetes módon affin térnek tekinthető. Most a fordított irányú kapcsolatot tisztázzuk: megmutatjuk, hogy bármely affin tér felfogható egy hozzá természetes módon tartozó projektív térben egy hipersík komplementereként. Ennek a hipersíknak az elemei lesznek az affin térhez csatolt „végtelen távoli” pontok. Ezt a kibővítési eljárást projektív lezárásnak nevezzük.

Az 1.7. szakaszban tisztáztuk, hogy az affin tereket egy természetes kibővítési eljárás révén vektorterekben fekvő affin hipersíkoknak tekinthetjük. Ha X véges dimenziós affin tér $\mathbf{F}$ fölött és $V = \overrightarrow{X}$, akkor $\widehat{X}$ jelöli az X lineáris kiterjesztését, amelyben V lineáris hipersík, X pedig V-vel párhuzamos, tőle különböző affin hipersík. A konstrukció természetességén azt értjük, hogy bármely $f : X \to X'$ affin leképezés $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{X'}$ lineáris leképezést indukál, melyre $\widehat{f}\,|_X = f$ és $\widehat{f}\,|_V = L(f)$, továbbá $\widehat{id_X} = id_{\widehat{X}}$ és $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ érvényes. Speciálisan ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor Y-nak az X-be történő inklúziója injektív $\widehat{Y} \to \widehat{X}$ homomorfizmust indukál, amelynek segítségével úgy tekinthetjük, hogy $\widehat{Y} \subseteq \widehat{X}$.

8.4.1. Definíció (Projektív lezárás, ideális hipersík, ideális pont). Az X (véges dimenziós) affin tér projektív lezárásán az $\overline{X} = P(\widehat{X})$ projektív teret értjük. A $\infty_X = P(V) \subset \overline{X}$ projektív hipersíkot az X ideális hipersíkjának nevezzük.

Az $A \mapsto [A]$ $(A \in X)$ megfeleltetés bijektív X és az $\overline{X} - \infty_X$ halmaz között; az X affin teret ennek a bijekciónak az útján azonosítjuk az ideális hipersík komplementerével.

Az ideális hipersík elemeit az affin tér ideális pontjainak nevezzük. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy nem ideális pontokról van szó, akkor az affin tér elemeit közönséges pontoknak mondjuk.

8.4.2. Állítás. *Az $\overline{X} - \infty_X$ halmaz természetes affin struktúrája azonos X affin struktúrájával.*
Bizonyítás: Alkalmazzuk a 8.2.3. Példában tett megállapításokat a $W = \widehat{X}$ vektortérre és az $X \subset \widehat{X}$ affin hipersíkra. □

Megjegyzések. (1) 8.2.2. és 8.4.2. összevetésével tehát az affin terek pontosan a hipersíkok komplementerei projektív terekben.

(2) Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$, akkor a projektív lezárás valóban lezárást jelent a természetes topológiára nézve, hiszen ekkor egy hipersík komplementere sűrű halmazt alkot a projektív térben.

8.4.3. Példák

- Az $\mathbf{F}^d$ koordinátatér mint affin tér esetében $\widehat{\mathbf{F}^d} = \mathbf{F}^d \times \mathbf{F} = \mathbf{F}^{d+1}$, amelyben az $\mathbf{F}^d$ affin tér $\mathbf{F}^d \times \{1\}$-gyel, azaz az $x_{d+1} = 1$ egyenletű affin hipersíkkal van azonosítva. A projektív lezárás tehát ilyenkor a $P(\mathbf{F}^{d+1})$ standard projektív tér. Az ideális pontokat az $x_{d+1} = 0$ feltétel jellemzi. A közönséges pontok esetében a 8.2.6-beli $\mathbf{x}_{d+1}$ térkép adja vissza az eredeti $\mathbf{F}^d$-beli koordinátákat. A koordináták átírási szabályai tehát:

  affinról homogénra: $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto [x_1 : \ldots : x_d : 1]$, illetve

  homogénról affinra: $[x_1 : \ldots : x_d : x_{d+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \ldots, \frac{x_d}{x_{d+1}}\right)$.

  Ha $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, d+1)$ jelöli a standard bázist $\mathbf{F}^{d+1}$-ben, $A_i = [\mathbf{e}_i]$ és $A_0 = [\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_{d+1}]$, akkor a fenti homogén koordináták az A_0, A_1, …, A_{d+1} projektív bázisra vonatkozó projektív koordinátákkal azonosak. (Ez a projektív bázis két pont kivételével ideális pontokból áll.)

  A $d = 1$ speciális estben az $\mathbf{F}$ alaptestnek mint affin egyenesnek a projektív lezárásával az $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cup \{\infty_{\mathbf{F}}\} = P(\mathbf{F}^2)$ projektív egyenest kapjuk. Az ideális hipersík itt egyetlen pont, amelyet a továbbiakban az index nélküli ∞ jellel jelölünk. A fenti koordinátázással $\infty = [1 : 0]$. A komplex test projektív lezárását, $\overline{\mathbf{C}}$-t Riemann-féle számgömbnek szokás nevezni.

- Tegyük fel, hogy $d+1$ nem osztója $\operatorname{char} \mathbf{F}$-nek. Legyen az $A_1, \ldots, A_{d+1}$ pontrendszer affin bázis az X affin térben és jelölje A_0 az $\frac{1}{d+1}A_1 + \ldots + \frac{1}{d+1}A_{d+1}$ súlypontot. Ekkor az A_0, A_1, …, A_{d+1} pontrendszer projektív bázis az $\overline{X}$ projektív lezárásban, és az erre a bázisra vonatkozó projektív koordináták (közönséges pontokra szorítkozva) éppen az X-beli baricentrikus koordináták az $A_1, \ldots, A_{d+1}$ affin bázisra nézve.

8.4.4. Definíció (Affinitások projektív kiterjesztése). Ha $f : X \to X'$ affin izomorfizmus, akkor az $\overline{f} = [\widehat{f}\,] : \overline{X} \to \overline{X'}$ projektív transzformációt f projektív kiterjesztésének nevezzük.

8.4.5. Állítás

(1) $\overline{f}\,|_X = f$;

(2) $\overline{f}\,|\,\infty_X = [L(f)]$.

Bizonyítás: Rögtön következik az f lineáris kiterjesztésére vonatkozó $\widehat{f}\,|_X = f$ és $\widehat{f}\,|_V = L(f)$ megállapításokból, l. 1.7.6.(1)-(2). □

Az X affin altérben fekvő affin alterek projektív lezárásai természetes módon $\overline{X}$-ban fekszenek. Az alábbi állítás az affin alterek ideális pontjainak legfontosabb tulajdonságait foglalja össze:

8.4.6. Állítás

(1) *Ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$ projektív altér és $\infty_Y = \infty_X \cap \overline{Y}$.*

(2) *Az $Y \mapsto \overline{Y}$ megfeleltetés bijektív X affin alterei halmaza és $\overline{X}$-nak a nem ∞_X-ben fekvő projektív alterei halmaza között.*

(3) *Tetszőleges $Y, Z \subseteq X$ affin alterekre $\infty_Y = \infty_Z \iff Y \parallel Z$.*

Bizonyítás: Ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor $\widehat{Y} \leq \widehat{X}$, valamint $\overrightarrow{Y} = \widehat{Y} \cap \overrightarrow{X}$. Emiatt a $\infty_Y = P(\overrightarrow{Y})$ és $\infty_X = P(\overrightarrow{X})$ projektivizáltakra következik (1) és (2). Az Y és Z alterek pedig pontosan akkor párhuzamosak, ha $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Z}$, innen (3) következik. □

Megjegyzés. 8.4.6.(3) speciális eseteként azt kapjuk, hogy X ideális pontjai bijektív kapcsolatban állnak az X-beli egyenesek párhuzamossági osztályaival. Ez az összefüggés az alapja annak a klasszikus geometriai eljárásnak, amely az affin terek projektív kibővítését az ideális pontok hozzávétele útján származtatja.

8.4.7. Állítás. *Ha H_1 H_2 hipersíkok a P_1, illetve P_2 projektív terekben, és adott az $f : P_1 - H_1 \to P_2 - H_2$ affin izomorfizmus, akkor létezik (egyetlen) olyan $g : P_1 \to P_2$ projektív transzformáció, amelynél $g(H_1) = H_2$ és $f = g\,|_{P_1 - H_1}$. Speciálisan, egy projektív térben valamely hipersík komplementerének a (saját magába képező) affinitásai pontosan azoknak a projektivitásoknak a leszűkítései, amelyek a hipersíkot önmagába képezik.*

Bizonyítás: Legyen $i = 1,2$-re $P_i = P(W_i)$ és $H_i = P(V_i)$, ahol $V_i < W_i$ lineáris hipersík. A 8.2.3-ban leírt módon válasszunk V_i-vel párhuzamos $X_i \subset W_i$, $\mathbf{0} \notin X_i$ hipersíkokat és azonosítsuk $P_i - H_i$-t X_i-vel. Vegyünk fel egy $A_0, A_1, \ldots, A_d$ affin bázist X_1-ben, és legyen $B_j = f(A_j) \in X_2$ $(j = 0, \ldots, d)$, ekkor a B_j pontok is affin bázist alkotnak X_2-ben. Az A_j pontok mint W_1-beli

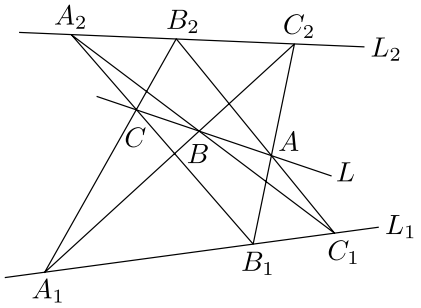
vektorok, a B_j-k mint W_2-beliek bázist alkotnak ezekben a vektorterekben; legyen $\varphi : W_1 \to W_2$ az a lineáris izomorfizmus, amelynél $\varphi(A_j) = B_j$ ($j = 0, \ldots, d$). Ekkor $g = [\varphi]$ nyilván a kívánt projektív transzformáció. Miután X_1 generátorrendszer W_1-ben, az így definiált φ lineáris leképezés nem függ az affin bázis speciális választásától. Ha pedig X_1 és X_2 helyett más, velük párhuzamos hipersíkokkal azonosítjuk a $P_1 - H_1$, illetve $P_i - H_i$ affin tereket, akkor az azokkal definiált φ nyilván csak skalárszorzóban fog eltérni. Ezért g egyértelmű. □

Megjegyzés. A 8.4.7. Állítás alapján úgy tekinthetjük, hogy ha a P projektív térben adott a H hipersík, akkor P azonos a $P - H$ affin tér projektív lezárásával. Az affin terek közötti affinitások pedig pontosan azok a projektív leképezések (pontosabban: azoknak a projektív leképezéseknek a megszorításai), amelyek ideális pontokat ideális pontokba, közönségeseket közönségesekbe visznek.

8.5. Illeszkedési tételek

A projektív geometriában gyakran alkalmazható bizonyítási elv, hogy egy általunk kiválasztott hipersíkot ideális hipersíknak tekintünk, és a maradék affin térben affin geometriai eszközökkel kivitelezzük a bizonyítást. Ennek a módszernek az alkalmazására látunk példákat a projektív geometria néhány nevezetes illeszkedési tételében.

8.5.1. Tétel (Papposz tétele, projektív változat). *Legyen P projektív sík, L_1 és L_2 két különböző P-beli egyenes, A_1, B_1, $C_1 \in L_1$, A_2, B_2, $C_2 \in L_2$ hat különböző pont, amelyek L_1 és L_2 metszéspontjától is különböznek. Ekkor az $A = \langle B_1, C_2\rangle \cap \langle B_2, C_1\rangle$, $B = \langle C_1, A_2\rangle \cap \langle C_2, A_1\rangle$ és $C = \langle A_1, B_2\rangle \cap \langle A_2, B_1\rangle$ pontok kollineárisak.*

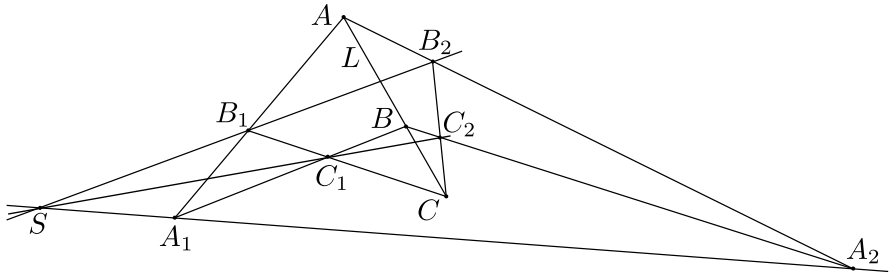


Bizonyítás: A tétel feltevései mellett egyrészt A és B két különböző pont, és így tekinthetjük az $L = \langle A, B\rangle$ egyenest, másrészt L nem halad át a megadott hat pont egyikén sem. Azt kell belátnunk, hogy $C \in L$. Tekintsük a $P - L$ affin síkot, ennek A és B ideális pontjai. Ezért $\langle B_1, C_2\rangle \parallel \langle C_1, B_2\rangle$, valamint $\langle C_1, A_2\rangle \parallel \langle A_1, C_2\rangle$, azaz teljesülnek az affin Papposz-tétel (1.5.5) feltételei. Ezt alkalmazva $\langle A_1, B_2\rangle \parallel \langle B_1, A_2\rangle$, azaz $C \in L$ következik. □

8.5.2. Tétel (Desargues tétele, projektív változat). *Legyenek egy (tetszőleges dimenziójú) projektív térben S, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 olyan különböző pontok, amelyekre az S, A_1, B_1, C_1, illetve az S, A_2, B_2, C_2 pontok között bármely három független, továbbá amelyekre az S, A_1, A_2, az S, B_1, B_2, és az S, C_1, C_2 ponthármasok kollineárisak. Ekkor az $A = \langle B_1, C_1\rangle \cap \cap \langle B_2, C_2\rangle$, $B = \langle C_1, A_1\rangle \cap \langle C_2, A_2\rangle$, $C = \langle A_1, B_1\rangle \cap \langle A_2, B_2\rangle$ ponthármas is kollineáris.*

Bizonyítás: Legyen $P = \langle S, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\rangle$, ekkor a tétel feltevései miatt $2 \le \dim P \le 3$.

Ha $\dim P = 3$, akkor $\langle A_1, B_1, C_1\rangle$ és $\langle A_2, B_2, C_2\rangle$ két különböző sík, amelyek a dimenzióformula alapján egyenesben metszik egymást. Erre a metszésvonalra A, B, C mindegyike illeszkedik, hiszen az őket előállító egyenespárok egyik tagja az egyik síkon, másik a másikon fekszik.



Legyen most $\dim P = 2$. A tett feltevések miatt $A \neq B$, ezért tekinthetjük az $L = \langle A, B\rangle$ egyenest; azt kell megmutatnunk, hogy $C \in L$. A megadott hét pont közül legfeljebb S illeszkedhet L-re, a többi a tételben tett kikötések miatt nem illeszkedik rá. A $P - L$ affin síkban teljesülnek az affin Desargues-tétel (1.5.6) feltételei (mégpedig metsző egyenesekkel, ha $S \notin L$, és párhuzamos egyenesekkel, ha $S \in L$). Ezért ezt a tételt alkalmazva $\langle A_1, B_2\rangle \parallel \langle A_2, B_1\rangle$, azaz $C \in L$ következik. □

Megjegyzések. (1) A Desargues-tétel tömörebb megfogalmazása céljából a perspektív háromszögek fogalmát ismertetjük. A projektív geometriában háromszögön egy nem-kollineáris ponthármast értünk: a három pont a háromszög csúcsai, a páronként kifeszített egyenesek a háromszög oldalai.

Duális módon is tekinthetjük a háromszögeket: háromszögön három egy síkban fekvő és nem egy ponton áthaladó egyenest is érthetünk, ahol ezek az egyenesek a háromszög oldalai, a páronként vett metszéspontok pedig a háromszög csúcsai. A pontosság kedvéért az eredeti értelmezés szerinti háromszöget pontháromszögnek, a duális változatot vonalháromszögnek is nevezhetjük, de ez a két fogalom végül is – a csúcsokkal és oldalakkal együtt – ugyanolyan fajta alakzatot eredményez.

Legyen P projektív sík. Azt mondjuk, hogy a P-beli $A_1B_1C_1$ pontháromszög és a szintén P-beli $A_2B_2C_2$ pontháromszög az $S \in P$ pontra nézve perspektív, ha az S, A_1, A_2, az S, B_1, B_2, és az S, C_1, C_2 ponthármas is kollineáris. Ennek a feltételnek a dualizálásával nyerjük az egyenesre nézve perspektív vonalháromszögek fogalmát.

Ezzel a szóhasználattal a Desargues-tétel síkbeli változatának az állítása úgy fogalmazható, hogy (a 8.5.2-ben tett nemelfajulási kikötések mellett) ha két háromszög pontra nézve perspektív, akkor ugyanaz a két háromszög egyenesre nézve is perspektív.

(2) A Papposz-tétel is és a Desargues-tétel síkbeli változata is pontokról, egyenesekről, és a köztük fönnálló illeszkedési viszonyokról szól, ezért alkalmazhatjuk rájuk a dualitás elvét (l. 8.3.5), és így újabb illeszkedési tételeket kaphatunk. Vegyük észre, hogy a Desargues-tétel duálisa éppen a tétel megfordítása: azt állítja, hogy a projektív síkban egyenesre perspektív háromszögek pontra is perspektívek. Ezért a Desargues-tételt gyakran „akkor és csak akkor” formában mondják ki.

A projektív terek illeszkedési struktúrája az affin terekéhez hasonló szerepet játszik. Az affin terekről tudjuk, hogy az illeszkedést megőrző bijektív leképezések lényegében (testautomorfizmustól eltekintve) az affin struktúrát is megőrzik. Hasonlót állíthatunk projektív terekről is: ezt a tételt nevezik a projektív geometria alaptételének. Ennek a tételnek a bizonyítása az affin geometria alaptételére támaszkodik és szintén a bevezetőben említett sémát követi.

8.5.3. Definíció (Kollineáció). Legyenek P és P' egyenlő dimenziójú projektív terek $\mathbf{F}$ fölött. Egy $f : P \to P'$ leképezést kollineációnak nevezünk, ha bijektív és kollineáris pontokat kollineáris pontokba képez.

A projektív transzformációk nyilván kollineációk. Az egydimenziós esetben minden bijektív leképezés kollineáció. Vannak más típusú kollineációk is, ezeket a szemiaffin leképezések mintájára értelmezhetjük.

8.5.4. Definíció (Szemiprojektív transzformáció). Ha $P = P(W)$ és $P' = P(W')$, akkor egy $f : P \to P'$ leképezést szemiprojektív transzformációnak nevezünk, ha létezik olyan $\varphi : W \to W'$ bijektív szemilineáris leképezés, hogy bármely $\mathbf{w} \in W$-re $f([\mathbf{w}]) = [\varphi(\mathbf{w})]$.

(Emlékeztetőül: $\varphi : W \to W'$ szemilineáris, ha alkalmas $\sigma : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ testautomorfizmussal $\varphi(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \sigma(\lambda)\varphi(\mathbf{x}) + \sigma(\mu)\varphi(\mathbf{y})$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W,\ \lambda, \mu \in \mathbf{F})$.)

Nyilván bármely projektív transzformáció szemiprojektív. Könnyen ellenőrizhető, hogy szemiprojektív transzformációk inverze, kompozíciója is szemiprojektív, továbbá hogy bármely szemiprojektív transzformáció kollineáció.

8.5.5. Példa. Nevezetes példát kapunk szemiprojektív, de nem projektív transzformációra a valós projektív terek komplexifikáltján. Legyen W valós vektortér, $P = P(W)$ és $P^{\mathbf{C}} = P(W^{\mathbf{C}})$. Az $\mathbf{u} + i\mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ leképezést, amely $\mathbf{C}$ fölött szemilineáris és bijektíven képezi $W^{\mathbf{C}}$-t önmagára, és amelynek W a fixponthalmaza, W-re vonatkozó komplex konjugálásnak nevezzük a komplexifikált vektortérben. Az általa indukált $P^{\mathbf{C}} \to P^{\mathbf{C}}$ szemiprojektív transzformációt a P valós résztérre vonatkozó komplex konjugálásnak nevezzük. A P valós résztér itt is a komplex konjugálás fixpontjaiból áll.

Valamivel általánosabban ha P tetszőleges valós résztér a P' komplex projektív térben, akkor beszélhetünk a P-re vonatkozó komplex konjugálásról P'-ben, hiszen 8.3.13 alapján feltehetjük, hogy $P' = P^{\mathbf{C}}$.

8.5.6. Tétel (A projektív geometria alaptétele). *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$ *és* $\dim P = \dim P' \geq 2$. *Ekkor bármely* $P \to P'$ *kollineáció szemiprojektív.*

Bizonyítás (vázlat): Legyen $f : P \to P'$ adott kollineáció. Először azt látjuk be, hogy az f leképezésnél hipersík képe hipersík. Ez lényegében ugyanúgy történhet, ahogyan az affin geometria alaptételének (1.6.7) bizonyítása során az első három lépést tettük.

Szemeljünk ki most P-ben egy H hipersíkot, legyen $P = P(W)$, $P' = P(W')$, $H = P(V)$, $f(H) = P(V')$, ahol $V < W$, illetve $V' < W'$ lineáris hipersíkok. Tekintsük a $g = f\,|_{P-H}$ leképezést, amely kollineáció a $P - H$ affin térről a $P' - f(H)$ affin térre. Az affin geometria alaptételét g-re alkalmazva kapjuk, hogy g szemiaffin leképezés. Könnyű meggondolni, hogy nem csak az affin leképezések, hanem a szemiaffin leképezések is kiterjeszthetők a projektív lezárások közti szemiprojektív leképezéssé. Ilyen módon adódik a $\overline{g} : P \to P'$ szemiprojektív transzformáció. Végül a kollinearitástartás felhasználásával ellenőrizhető, hogy $\overline{g}$ nem csak a $P - H$ halmazon, hanem H-n is azonos f-fel. □

8.5.7. Következmény. *A legalább* 2 *dimenziójú valós projektív terek körében a kollineációk azonosak a projektív transzformációkkal.*

Bizonyítás: Az affin esethez hasonlóan bármely valós szemiprojektív transzformáció projektív, miután az $\mathbf{R}$ testnek az identikus leképezés az egyetlen automorfizmusa. □

Az alaptétel azt a képet sugallja, hogy a projektív tér szerkezetét már az illeszkedési struktúra lényegében meghatározza. Ennek következtében a projektív geometria hatékonyan tárgyalható axiomatikus kiindulópontból is, mégpedig viszonylag egyszerű, csupán illeszkedési állításokból álló axiómarendszer segítségével. A szakasz hátralevő részében erről az axiomatikus tárgyalásmódról teszünk megjegyzéseket. A későbbiekben nem az axiomatikus projektív geometriát folytatjuk, hanem a 8.6. szakasztól kezdve projektív téren ismét a vektortér projektivizálásával nyert teret értjük majd.

Szorítkozzunk először a kétdimenziós esetre. Projektív síknak nevezünk egy halmazt (amelynek elemeit pontoknak nevezzük), ha adott rajta egyenesnek nevezett részhalmazok egy rendszere, amelyre az alábbi három axióma érvényes:

(1) Bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik olyan egyenes, amely a két pontot tartalmazza.

(2) Bármely két egyenesnek létezik közös pontja.

(3) Létezik négy olyan pont, amelyeket páronként különböző egyenesek tartalmaznak.

A projektív sík illeszkedési tulajdonságai közül sok minden már ebből a három axiómából is levezethető (például az egyenesről egyenesre történő centrális vetítések bijektív volta, vagy a dualitás elve). Nevezetes tény viszont, hogy sem a Papposz-tétel, sem a Desargues-tétel nem következik ezekből az axiómákból, léteznek ugyanis olyan modelljei ennek az axiómarendszernek, amelyekben ezek a tételek nem érvényesek.

Felvetődik tehát a kérdés, hogy az axiómákon túl vajon milyen további feltételek mellett lesz egy projektív sík szükségképpen izomorf a lineáris algebrára épített projektív síkok valamelyikével (amelyeket a megkülönböztetés érdekében most *klasszikus* projektív síkoknak nevezünk).

Az axiomatikus projektív geometria egyik legszebb eredménye az a Hilberttől származó tétel, hogy ha az (1), (2), (3) axiómák mellé magát a Desargues-tételt vesszük negyedik axióma gyanánt, akkor már majdnem következik, hogy a sík klasszikus projektív sík. Az egyetlen eltérés annyi, hogy nem feltétlenül test feletti, hanem csak ferdetest feletti vektortér projektivizálásával nyerhető a projektív sík. (Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy ferdetestben a szorzás művelete nem kommutatív, a fölötte vett vektortereket akkor is lehet ugyanúgy projektivizálni, és az így nyert struktúrák eleget tesznek mind a négy axiómának.) Érdekes módon a Papposz-tétel még ebből az erősebb axiómarandszerből sem következik. Ha viszont a Desargues-tétel helyett a Papposz-tételt használjuk negyedik axiómaként, akkor ebből az axiómarendszerből egyrészt a Desargues-tétel is következik, másrészt pedig a projektív sík

már izomorf lesz egy klasszikus projektív síkkal (azaz a szóban forgó ferdetest ekkor már szükségképpen kommutatív, azaz test). Érdemes megkeresni az affin Papposz-tétel bizonyításának azt a pontját, ahol az alaptest kommutatív volta lényeges szerepet játszik.

A magasabb dimenziójú projektív tereket sem nehéz axiomatikusan kezelni. Az axiómák tételes fölsorolásától itt eltekintünk, és megelégszünk az axiómarendszer tartalmi ismertetésével.

A d-dimenziós projektív tér megadásához minden $k = -1, 0, \ldots, d$-re ki kell jelölnünk az alaphalmazban részhalmazoknak (a k-dimenziós altereknek) egy-egy rendszerét oly módon, hogy azok eleget tegyenek néhány természetes követelménynek: csak egyetlen (-1)-dimenziós és egyetlen d-dimenziós altér van (mégpedig az üres halmaz, illetve az egész tér), a 0-dimenziós alterek pontosan az egypontú részhalmazok, ugyanaz a részhalmaz nem lehet egyszerre kétféle dimenziójú altér, továbbá alterek metszete altér. Ezeken kívül két lényegi axióma határozza meg az illeszkedési viszonyokat: az egyik a 8.1.5-beli dimenzióformula, a másik pedig a síkbeli (3) axiómához hasonló „nemelfajulási" feltétel, amely azt követeli meg, hogy létezzen $d + 2$ általános helyzetű pont.

A 8.5.2. Tétel bizonyításából kiolvasható, hogy $d \geq 3$ estén a Desargues-tétel már egyszerű illeszkedési megfontolásokból levezethető. Ezért a legalább háromdimenziós axiomatikus projektív geometriában a Desargues-tétel minden további feltevés nélkül is igaz. Emiatt ha a dimenzió legalább 3, akkor az axiomatikus projektív tér a fenti értelemben „majdnem" klasszikus projektív tér, azaz ferdetest feletti vektortér projektivizálásából származik. Az axiomatikus projektív geometria (különösképpen a véges geometria) nehéz és sok esetben megoldatlan kérdései tehát mind a sík geometriájához köthetők.

8.6. Kettősviszony

Ahogyan az euklideszi geometriában a pontpárok közti távolság, illetve az affin geometriában a kollineáris ponthármasokra értelmezett osztóviszony a legalapvetőbb numerikus invariáns, úgy a projektív geometriában a kollineáris pontnégyesek körében alább definiálandó kettősviszony a pontok közti viszony legfontosabb jellemzője. Miután kollineáris pontnégyesekről beszélünk, ebben a szakaszban feltesszük, hogy az $\mathbf{F}$ alaptest legalább háromelemű.

8.6.1. Definíció (Kettősviszony). Legyen L tetszőleges projektív egyenes és A, B, C, $D \in L$ négy különböző pont. Miután az L egyenesen az A, B, C pontok, az $\overline{\mathbf{F}}$ egyenesen pedig a ∞, 0, 1 pontok projektív bázist alkotnak, a 8.3.8. Tétel szerint létezik olyan egyértelműen meghatározott $f_{ABC} : L \to \overline{\mathbf{F}}$ projektív transzformáció, amelynél $f_{ABC}(A) = \infty$, $f_{ABC}(B) = 0$ és

$f_{ABC}(C) = 1$. Az A, B, C és D pontok (ebben a sorrendben vett) kettősviszonyán az $f_{ABC}(D) \in \mathbf{F}$ testelemet értjük. Ezt az elemet az $(ABCD)$ jellel jelöljük.

Rögtön következik a definícióból, hogy a kettősviszony a 0 és 1 értékeken kívül bármilyen más testelem lehet; sőt a fenti f_{ABC} leképezés megszorításával nyert $D \mapsto (ABCD)$ hozzárendelés bijekció az $L - \{A, B, C\}$ halmaz és az $\mathbf{F} - \{0{,}1\}$ halmaz között.

Ha $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ testbővítés, és A, B, C, D különböző, kollineáris pontok egy $\mathbf{G}$ feletti projektív tér valamely $\mathbf{F}$-részterében, akkor az f_{ABC} leképezés a pontokat tartalmazó $\mathbf{F}$-egyenest az $\overline{\mathbf{F}} \subseteq \overline{\mathbf{G}}$ részegyenesbe képezi, és így $(ABCD) \in$ $\in \mathbf{F}$. Tehát például komplex projektív terekben a valós egyeneseken fekvő pontnégyesek kettősviszonya is valós.

8.6.2. Állítás. $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *esetén az* $(ABCD)$ *kettősviszony pontosan akkor negatív, ha az* $\{A, B\}$ *és* $\{C, D\}$ *pontpárok elválasztják egymást.*

Bizonyítás: Valóban, f_{ABC} projektív transzformáció lévén megőrzi az elválasztási relációt, és az $\overline{\mathbf{R}}$ valós projektív egyenesen a $\{0, \infty\}$ pontpár pontosan akkor választja el az $\{1, x\}$ pontpárt, ha $x < 0$. □

8.6.3. Tétel. *Egy leképezés két projektív egyenes között pontosan akkor projektív transzformáció, ha bijektív és kettősviszonytartó.*

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy $f : L \to L'$ projektív transzformáció. Legyen $A, B, C, D \in L$ négy különböző pont, A', B', C' és D' rendre az f-nél származó képeik. Ekkor az f_{ABC} leképezés az $f_{A'B'C'} \circ f$ kompozícióval egyenlő, hiszen mindkettő projektív transzformáció és megegyeznek az A, B, C projektív bázison. Ezért $f_{ABC}(D) = f_{A'B'C'}(D')$, azaz $(ABCD) =$ $= (A'B'C'D')$.

Legyen most $\varphi : L \to L'$ tetszőleges kettősviszonytartó bijekció. Rögzítsünk az L egyenesen egy A, B, C projektív bázist, jelöljük rendre A'-vel, B'-vel és C'-vel a φ-nél származó képeiket. Ekkor φ bijektív volta miatt A', B', C' is projektív bázis az L' egyenesen. Ezért létezik olyan $f : L \to L'$ projektív transzformáció, amelynél $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, és $f(C) = C'$. Azt állítjuk, hogy $\varphi = f$ (és ezzel igazoljuk, hogy φ valóban projektív transzformáció). Legyen $D \in L - \{A, B, C\}$ az L egyenes tetszőleges további pontja, ekkor φ és f kettősviszonytartását kihasználva $f_{A'B'C'}\big(\varphi(D)\big) = \big(A'B'C'\varphi(D)\big) =$ $= (ABCD) = \big(A'B'C'f(D)\big) = f_{A'B'C'}\big(f(D)\big)$, ahonnan $\varphi(D) = f(D)$. □

8.6.4. Következmény (Papposz–Steiner-tétel). *Perspektív pontnégyesek kettősviszonya egyenlő. Azaz: ha az* A, B, C, D *kollineáris pontok képei valamely centrális vetítésnél rendre* A', B', C' *és* D', *akkor* $(ABCD) =$ $= (A'B'C'D')$. □

8.6.5. Példa. Tekintsünk a $P(W^*)$ duális projektív térben négy különböző kollineáris pontot, azaz egy $P(W)$-beli hipersíksor H_1, H_2, H_3 és H_4 tagjait. Jelöljük T-vel a hipersíksort tartó $(d-2)$-dimenziós projektív alteret $P(W)$-ben, és legyen S tetszőleges $P(W)$-beli egyenes, melyre $S \cap T = \emptyset$. Messe az S egyenes a négy hipersíkot rendre az A_1, A_2, A_3 és A_4 pontokban. Ekkor 8.3.4 és 8.6.3 alkalmazásával $(A_1A_2A_3A_4) = (H_1H_2H_3H_4)$ adódik.

Amikor a kettősviszonyt konkrét esetekben meghatározzuk, legtöbbször nem a 8.6.1-beli definíciót használjuk. Az alábbi tétel a kettősviszony olyan kiszámítási módszereit mutatja meg, amelyeket egyrészt vektorok és koordináták ismeretében, másrészt (az euklideszi geometriában) távolságok ismeretében lehet jól alkalmazni.

8.6.6. Tétel

(1) *Ha* $A = [\mathbf{a}], B = [\mathbf{b}], C = [\mathbf{c}], D = [\mathbf{d}]$ *különböző kollineáris pontok, valamint* $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}$, *akkor*

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}\,.$$

(2) *Ha* A, B, C, D *egy* X *affin egyenes négy különböző pontja, akkor (az* $\overline{X}$ *projektív egyenesre vonatkozóan)*

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}\,.$$

Speciálisan $a, b, c, d \in \mathbf{F}$*-re*

$$(abcd) = \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d}\,.$$

(3) *Ha* A, B, C *egy* X *affin egyenes három különböző pontja, akkor*

$$(ABC\infty_X) = -(ABC)\,.$$

Bizonyítás: (1): Jelöljük átmenetileg $[ABCD]$-vel azt az $\mathbf{F}$-beli elemet, amelyet tetszőleges négy különböző kollineáris pontra a 8.6.6.(1)-beli formulával határozunk meg. Először is ennek a formulának van értelme, mert a pontok különböző volta miatt az együtthatók egyike sem 0, és így szabad osztani velük. Vegyük észre továbbá, hogy $[ABCD]$ jól definiált, azaz értéke csak a szóban forgó pontoktól függ, attól nem, hogy milyen vektorokkal reprezentáljuk őket. Valóban, akár $\mathbf{a}$-t, akár $\mathbf{b}$-t, akár $\mathbf{c}$-t, akár $\mathbf{d}$-t helyettesítjük egy skalárszorosával, az együtthatók oly módon változnak, hogy a képletben a változások kiejtik egymást.

Most meggondoljuk, hogy az $[ABCD]$ mennyiség invariáns a projektív transzformációkra nézve. Tegyük föl, hogy az $L = P(W)$, $L' = P(W')$ projektív egyenesek közti $f : L \to L'$ projektív transzformációt a $\varphi : W \to W'$ lineáris leképezés indukálja, továbbá A, B, C, $D \in L$ négy különböző pont, amelyekhez rendre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ reprezentáns vektorokat választottuk W-ben. Ekkor az $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D) \in W'$ képpontokat rendre a $\varphi(\mathbf{a})$, $\varphi(\mathbf{b})$, $\varphi(\mathbf{c})$, $\varphi(\mathbf{d})$ vektorok reprezentálják. Miután φ izomorfizmus, az $[f(A)f(B)f(C)f(D)]$-t előállító képletben ugyanazok a λ_i, μ_i együtthatók szerepelnek, mint $[ABCD]$ esetében, ezért $[f(A)f(B)f(C)f(D)] = [ABCD]$.

Ezek után elég lesz már csak azt ellenőrizni, hogy az $\overline{\mathbf{F}}$ egyenesen bármely $x \neq \infty$,0,1 elemre $[\infty\, 0\, 1\, x] = x$. Valóban, ha ezt tudjuk, akkor tetszőleges A, B, C, D-re $(ABCD) = f_{ABC}(D) = [\infty\, 0\, 1\, f_{ABC}(D)] = [ABCD]$.

Használjuk az $\overline{\mathbf{F}} = P(\mathbf{F}^2)$ egyenesen a $\infty = [1 : 0]$, $0 = [0 : 1]$, $1 = [1 : 1]$ és $x = [x : 1]$ pontok számára rendre az $\mathbf{a} = (1{,}0)$, $\mathbf{b} = (0{,}1)$, $\mathbf{c} = (1{,}1)$, illetve $\mathbf{d} = (x{,}1)$ reprezentáns vektorokat $\mathbf{F}^2$-ben. Ekkor $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + \mathbf{b}$, azaz $\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ és $\lambda_2 = x$, ahonnan valóban $[\infty\, 0\, 1\, x] = x$.

(2): Állítsuk elő C-t és D-t A és B affin kombinációjaként: $C = \lambda_1 A + \mu_1 B$, $D = \lambda_2 A + \mu_2 B$. Tudjuk (l. 1.4.2), hogy ilyenkor $(ABC) = \mu_1/\lambda_1$ és $(ABD) = \mu_2/\lambda_2$. Használjuk az X affin egyenes $\widehat{X}$ lineáris kiterjesztését és reprezentáljuk a négy pontot magukkal az A, B, C, D vektorokkal. Ekkor (1) felhasználásával közvetlenül a (2) állítást kapjuk.

(3): Legyen most is $C = \lambda_1 A + \mu_1 B$ a C pont előállítása A és B affin kombinációjaként. A $B - A \in \widehat{X}$ vektor az X egyenes irányvektora, így $\infty_X = [B - A]$. Az $(ABC\infty_X)$ kettősviszony (1) szerinti meghatározásához használt együtthatók tehát λ_1, μ_1, -1 és 1. Így $(ABC\infty_X) = -\mu_1/\lambda_1 = -(ABC)$. □

A kettősviszony 8.6.1-beli definíciójában (és a 8.6.6. Tételbeli kiszámítási eljárásokban is) a négy pont más-más szerepet játszik, ezért sorrendjük lényeges. Az alábbi állítás segítségével földerítjük, hogyan függ a kettősviszony értéke a négy pont sorrendjétől.

8.6.7. Állítás

(1) $(BACD) = (ABDC) = 1/(ABCD)$;

(2) $(ACBD) = 1 - (ABCD)$.

Bizonyítás: A 8.6.6.(1)-beli kiszámítási eljárásra hivatkozunk; legyen $A = [\mathbf{a}], B = [\mathbf{b}], C = [\mathbf{c}], D = [\mathbf{d}]$.

(1): Akár $\mathbf{c}$-t cseréljük föl $\mathbf{d}$-vel, akár $\mathbf{a}$-t cseréljük föl $\mathbf{b}$-vel, a 8.6.6.(1)-beli hányados a reciprokára változik.

(2): Ha $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}$ és $\mathbf{d} = \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a}$-t és $\mathbf{c}$-t bázis gyanánt használva

$$\mathbf{b} = -\frac{\lambda_1}{\mu_1}\mathbf{a} + \frac{1}{\mu_1}\mathbf{c} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{d} = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1\mu_2}{\mu_1}\right)\mathbf{a} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\mathbf{c}\,.$$

Innen

$$(ACBD) = \frac{1}{-\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2} = \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2} = 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 1 - (ABCD)\,.$$

□

8.6.8. Következmény. *$(ABCD) = \lambda$ esetén az A, B, C, D pontok permutációihoz tartozó összes kettősviszonyérték:*

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad 1-\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}\,.$$

Bizonyítás: Valóban, a négy pont összes permutációja előáll a 8.6.7-ben szereplő három transzpozíció szorzataként, ezért a keresett értékek λ-ból a reciprokképzés és az 1-ből való kivonás ismételt alkalmazásával állnak elő. A felsorolt hat érték valóban előáll ilyen módon, és közülük a kétféle lépés egyike sem vezet ki. □

A fenti hat kettősviszonyérték közül bizonyosak egybeeshetnek λ speciális megválasztása esetén. Ilyen speciális érték a $\lambda = -1$, amelyhez a pontok permutációit is tekintetbe véve még a 2 és 1/2 értékek tartoznak. Ahhoz, hogy ezek az értékek egyáltalán felléphessenek kettősviszonyként (azaz 0-tól és 1-től különbözzenek), illetve hogy az alaptestben egyáltalán értelmezhetők legyenek, szükséges, hogy ott lehessen 2-vel osztani. Ezért ennek a szakasznak a hátralevő részében feltesszük, hogy $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$.

8.6.9. Definíció (Harmonikus négyes, harmonikus társ). Legyen A, B, C, D valamely projektív tér négy különböző kollineáris pontja. Ezek harmonikus négyest alkotnak, ha $(ABCD) = -1$.

A 8.6.7. Állítás folytán ilyenkor az $(BACD)$, $(ABDC)$, $(BADC)$, $(CDAB)$, $(DCAB)$, $(CDBA)$, $(DCBA)$ kettősviszonyok is mindannyian egyenlők (-1)-gyel (és a többi permutációhoz tartozó érték 2 vagy 1/2). Ebből látható, hogy a kettősviszony -1 volta ténylegesen egy az $\{A, B\}$ és $\{C, D\}$ (rendezetlen) pontpárok között fennálló szimmetrikus viszonyt fejez ki. (A valós projektív geometriában ezt a viszonyt harmonikus elválasztásnak szokás nevezni, l. 8.6.2.)

Ha A, B és C három különböző kollineáris pont, akkor egyetlen olyan D pont létezik, melyre $(ABCD) = -1$; ezt a D pontot a C harmonikus társának

nevezzük az A és B pontokra nézve. Nyilván ilyenkor D-nek C a harmonikus társa, továbbá A és B is egymás harmonikus társai C-re és D-re nézve.

8.6.10. Példák. Az alábbi klasszikus geometriai jellegű példákban az első kivételével feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

- Ha F az L affin egyenes A és B pontja közti felezőpont (azaz F az $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ affin kombináció), akkor F harmonikus társa A-ra és B-re nézve a ∞_L ideális pont.

  Ez 8.6.6.(3) közvetlen következménye, figyelembe véve, hogy $(ABF) = = 1$.

- Ha Y és Z az euklideszi síkban fekvő M és N metsző közönséges egyenesek két szögfelezője, akkor $(MNYZ) = -1$.

  Messük el ugyanis az egyik szögfelezőt egy rá merőleges, a metszésponton át nem haladó egyenessel, alkalmazzuk erre az egyenesre az előző példa megállapítását, majd hivatkozzunk 8.6.5-re.

- Ha az euklideszi síkban az ABC háromszög C-beli belső és külső szögfelezője az $\langle A, B\rangle$ egyenest a Q és R pontokban metszi, akkor $(ABQR) = = -1$.

  Ez az előző példa közvetlen következménye a Papposz–Steiner-tételre hivatkozva.

- Ha az euklideszi (vagy inverzív) egyenesen az A és B (különböző) pontok egymás inverzei a $\{Q, R\}$ pontpárra (mint 0-dimenziós gömbre) vonatkozóan, akkor $(ABQR) = -1$.

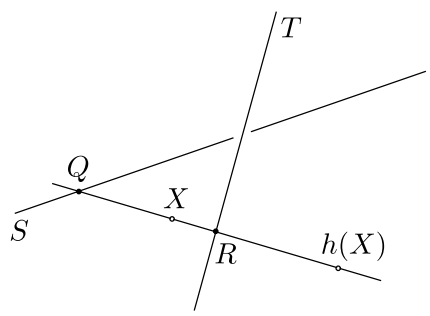
  Ez könnyen kiszámolható 8.6.5.(2) alapján, de az előző példából is származtatható a következő módon. Tekintsük a $[Q, R]$ szakaszra mint átmérőre állított kört az euklideszi síkban, ez Apollóniosz-kör az A és B alappontokra nézve. Ezért ennek a körnek egy tetszőleges további C pontjával $\langle C, Q\rangle$ és $\langle C, R\rangle$ az ABC háromszög belső és külső szögfelező egyenesei.

8.6.11. Definíció (Involúció). A $P = P(W)$ projektív tér másodrendű projektivitásait (tehát a $PGL(W)$ csoport másodrendű elemeit) a tér involúcióinak nevezzük.

Megjegyzés. Az involúció szót ennél jóval általánosabban is szokás érteni: tulajdonképpen bármilyen matematikai struktúra másodrendű automorfizmusai involúciók. Például az affin geometriában az affin szimmetriák, az euklideszi geometriában az ortogonális szimmetriák az involúciók.

8.6.12. Definíció (Harmonikus involúció). Rögzítsük a nemüres $S, T \subset \subset P$ projektív altereket úgy, hogy $S \cap T = \emptyset$ és $\dim S + \dim T = d - 1$ teljesüljön. Definiáljuk a $h = h_{S,T} : P \to P$ leképezést (az S és T által meghatározott harmonikus involúciót) a következőképpen. Legyen $X \in P$ tetszőleges. Ha $X \in S \cup T$, akkor legyen $h(X) = X$. Ha $X \notin S \cup T$, akkor egyértelműen találhatók olyan $Q \in S$ és $R \in T$ pontok, amelyekre X, Q és R kollineáris. (Valóban, a 8.1.5. dimenzióformula alkalmazásával ezek a pontok egyértelműen adódnak a $\{Q\} = S \cap \langle T, X\rangle$, $\{R\} = T \cap \langle S, X\rangle$ képletekből.) Legyen végül $h(X)$ az X harmonikus társa a Q, R pontokra nézve.

Nyilvánvaló, hogy h bijektív leképezés és $h \circ h = id_P$.



8.6.13. Példa. Ha $d = 1$, akkor S és T két különböző pont. Legyen $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ és legyen P egy euklideszi egyenes projektív lezártja. Ha S és T egyike az ideális pont, akkor a $h_{S,T}$ leképezés tükrözés a másik pontra, ha pedig mindkettő közönséges pont, akkor (a 8.6.10-beli negyedik példa alapján) $h_{S,T}$ az $\{S, T\}$ párra vonatkozó inverzió.

8.6.14. Állítás. *A harmonikus involúció projektív transzformáció.*

Bizonyítás: Használjuk a 8.6.12-beli jelöléseket. Legyen $P = P(W)$, $U, V \leq \leq W$, $S = P(U)$, $T = P(V)$. Ekkor a dimenziókra tett feltevés és $S \cap T = \emptyset$ miatt $W = U + V$ direktösszeg-felbontás. Legyen $\varphi : W \to W$ az a lineáris leképezés, amelyre $\varphi|_U = id_U$ és $\varphi|_V = -id_V$. Azt állítjuk, hogy $h = [\varphi]$. Nyilván a $[\varphi]$ transzformáció pontonként fixen hagyja S-et és T-t, így csak azt kell ellenőrizni, hogy bármely $A \in S$, $B \in T$, $X \in \langle A, B\rangle$, $X \neq A, B$ esetén $\big(A\,B\,X\,[\varphi](X)\big) = -1$ teljesül. Legyen $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $X = [\mathbf{x}]$, ekkor alkalmas α és β együtthatókkal $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ és $\varphi(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$. Ezért $\big(A\,B\,X\,[\varphi](X)\big) = (\beta/\alpha) : (-\beta/\alpha) = -1$. □

8.6.15. Állítás. *Ha az* $\mathbf{F}$ *alaptest algebrailag zárt, akkor bármely projektív involúció harmonikus involúció.*

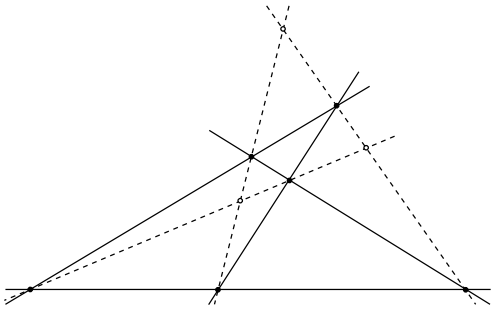
Bizonyítás: Tegyük föl, hogy $f : P(W) \to P(W)$ projektív involúció. Ekkor $f = [\varphi]$, ahol $\varphi \in GL(W)$ és $\varphi^2 = \lambda \cdot id_W$ alkalmas $\lambda \neq 0$-val. Jelölje $\sqrt{\lambda}$ a λ

egy négyzetgyökét $\mathbf{F}$-ben, és legyen $\psi = (1/\sqrt{\lambda}) \cdot \varphi$, ekkor $\psi \in GL(W)$, $f = [\psi]$, és $\psi^2 = id_W$. Miután a ψ leképezés a W vektortér lineáris involúciója, ψ-nek 1 és -1 a sajátértékei, és W felbomlik e két sajátértékhez tartozó U és V sajátaltér direkt összegére. Ekkor 8.6.14 bizonyításához hasonlóan $f = h_{S,T}$, ahol $S = P(U)$ és $T = P(V)$. □

Megjegyzések. (1) A 8.6.15. Állítás bizonyításában $\mathbf{F}$ algebrai zártságából csak annyit használtunk ki, hogy $\mathbf{F}$-ben bármely elemnek létezik négyzetgyöke.

(2) A 8.6.15. Állítás nem érvényes akármilyen test fölötti projektív geometriában. Például az euklideszi sík egy közönséges tartópontú sugársorán (mint a duális projektív sík egy egyenesén) a tartópont körüli $\pi/2$ szögű forgatás olyan projektív involúciót definiál (az ún. ortogonális involúciót), amely nem harmonikus, hiszen nincsen fixpontja. Ugyancsak ortogonális involúciónak nevezzük az euklideszi sík ideális egyenesén egy közönséges pont körüli derékszögű forgatással értelmezett projektivitást, ennek ugyanúgy nincsen fixpontja.
A (korábban tett) $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$ kikötés is lényeges, hiszen például a kételemű test fölötti projektív egyenes involúcióinak csak egyetlen fixpontja van.

8.6.16. Definíció (Teljes négyoldal, teljes négyszög). Általános helyzetűnek mondunk a projektív síkon négy egyenest, ha nincs köztük három, amely egy ponton halad át. Azt mondjuk hogy a projektív síkon négy általános helyzetű egyenes teljes négyoldalt alkot. A négy egyenest a teljes négyoldal oldalainak nevezzük. A teljes négyoldalnak hat csúcsa van: az oldalak páronként vett metszéspontjai. Két csúcs átellenes, ha nincsenek egy oldalon; így a hat csúcs három átellenes párba sorolódik. Az átellenes csúcspárok összekötő egyeneseit a teljes négyoldal átlóegyeneseinek nevezzük, ez három darab egyenes. Ezek metszéspontjait átlós pontoknak nevezzük.

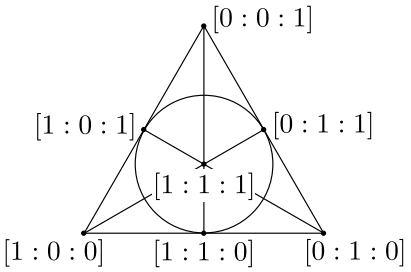


Ezeknek a fogalmaknak a dualizálásával rendre a teljes négyszöget és annak alkotóelemeit nyerjük: a projektív síkon négy általános helyzetű (azaz hármanként nem kollineáris) pont alkot teljes négyszöget, ennek hat oldala három átellenes párba rendeződik, az átellenes oldalak metszéspontjaiként adódik a három átlós pont, ezek összekötő egyenesei az átlós egyenesek.

8.6.17. Állítás (Fano tétele). *Bármely teljes négyoldal három átlóegyenese nem egy ponton halad át, azaz a teljes négyoldalnak három különböző átlós pontja van.*

Bizonyítás: Hagyjuk el az egyik átlóegyenest és dolgozzunk a maradék affin síkban. Itt a négy oldal két párhuzamos egyenespárrá válik; betűzzük a (közönséges) metszéspontjaikat úgy, hogy $\langle A, B\rangle \parallel \langle C, D\rangle$, és $\langle B, C\rangle \parallel \langle D, A\rangle$ legyen. Ekkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ miatt az $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ affin kombináció egyenlő az $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$ affin kombinációval. Ezért ez a pont illeszkedik az $\langle A, C\rangle$ átlóegyenesre is és a $\langle B, D\rangle$ átlóegyenesre is, tehát a teljes négyoldal átlós pontja. Miután az affin sík közönséges pontjáról van szó, ez a pont nem illeszkedhet az ideális átlóegyenesre. □

Megjegyzések. (1) A bizonyítás (a felezőpont konstrukciójával) lényegesen kihasználta, hogy $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$. A 8.6.17. Állításra a ennek a feltételnek az elengedésével nevezetes ellenpéldát szolgáltat az ún. Fano-féle sík: a kételemű test fölötti projektív sík.

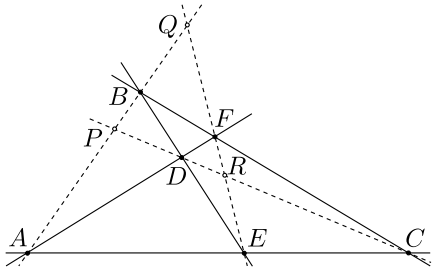


Itt a hét egyenes közül négy általános helyzetűt kiválasztva a maradék három egyenes szükségképpen egy ponton halad át, és ezek az egyenesek éppen a kiválasztott teljes négyoldal átlós egyenesei.

(2) A dualitás elvére hivatkozva rögtön következik, hogy bármely teljes négyszög három átlós pontja nem kollineáris, azaz a teljes négyszögnek három átlós egyenese van.

Az alábbi állítás azt mutatja, hogy bizonyos pontnégyesek harmonikus voltára már az illeszkedési tulajdonságokból is következtethetünk. Kétféle bizonyítást is adunk, mindkettő a projektív síkgeometria egy jellegzetes mószerét használja.

8.6.18. Állítás (A teljes négyoldal tétele). *Bármely teljes négyoldal bármelyik átlóegyenesén a két átlós pont egymás harmonikus társai a két csúcsra nézve.*



Első bizonyítás: Tegyük föl, hogy az A, B csúcsok és a P, Q átlós pontok illeszkednek egy átlóegyenesre, azt akarjuk belátni, hogy $(ABPQ) = -1$. Legyen C, D a négyoldal további két átellenes csúcsa, E az $\langle A, C\rangle$ egyenesen, F az $\langle A, D\rangle$ egyenesen lévő további csúcs, R pedig a harmadik átlós pont. Vetítsük az $\langle A, B\rangle$ egyenest először a C pontból mint középpontból az $\langle E, F\rangle$ átlóegyenesre, majd onnan a D pontból mint középpontból vissza az $\langle A, B\rangle$ egyenesre. Ekkor a Papposz–Steiner-tétel kétszeri alkalmazásával $(ABPQ) = (EFPR) = (BAPQ)$. Itt 8.6.7.(1) miatt $(BAPQ) = 1/(ABPQ)$, tehát $(ABPQ)$ olyan testelem, amely egyenlő a saját reciprokával. Mivel a kettősviszony értéke 1 nem lehet, $(ABPQ) = -1$.

Második bizonyítás: Ha egy teljes négyoldal egy kiszemelt átlóegyenesén kívánjuk a harmonikus elválasztást belátni, akkor 8.6.17 bizonyításához hasonlóan hagyjuk el a másik két átlóegyenes egyikét a projektív síkból. A maradék affin síkban a kiszemelt átlóegyenesen 8.6.17 bizonyítása szerint a közönséges átlós pont a két csúcs közötti felezőpont. A 8.6.10-beli első példa szerint ennek a pontnak az ideális átlós pont a harmonikus társa. □

Megjegyzés. A bizonyítások dualizálásával látható, hogy érvényes a teljes négyszög tétele is: bármely teljes négyszög bármelyik átlós pontjához mint tartóponthoz tartozó sugársorban a két átlós egyenes egymás harmonikus társai a két oldalegyenesre nézve. Ez az észrevétel tulajdonképpen azt jelenti, hogy a pontnégyesek, illetve a sugárnégyesek harmonikus viszonya egymás duálisai.

8.7. A projektív egyenes geometriája

Olyan projektív transzformációkat vizsgálunk, amelyek egy egyenest képeznek önmagára, illetve amelyek valamely projektív sík egy egyenesét képezik ugyanannak a síknak egy másik egyenesére.

8.7.1. Definíció (Törtlineáris függvény). Válasszunk egy tetszőleges $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{F})$ invertálható 2×2-es mátrixot. Az A által létesített törtlineáris függvénynek nevezzük azt az $f : \overline{\mathbf{F}} \to \overline{\mathbf{F}}$ leképezést, melyre $x \in \mathbf{F}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d}\,, & \text{ha } c = 0 \text{ vagy } x \neq -\dfrac{d}{c}\,, \\ \infty\,, & \text{ha } c \neq 0,\ x = -\dfrac{d}{c}\,, \end{cases}$$

valamint

$$f(\infty) = \begin{cases} \dfrac{a}{c}\,, & \text{ha } c \neq 0\,, \\ \infty\,, & \text{ha } c = 0\,. \end{cases}$$

Megjegyzés. A ∞-nel végzett műveletekre vonatkozó értelemszerű megállapodásokkal (pl. $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$, $\infty + 1 = \infty$, $\infty/\infty = 1$) az $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ formula az összes esetet felöleli. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$, akkor a ∞-től különböző pontok körében értelmezett $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ függvény egyértelműen terjeszthető ki folytonos $\overline{\mathbf{F}} \to \overline{\mathbf{F}}$ leképezéssé, mégpedig éppen a 8.7.1-ben leírt módon.

8.7.2. Tétel. *A 8.4.3-beli $\overline{\mathbf{F}} = P(\mathbf{F}^2)$ azonosítás mellett bármely $A \in GL(2, \mathbf{F})$ mátrix által létesített törtlineáris függvény azonos az $[A]$ projektív transzformációval.*

Bizonyítás: Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Az egyenes pontjai esetében az $x = [x_1 : x_2]$ azonosítás azt jelenti, hogy $x_2 \neq 0$ esetén $x = [x : 1] = x_1/x_2$, illetve $x_2 = 0$ esetén $x = [1 : 0] = \infty$. Ekkor a fenti megjegyzésben említett egyszerűsítésekkel élve

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \frac{ax_1 + bx_2}{cx_1 + dx_2} = \frac{ax+b}{cx+d}\,. \qquad \square$$

8.7.3. Következmény. *A törtlineáris függvények a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, amely az $\overline{\mathbf{F}} = P(\mathbf{F}^2)$ azonosítás következtében éppen a $PGL(2, \mathbf{F})$ projektív csoporttal azonos.* $\square$

A 8.7.3. Következmény lehetővé teszi, hogy a valós, illetve a komplex esetben az egyenes projektív geometriáját kapcsolatba hozzuk az euklideszi egyenes, illetve sík Möbius-transzformációival és inverzív geometriájával. Ezekben az esetekben a projektív lezárás azonos az inverzív bővítéssel: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} = \mathbf{R}^+$ és $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\} = (\mathbf{R}^2)^+$.

Az alábbi megállapítások szerint a valós egyenes projektív geometriája azonosnak tekinthető az egydimenziós inverzív geometriával, a komplex egyenes projektív geometriája pedig a kétdimenziós irányítástartó inverzív geometriával, a kettő közti kapcsolatot pedig a Poincaré-kiterjesztés (l. 5.3.9) adja.

8.7.4. Tétel

(1) $PGL(2, \mathbf{R}) = \mathcal{M}(\mathbf{R})$.

(2) $PGL(2, \mathbf{C}) = \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^2)$.

(3) *Ha $f \in PGL(2, \mathbf{R})$ irányítástartó Möbius-transzformáció, akkor az $f^{\mathbf{C}} \in PGL(2, \mathbf{C})$ komplexifikált transzformáció a $p_{\mathbf{R}}^{\mathbf{C}}(f)$ Poincaré-kiterjesztéssel azonos. Ha f irányításváltó, akkor $f^{\mathbf{C}}$ a $p_{\mathbf{R}}^{\mathbf{C}}(f)$ és a komplex konjugálás kompozíciója.*

(4) *Legyen $[A] \in PGL(2, \mathbf{R})$ tetszőleges. Ekkor $[A]$ mint Möbius-transzformáció pontosan akkor irányítástartó, ha* $\det A > 0$.

Bizonyítás: (1) és (2): A $\subseteq$ tartalmazáshoz elég észrevenni, hogy bármely törtlineáris függvény előáll $x \mapsto x + a$, $x \mapsto bx$ és $x \mapsto 1/x$ alakú leképezések kompozíciójaként, amelyek mindegyike a megfelelő Möbius-csoportban van.

A projektív csoport tehát mindkét esetben részcsoportja a megfelelő Möbius-csoportnak, emellett a projektív csoport tranzitívan hat a projektív egyenesen. A ∞ elem stabilizátora az egyenes affin csoportja, amely a valós esetben az euklideszi egyenes hasonlóságaiból, a komplex esetben az euklideszi sík irányítástartó hasonlóságaiból áll. Emiatt a fordított irányú tartalmazás az alábbi 8.7.5. Lemmából következik.

(3): Mind $f^{\mathbf{C}}$, mind $p_{\mathbf{R}}^{\mathbf{C}}(f)$ Möbius-transzformáció a $\mathbf{C}^+$ inverzív síkon, továbbá a két leképezés egybeesik az $\mathbf{R}^+$ egyenesen. Ezért az 5.3.8. egyértelműségi lemma miatt legfeljebb a komplex konjugálásban térhetnek el egymástól. Azt, hogy azonosak-e vagy sem, a Poincaré-kiterjesztés irányítástartó, illetve -váltó mivolta dönti el: ha irányításváltó, akkor kell komponálni a komplex konjugálással. A $p_{\mathbf{R}}^{\mathbf{C}}(f)$ kiterjesztés pedig pontosan akkor irányításváltó a $\mathbf{C}^+$ síkon, ha f irányításváltó az $\mathbf{R}^+$ egyenesen.

(4): Elegendő azt ellenőrizni, hogy a $PGL(2, \mathbf{R}) = \mathcal{M}(\mathbf{R})$-beli tükrözéseket és inverziókat negatív determinánsú mátrixok reprezentálják. Miután a Möbius-csoportban az összes tükrözés és inverzió konjugált, ezt elég egyetlen tükrözés, például a 0-ra vonatkozó $x \mapsto -x$ tükrözés esetében látni. Ennek a tükrözésnek a mátrixa $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, amelynek a determinánsa valóban negatív. $\square$

8.7.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon, és $H \leq$ $\leq G$ olyan részcsoport, hogy a hatás H-ra történő leszűkítése tranzitív X-en, továbbá valamely $x \in X$-re $H_x = G_x$. Ekkor $H = G$.*

Bizonyítás: Legyen $g \in G$ tetszőleges. A H csoport tranzitivitása miatt létezik olyan $h \in H$, amelyre $h(gx) = x$. Ekkor $hg \in G_x = H_x \leq H$, így $g \in H$. $\square$

Megjegyzés. 8.7.4 szerint tehát a $\overline{\mathbf{C}}$ Riemann-számgömb projektív transzformációi körtartó leképezések. Az $\overline{\mathbf{R}}$ valós tengelyt ezek a leképezések a gömbön fekvő körökbe képezik, ezért a 8.3.12. Tételre hivatkozva látjuk, hogy ezek a körök pontosan a komplex projektív egyenes valós részegyenesei. Ezáltal a síkbeli inverziókra vonatkozóan is új interpretációt nyertünk: az inverzív síkon a tengelyes tükrözések és az inverziók pontosan a valós részegyenesekre vonatkozó komplex konjugálások.

8.7.6. Definíció (Elliptikus, parabolikus, hiperbolikus projektivitás). Legyen P projektív egyenes és $f : P \to P$ projektív transzformáció. Azt mondjuk, hogy az f projektivitás elliptikus, parabolikus, illetve hiperbolikus, ha f-nek 0, 1, illetve 2 fixpontja van P-ben.

Miután az egyenesen három különböző pont projektív bázist alkot, a 8.3.8. Tétel alapján az egyenes bármely nem-identikus projektivitásának legfeljebb 2 fixpontja lehet, ezért az vagy elliptikus, vagy parabolikus, vagy hiperbolikus.

8.7.7. Példák

- Legyen r az E euklideszi síknak egy közönséges pont körüli (nem π egész számú többszörösével történő) forgatása. A középpontra mint tartópontra illesztett sugársoron r elliptikus projektivitást indukál. Ha az $\overline{r} : \overline{E} \to \overline{E}$ projektív kiterjesztést megszorítjuk a ∞_E ideális egyenesre, ezzel elliptikus projektivitást kapunk a ∞_E valós projektív egyenesen. Ezeknek a konstrukcióknak a speciális esetei a 8.6.15-öt követő második megjegyzésben említett ortogonális involúciók.

- Legyen t valamely X affin egyenes (nemtriviális) eltolása. Ekkor a $\overline{t}$: : $\overline{X} \to \overline{X}$ projektív kiterjesztés parabolikus projektivitás, hiszen ∞_X az egyetlen fixpontja. Megfordítva, ha F jelöli a P projektív egyenes tetszőleges parabolikus projektivitásának a fixpontját, akkor ennek a projektivitásnak a $P - \{F\}$ affin egyenesre történő leszűkítése szükségképpen eltolás, hiszen az egyenes affinitásai között csak az eltolásoknak nincs fixpontja.

- Ha h tetszőleges (1-től különböző arányú) homotécia az X affin egyenesen, akkor a $\overline{h} : \overline{X} \to \overline{X}$ projektív kiterjesztés hiperbolikus projektivitás. Megfordítva, ha F a P projektív egyenes valamely hiperbolikus

projektivitásának az egyik fixpontja, akkor ennek a projektivitásnak a $P-\{F\}$ affin egyenesre történő leszűkítése homotécia, hiszen az egyenes fixponttal bíró affinitásai homotéciák.

Megjegyzés. Egyes szakirodalmi források régebbi keletű terminológiát követve a komplex projektív egyenes két fixponttal bíró projektív transzformációit nem hiperbolikus, hanem loxodromikus transzformációknak nevezik. Ennek az a magyarázata, hogy ha egy ilyen transzformáció fixpontjai a Riemann-számgömb két átellenes pontja, akkor a transzformációt iterálva a pontok képei tipikus esetben egy gömbi spirális, ún. loxodróma mentén sorakoznak. A loxodrómák történeti jelentőségét az adta, hogy ezek a gömb földrajzi koordinátavonalait állandó szögben metsző görbék, ezért a tengerhajózás számára fontos és könnyen navigálható útvonalak.

8.7.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *és legyen* $f = [A]$ *a* $P(\mathbf{R}^2)$ *valós projektív egyenes nem-identikus projektivitása, ahol* $A \in GL(2, \mathbf{R})$. *Ekkor* f *pontosan aszerint elliptikus, parabolikus, illetve hiperbolikus, hogy*

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2 < \det A\,, \quad \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2 = \det A\,, \quad \textit{illetve} \quad \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2 > \det A\,.$$

Bizonyítás: A fixpontok száma a lineárisan független sajátvektorok számával, az pedig a karakterisztikus polinom gyökeinek a számával egyenlő. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + (\det A)$, ezért a gyökök száma aszerint 0, 1, vagy 2, hogy a $(\operatorname{tr} A)^2 - 4(\det A)$ diszkrimináns negatív, zérus, illetve pozitív. □

8.7.9. Példa. Az elliptikus, parabolikus, illetve hiperbolikus elnevezéseket az alábbi észrevételek indokolják. Jelölje $t \in \mathbf{R}$-re $A(t)$, $B(t)$ és $C(t)$ a következő 2×2-es mátrixokat:

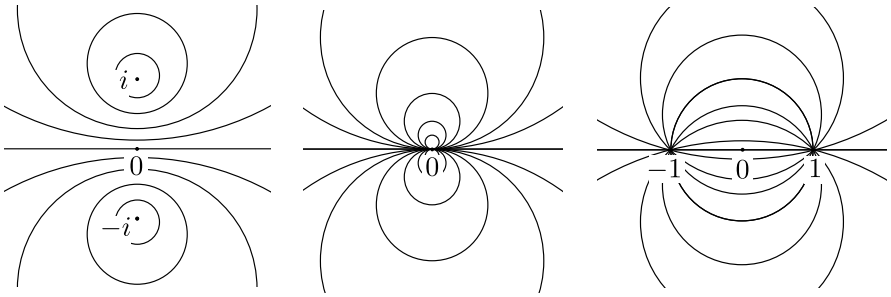
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Rögtön látható, hogy $t \notin \mathbf{Z}\pi$-re $A(t)$ elliptikus, $t \neq 0$-ra $B(t)$ parabolikus, $C(t)$ hiperbolikus projektivitást létesít a $\mathbf{P}^1 = P(\mathbf{R}^2)$ valós projektív egyenesen. Azt sem nehéz meggondolni, hogy az egyenes bármely irányítástartó (azaz pozitív determinánsú lineáris transzformáció által indukált) projektivitása alkalmas bázist választva e három mátrix valamelyikével adható meg.

A $t \mapsto A(t), B(t), C(t)$ hozzárendelések folytonos homomorfizmusok az $\mathbf{R}$ additív csoportból $GL(2, \mathbf{R})$-be és így az $\mathbf{R}$ csoportnak egy-egy folytonos és projektív hatását definiálják a valós projektív egyenesen.

Ezeknek a hatásoknak a megértéséhez segítséget ad a transzformációk komplexifikáltja. Tekintsük ugyanezeket a mátrixokat $GL(2, \mathbf{C})$ elemeinek, és vizs-

gáljuk a komplex projektív egyenesen általuk létesített projektív transzformációkat (azaz 8.7.4.(2) szerint Möbius-transzformációkat), illetve a fenti **R**-hatás $\overline{\mathbf{C}}$-beli orbitjait.



A $t \mapsto [A(t)]$ hatás orbitjai az i és $-i$ alappontokhoz tartozó (Apollóniosz-féle) elliptikus körsor tagjai. Erről a következőképpen győződhetünk meg. Az $A(t)$ mátrixnak $\mathbf{C}$ fölött $(i,1)$ és $(1,i)$ sajátvektorai, ezért $A(t)$-t (a t paramétertől függetlenül) $\mathbf{C}$ fölött azzal a transzformációval diagonalizálhatjuk, amely az $i = [i : 1]$ és $-i = [1 : i]$ pontokat a 0 és ∞ pontokba viszi. A diagonalizált hatás (mátrixalakban az $\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$, törtlineáris alakban az $x \mapsto e^{2it}x$ transzformációk) orbitjai a 0 körüli koncentrikus körsort alkotják. A diagonalizáló Möbius-transzformáció inverze ezt a koncentrikus körsort a fenti elliptikus körsorba képezi.

A $t \mapsto [B(t)]$ hatás orbitjai a valós tengelyt 0-ban érintő parabolikus körsort alkotják olyan módon, hogy a körsor tartópontja egyelemű orbit, a többi orbit pedig a körsor tagjai ettől a pontjuktól megfosztva. Magyarázat: a $\mathbf{C}^2$-beli két bázisvektor felcserélése (azaz az $x \mapsto 1/x$ Möbius-transzformáció) a $[B(t)]$ transzformációt $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$-be (illetve törtlineáris alakban az $x \mapsto x + t$ leképezésbe) konjugálja, amelynek az orbitjai a valós tengellyel párhuzamos sugársort alkotják (a $\{\infty\}$ egyelemű orbittal együtt). Ennek a képe az $x \mapsto 1/x$ leképezésnél a fenti parabolikus körsor.

A $t \mapsto [C(t)]$ hatás orbitjai az 1 és -1 tartópontú hiperbolikus körsort alkotják olyan módon, hogy a körsor tartópontjai egyelemű orbitok, a többi orbit pedig a körsor tagjainak e pontok közötti ívei. Magyarázat: a $C(t)$ mátrix sajátvektorai a (1,1) és $(-1,1)$ vektorok, ezért $C(t)$-t (már $\mathbf{R}$ fölött) az a transzformáció diagonalizálja, amely az $1 = [1 : 1]$ és $-1 = [-1 : 1]$ pontokat viszi 0-ba és ∞-be; a diagonális alak $\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$, amelynek az orbitjai $\{0\}$ és $\{\infty\}$, valamint a 0 tartópontú sugársor nyílt félegyenesei. Ennek a sugársornak a képe a diagonalizáló leképezés inverzénél a fenti hiperbolikus körsor. $\square$

Megjegyzés. Általában valamilyen geometriai téren egyparaméteres transzformációcsoportnak szokás nevezni az $\mathbf{R}$ additív csoport olyan folytonos hatását, amely a térre jellemző transzformációkból áll. Például az euklideszi síkgeometriában egyparaméteres transzformációcsoportot alkotnak valamely rögzített pont körüli forgatások (ha a forgásszöggel arányos paraméterrel paraméterezzük őket), illetve valamely rögzített egyenesállással párhuzamos eltolások (ha az eltolási távolsággal arányos paraméterrel paraméterezzük őket). Könnyű megmutatni, hogy ezeken kívül nincs más egyparaméteres transzformációcsoport az euklideszi síkon. Az egyparaméteres transzformációcsoportok orbitjai a vizsgált geometriában kitüntetett szerepet játszó görbék. Az euklideszi sík esetében ezek (az „elfajuló" egypontú orbitoktól eltekintve) pontosan a körök és az egyenesek. A 8.7.9. Példában a valós projektív egyenes egyparaméteres transzformációcsoportjait írtuk le. Ezeknek a $\overline{\mathbf{C}}$-beli orbitjai olyan görbék, amelyek fontosságát majd a hiperbolikus geometriában is látni fogjuk.

A következő tétel a projektív egyenes involúcióit (azaz másodrendű projektivitásait) írja le. Miután a kettősviszony és a harmonikus pontnégyesek szerepet játszanak a bizonyításban, feltesszük, hogy az alaptest karakterisztikája különbözik 2-től.

8.7.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$ *és legyen* P *projektív egyenes* $\mathbf{F}$ *fölött. Ekkor:*

(1) *Ha* P *valamely projektivitása egy pontpárt felcserél, akkor involúció. Azaz, ha* $f : P \to P$ *projektív transzformáció és létezik olyan* A, $B \in P$, $A \neq B$, *melyekre* $f(A) = B$ *és* $f(B) = A$, *akkor* $f \circ f = id_P$.

(2) P *bármely involúciója vagy elliptikus, vagy hiperbolikus, azaz nem lehet pontosan egy fixpontja.*

(3) P *hiperbolikus involúciói pontosan a harmonikus involúciók* P*-ben.*

(4) *A* P *egyenes bármely involúcióját két pontpár egyértelműen meghatározza, és ez a két pontpár tetszőlegesen előírható. Azaz, ha* A, A', B, $B' \in P$ *és* $\{A, A'\} \cap \{B, B'\} = \emptyset$, *akkor létezik egyetlen olyan* $f : P \to P$ *involúció, amelynél* $f(A) = A'$ *és* $f(B) = B'$.

(Megjegyezzük, hogy itt nem kell feltenni, hogy $A \neq A'$ *vagy* $B \neq B'$.*)*

(5) *Az egyenes projektivitásai csoportjában az involúciók generátorrendszert alkotnak.*

(6) *Ha* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *és* A, B, C, D *a valós projektív egyenes négy különböző pontja, akkor az* A*-t* B*-vel és* C*-t* D*-vel felcserélő (és* (4) *alapján egyértelműen létező) involúció elliptikus, ha* $(ABCD) < 0$, *és hiperbolikus, ha* $(ABCD) > 0$.

(7) *Ha* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *és* P *egy euklideszi egyenes projektív lezárása, akkor* P*-n a harmonikus involúciók azonosak a pontpárokra vonatkozó inverziókkal (illetve tükrözésekkel, ha a pár egyik tagja* ∞*.)*

Bizonyítás: (1): Legyen $C \in P - \{A, B\}$ tetszőleges, belátjuk, hogy $f\big(f(C)\big) = C$. Feltehetjük, hogy $D = f(C) \neq C$. Ekkor A, B, C és D négy különböző pont és tekinthetjük a kettősviszonyukat. A 8.6.2. Tételt és 8.6.7.(1)-et alkalmazva

$$(ABCD) = \big(f(A)\, f(B)\, f(C)\, f(D)\big) = \big(B\, A\, D\, f(D)\big) = \big(A\, B\, f(D)\, D\big)\,,$$

ahonnan $C = f(D)$ következik.

(2): A 8.7.7-beli második példa szerint a parabolikus transzformációk pontosan az affin egyenes nemtriviális eltolásai. Márpedig $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$ esetén az affin egyenesen nincsen másodrendű eltolás, hiszen affin koordinátázás mellett egy másodrendű eltolás csakis olyan zérustól különböző $x \in \mathbf{F}$ elemmel történhetne, amelyre $2x = 0$).

(3): Ha S és T az f involúció két különböző fixpontja, akkor bármely további $X \in P$ pontra 8.6.2 miatt $\lambda = \big(S\, T\, X\, f(X)\big) = \big(S\, T\, f(X)\, X\big)$, ahonnan $\lambda = 1/\lambda$, azaz $\lambda = -1$. Ezért $f = h_{S,T}$ harmonikus involúció.

(4): Ha $A = A'$ és $B = B'$, akkor (3) alapján ez a két fixpont f-et egyértelműen meghatározza. Ha a két pontpár közül legalább az egyik nem egybeeső, például $B \neq B'$, akkor A, B, B' és A', B', B projektív bázisok. Ezért egyértelműen létezik olyan $f : P \to P$ projektív transzformáció, amelyre $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(B') = B$. Ez az f felcseréli B-t B'-vel, ezért az (1) állítás miatt involúció, és így $f(A') = A$ is teljesül.

(5): Megmutatjuk, hogy bármely $f : P \to P$ projektív transzformáció előáll legfeljebb két involúció szorzataként. Legyen f adva az A, B, C projektív bázissal és az A', B', C' képpontokkal. Feltehetjük, hogy sem A, sem B nem fixpontja f-nek, ugyanis P legalább négyelemű, így A és B kiválasztásánál elkerülhetjük f esetleges fixpontjait. Ezért az A és B' pontok egyike sem esik egybe a B és A' pontok egyikével sem. Tekinthetjük tehát a (4) állítás alapján azt az $i : P \to P$ involúciót, amely A-t B'-vel és B-t A'-vel cseréli föl. Legyen $D = i(C)$, ekkor A' és B' egyike sem esik egybe D és C' egyikével sem, ezért ismét a (4) állítást alkalmazva vehetjük azt a $j : P \to P$ involúciót, amely A'-t B'-vel és D-t C'-vel cseréli föl. Nyilván $f = j \circ i$.

(6): Vigyük át az A, B, C, D pontokat a 8.6.1-beli $f_{ABC} : P \to \overline{\mathbf{R}}$ projektív transzformációval rendre a ∞, 0, 1, t elemekbe, ahol $t = (ABCD)$. Elég belátni, hogy a kérdéses $i : P \to P$ involúció helyett a $j = f_{ABC} \circ i \circ f_{ABC}^{-1} : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ involúció elliptikus, ha $t < 0$ és hiperbolikus, ha $t > 0$. Legyen törtlineáris alakban $j(x) = (ax + b)/(cx + d)$; itt $j(0) = \infty$ miatt $d = 0$, valamint $j(\infty) = 0$ miatt $a = 0$, továbbá $j(1) = t$ miatt $t = b/c$. A j leképezés

képlete tehát $x \mapsto t/x$. Egy ilyen leképezésnek nincs valós fixpontja, ha $t < 0$, és két valós fixpontja van (mégpedig $\pm\sqrt{t}$), ha $t > 0$.

(7): Azonnal adódik (3), (4) és 8.7.4.(1) összevetéséből. □

Megjegyzések. (1) Meggondolható, hogy az (1)–(4) állítások egyike sem marad igaz a $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$ feltétel elejtésével. A kételemű test fölötti egyenes projektivitásai közül például pontosan az involúciók parabolikusak.

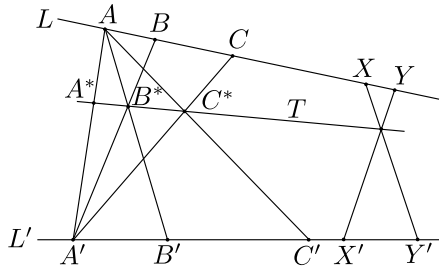
Rátérünk olyan projektív transzformációk vizsgálatára, amelyek egy sík két különböző egyenese között vannak értelmezve. A szakasz hátralevő részében legyen tehát P projektív sík, legyenek L, $L' \subset P$ egyenesek, $L \neq L'$, és $\{M\} = L \cap L'$. Ha $f : L \to L'$ projektív transzformáció, akkor $X \in L$-re $X' \in L'$ jelölje az $f(X)$ pontot.

8.7.11. Állítás. *f pontosan akkor perspektivitás, ha $M' = M$.*

Bizonyítás: Perspektivitásnál nyilvánvalóan $M' = M$, ezért csak a fordított irányú állítást kell bebizonyítani. Tegyük tehát föl, hogy $M' = M$. Válasszunk az L egyenesen két egymástól és M-től is különböző pontot, A-t és B-t. Ekkor $\langle A, A' \rangle$ és $\langle B, B' \rangle$ két különböző egyenes; legyen C a metszéspontjuk, nyilván C nem illeszkedik sem L-re, sem L'-re. A C középpontú perspektivitásnál az A, B, M projektív bázis az A', B', M' pontokba kerül, így a 8.3.8. Tételbeli unicitási tulajdonság miatt f azonos ezzel a perspektivitással. □

8.7.12. Tétel. *Legyen $f : L \to L'$ tetszőleges projektivitás. Ekkor az $\langle X, Y' \rangle \cap \cap \langle X', Y \rangle$ metszéspontként előálló pontok halmaza, ahol $X, Y \in L$, $X \neq Y$, egyenes.*

Bizonyítás: Rögzítsünk három különböző pontot, A-t, B-t és C-t az L egyenesen úgy, hogy az A, B, C, A', B', C' pontok mind különbözzenek az M metszésponttól. Alkalmazzuk Papposz tételét erre a két ponthármasra. Jelöljük T-vel a Papposz-féle egyenest, azaz $T = \langle B^*, C^* \rangle$, ahol $B^* = \langle A, B' \rangle \cap \langle A', B \rangle$ és $C^* = \langle A, C' \rangle \cap \langle A', C \rangle$. Legyen továbbá $A^* = T \cap \langle A, A' \rangle$.



Vegyük észre, hogy az f leképezés előáll két centrális vetítés kompozíciójaként. Vetítsük először az L egyenest T-re az A' középpontból, majd T-t L'-re

az A középpontból. A vetítések A-t, B-t és C-t először az A^*, B^*, $C^* \in T$ pontokba, majd rendre A'-be, B'-be, illetve C'-be viszik. Ezért a 8.3.8. Tételbeli unicitásra hivatkozva a kompozíció f-fel egyenlő.

Tekintsük most az L egyenes két tetszőleges, A-tól és egymástól is különböző X és Y pontját. Alkalmazzuk ismét Papposz tételét most az A, X, Y és az A', X', Y' ponthármasra. A Papposz-tételbeli három metszéspont közül kettő (mégpedig $\langle A, X'\rangle \cap \langle A', X\rangle$ és $\langle A, Y'\rangle \cap \langle A', Y\rangle$) az előbbi észrevétel miatt a T egyenesre illeszkedik, ezért a harmadik, $\langle X, Y'\rangle \cap \langle X', Y\rangle$ is illeszkedik rá.

Ezzel beláttuk, hogy az összes $\langle X, Y'\rangle \cap \langle X', Y\rangle$ alakú metszéspont egy egyenesre, mégpedig a fent előállított T-re illeszkedik. Megfordítva, T bármely pontja a fenti konstrukcióban előáll X^*-ként alkalmas $X \in L$ mellett, ezért ha $X^* \neq A^*$, akkor $X^* = \langle A, X'\rangle \cap \langle X, A'\rangle$. Végül A^* is előállítható ilyen módon, ha a konstrukcióban például A és B szerepét fölcseréljük. □

8.7.13. Definíció (Steiner-tengely). A 8.7.12. Tételbeli egyenest az f projektív transzformáció Steiner-tengelyének nevezzük.

Az alábbi észrevétel rögtön adódik a Steiner-tengely definíciójából.

8.7.14. Állítás. *A Steiner-tengely az L egyenest az $f^{-1}(M)$ pontban, L'-t az $f(M)$ pontban metszi. Akkor és csak akkor halad át M-en, ha f perspektivitás.* □

A 8.7.12. Tétel bizonyításában lényeges szerepet játszott, hogy a két egyenes között adott projektív transzformációt elő tudtuk állítani két perspektivitás egymásutánjaként olyan módon, hogy először az első egyenest a Steiner-tengelyre, majd a Steiner-tengelyt a második egyenesre vetítettük. Ezt az észrevételt érdemes külön állításként is rögzíteni.

8.7.15. Következmény. *Bármely $f : L \to L'$ projektivitás előáll legfeljebb két perspektivitás egymásutánjaként. Ha adott f Steiner-tengelye, T, valamint egy $A \in L$ pont az $A' = f(A)$ képével, melyekre $A, A' \notin T$, akkor f azonos az A', illetve A középpontú $L \to T$ és $T \to L'$ vetítések kompozíciójával.* □

Tekintsük most a duális projektív sík két egyenesét, azaz két (különböző) sugársort, S-et és S'-t a P síkban. A dualitás elve miatt a 8.7.11–8.7.15-beli fogalmak és megállapítások az $S \to S'$ projektív transzformációkra vonatkozóan is értelemmel bírnak és érvényesek. Egy ilyen transzformáció (a definíció dualizálása szerint) akkor perspektivitás, ha létezik olyan $C \subset P$ egyenes, hogy minden $X \in S$-re az X, X' és C egyenesek egy ponton haladnak át.

8.7.16. Definíció (Steiner-centrum). A 8.7.12. Tétel dualizálásával azt kapjuk, hogy bármely $f : S \to S'$ projektív transzformációnál az $\langle X \cap \cap Y', X' \cap Y\rangle$ alakú egyenesek (ahol $X, Y \in S$) sugársort alkotnak. Ennek a sugársornak a tartópontját nevezzük f Steiner-centrumának. A Steiner-centrum akkor és csak akkor kollineáris a két sugársor tartópontjával, ha f perspektivitás.

8.7.17. Definíció (Projektív képződmény). Legyen adott egy $f : X \mapsto X'$ projektív transzformáció a P-beli S sugársorról a szintén P-beli $S' \neq S$ sugársorra. Az f projektív képződményének nevezzük az

$$\{X \cap X' \,:\, X \in S\} \;\subseteq\; P$$

ponthalmazt a P projektív síkon.
Ha f perspektivitás, akkor a tartópontokat összekötő M egyenesre (azaz amelyre $\{M\} = S \cap S'$) $M = M'$ áll; ebben az esetben M-et kihagyjuk a projektív képződmény definíciójában számításba vett X egyenesek közül. Egyébként $X \cap X'$ mindig pontot állít elő.
Perspektivitások esetében a projektív képződmény a perspektivitás definíciójából közvetlenül adódóan egyenes. (Pontosabban egy pont híján egyenes, hiszen ha a perspektivitást a C egyenes származtatja, akkor a $C \cap M$ pont nem tartozik a halmazhoz.)

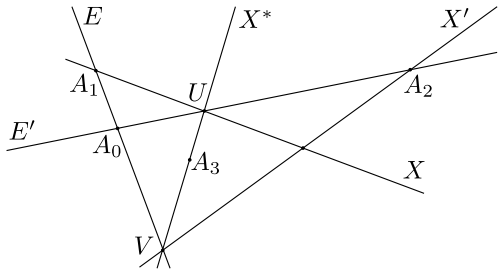
Megjegyzés. Ha f nem perspektivitás, akkor S és S' tartópontja is hozzátartozik a projektív képződményhez, hiszen ezek előállnak $f^{-1}(M) \cap M$, illetve $M \cap M'$ alakban. A Steiner-centrum általában nem eleme a képződménynek; későbbi ismereteink birtokában könnyen igazolható lesz, hogy akkor és csak akkor tartozik hozzá, ha perspektivitásról van szó.

Nevezetes tény (l. 8.7.19), hogy a projektív képződmények egy a projektív geometriában kitüntetett szerepet játszó görbecsaládhoz, az úgynevezett másodrendű görbékhez tartoznak. Az alábbi példa ezt a tényt az euklideszi síkgeometria egy jól ismert tételével hozza kapcsolatba.

8.7.18. Példa. Legyen S és S' két különböző metsző sugársor az irányított euklideszi síkon, legyen $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \notin \mathbf{Z}\pi$ és f feleltesse meg S tetszőleges X elemének azt az $X' \in S'$ egyenest, amely X-ből α irányított szögű forgatással nyerhető. Ekkor f projektivitás, és projektív képződménye a kerületi szögek tétele alapján kör.

8.7.19. Tétel. *Legyen f olyan projektív transzformáció az S és S' különböző P-beli sugársorok között, amely nem perspektivitás. Ekkor f projektív képződménye olyan ponthalmaz P-ben, amely alkalmasan választott projektív koordinátákban az $x_1x_2 = x_3^2$ homogén másodfokú egyenlettel adható meg.*

Bizonyítás: Először megválasztjuk a P-beli projektív bázis alappontjait: legyen A_1 az S sugársor tartópontja, A_2 az S'sugársor tartópontja, és A_3 az f Steiner-centruma. Az A_0 egységpont megválasztásához kiszemelünk egy olyan $E \in S$ egyenest, amelyre $A_2, A_3 \notin E$. Ekkor (8.7.14 duálisa alapján) $A_1, A_3 \notin E'$ is teljesül. Így $E \neq E'$; legyen $A_0 = E \cap E'$.



Ezen adatok felvétele után a 8.7.15-ben leírt eljárás dualizálásával az S-beli egyenesek f-nél származó képét a következőképpen származtathatjuk:

$X \in S$-re legyen $U = X \cap E'$, $X^* = \langle A_3, U\rangle$, $V = E \cap X^*$, és végül $X' = \langle A_2, V\rangle$.

Projektív koordinátákkal $A_1 = [1 : 0 : 0]$, $A_2 = [0 : 1 : 0]$, $A_3 = [0 : 0 : 1]$ és $A_0 = [1 : 1 : 1]$. Tegyük föl, hogy az $X \cap X'$ pont koordinátái $[x_1 : x_2 : x_3]$. Miután $U \in E' = \langle A_0, A_2\rangle$, az U pontot reprezentáló vektor az A_0-t és az A_2-t reprezentáló vektorok lineáris kombinációja, ezért e vektor első és harmadik koordinátája egyenlő. Ugyanakkor U kollineáris A_1-gyel és $X \cap X'$-vel is, ezért ez a vektor az (1,0,0) és az (x_1, x_2, x_3) vektorok kombinációja. Ezért $U = [x_3 : x_2 : x_3]$. Hasonló módon $V \in E = \langle A_0, A_1\rangle$ és $V \in \langle A_2, X \cap X'\rangle$ miatt $V = [x_1 : x_3 : x_3]$. Végül U, V és A_3 kollineáris (mindhárman illeszkednek az X^* egyenesre), ezért az őket reprezentáló vektorok lineárisan összefüggők, azaz $x_1x_2 = x_3^2$.

Megfordítva, ha valamely P-beli pont x_1, x_2, x_3 koordinátái kielégítik az $x_1x_2 = x_3^2$ egyenletet, akkor az $U = [x_3 : x_2 : x_3]$ és $V = [x_1 : x_3 : x_3]$ pontokra érvényesek a fenti kollinearitások, ezért az $X = \langle A_1, U\rangle$ egyenes f-nél származó képe az $X' = \langle A_2, V\rangle$ egyenes, és így $X \cap X' = [x_1 : x_2 : x_3]$. Az $[x_1 : x_2 : x_3]$ pont tehát hozzátartozik a projektív képződményhez. □

9. Kúpszeletek

A projektív terekben fekvő ponthalmazokat legtöbbször egyenleteik segítségével adjuk meg, illetve tanulmányozzuk. Amikor homogén koordinátákat

használunk egyenletek felírására, figyelemmel kell lennünk arra, hogy a pont a koordinátáit nem határozza meg egyértelműen. Legyen például egy $F : \mathbf{F}^{d+1} \to \mathbf{F}$ függvény az $F(x_1, \ldots, x_{d+1}) = 0$ egyenlet bal oldala. Ennek az egyenletnek csak akkor van értelme $\mathbf{P}^d$-ben, ha csak az $[x_1 : \ldots : x_{d+1}] \in \mathbf{P}^d$ ponttól függ, hogy ez az egyenlőség fönnáll-e, és nem az azt reprezentáló $(x_1, \ldots, x_{d+1})$ vektortól. Az F függvényre tehát érvényben kell lennie az alábbi „homogenitási" tulajdonságnak:

$$\text{ha} \quad F(x_1, \ldots, x_{d+1}) = 0 \text{ és } \lambda \in \mathbf{F},\ \lambda \neq 0, \quad \text{akkor} \quad F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{d+1}) = 0\,.$$

Világos, hogy ha F homogén polinomfüggvény, akkor eleget tesz ennek a követelménynek. Ezért a továbbiakban csak homogén polinomok által megadott egyenletek vizsgálatára szorítkozunk. Ezek közül az elsőfokúakat, azaz a homogén lineáris egyenleteket már jól ismerjük: bármely homogén lineáris egyenlet hipersíkot definiál, bármely hipersíknak van homogén lineáris egyenlete, és ezt az egyenletet a hipersík nemzérus konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározza. Hasonlóan egyszerű tételeket nem várhatunk a magasabb fokú homogén polinomiális egyenletekre vonatkozóan, mert egyrészt a fok növekedésével az esetek geometriai áttekintése igen nehézzé válik, másrészt magasabb fok esetén – az elsőfokú esettől eltérően – már az is számít, hogy milyen test fölött dolgozunk. Az alábbiakban elsősorban a másodfokú egyenlettel leírható alakzatokra, az ún. másodrendű hiperfelületekre vonatkozó ismereteket tekintjük át. Miután az ehhez kellő számolásokban gyakran szükség lesz a 2-vel való osztásra, a továbbiakban feltesszük, hogy $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$. A legtöbb példában és alkalmazásban az alaptest a valós vagy a komplex számtest lesz.

9.1. Másodrendű hiperfelületek

Homogén másodfokú egyenleteket vizsgálunk a $P = P(W)$ projektív térben, ahol W vektortér $\mathbf{F}$ felett, $\dim W = d + 1$. Az ilyen egyenletek „koordinátamentes" kezeléséhez a bilineáris függvények és a kvadratikus alakok adják az algebrai hátteret.

9.1.1. Definíció (Kvadratikus alak, $Q(W)$). Egy $W \to \mathbf{F}$ függvényt kvadratikus alaknak nevezünk, ha valamely W-beli bázisra vonatkozó koordináták függvényeként felírva homogén másodfokú polinomfüggvény.

Ha másik bázisra térünk át W-ben, akkor az új koordinátákat lineáris helyettesítéssel nyerjük az eredetiekből. Ezért egy kvadratikus alak bármely bázisban fölírva a koordináták homogén másodfokú polinomfüggvénye.

A W-n értelmezett kvadratikus alakok vektorteret alkotnak $\mathbf{F}$ fölött, ezt a vektorteret $Q(W)$-vel jelöljük.

9.1.2. Emlékeztető (Szimmetrikus bilineáris függvények). Bármely $\beta : W \times W \to \mathbf{F}$ szimmetrikus bilineáris függvény a $q(\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ képlettel származtat egy $q \in Q(W)$ kvadratikus alakot. Bármely q kvadratikus alakhoz egyértelműen létezik olyan β szimmetrikus bilineáris függvény, amely q-t ilyen módon származtatja, mégpedig $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \big(q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\big)/2$.

Ha $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_{d+1}$ bázis W-ben, akkor β (illetve q) mátrixa erre a bázisra vonatkozóan az az M szimmetrikus mátrix, amelyre $M_{ij} = \beta(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ $i, j = 1, \ldots, d + 1$. Nyilván β és M kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, és bármely $\mathbf{F}$ fölötti $(d+1) \times (d+1)$-es szimmetrikus mátrix előáll ilyen módon. Ezért a $Q(W)$ vektortér izomorf a $(d + 1) \times (d + 1)$-es szimmetrikus mátrixok vektorterével, így $\dim Q(W) = (d + 1)(d + 2)/2$. Ha az $A \in GL(d + 1, \mathbf{F})$ mátrixszal báziscserét hajtunk végre, akkor β mátrixa az új bázisra vonatkozóan az $A^\top MA$ szorzat lesz.

A q kvadratikus alak (illetve a β szimmetrikus bilineáris függvény) rangján a mátrixának a rangját értjük. A fenti transzformációs formula alapján a rang nem függ a bázis választásától. Azt mondjuk, hogy q (illetve β) elfajuló, ha a rangja kisebb a $d + 1$ dimenziónál. Ellenkező esetben nemelfajuló kvadratikus alakról (illetve szimmetrikus bilineáris függvényről) beszélünk, ennek $\det M \neq 0$ szükséges és elégséges feltétele. A β szimmetrikus bilineáris függvény akkor és csak akkor elfajuló, ha a magja nemtriviális, azaz létezik olyan $\mathbf{w} \neq 0$ vektor W-ben, hogy bármely $\mathbf{v} \in W$ vektorra $\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$.

Például ha a q kvadratikus alak reducibilis (azaz két lineáris forma szorzata: $q = \alpha_1 \cdot \alpha_2$, ahol $\alpha_1, \alpha_2 \in W^*$), és $d \geq 2$, akkor q elfajuló. Valóban, ilyenkor β magja a $\operatorname{Ker} \alpha_1 \cap \operatorname{Ker} \alpha_2$ altér W-ben, ami legalább egydimenziós.

9.1.3. Definíció (Másodrendű hiperfelület, másodrendű görbe). A P projektív tér másodrendű hiperfelületén a $P\big(Q(W)\big)$ projektív tér egy elemét értjük. A másodrendű hiperfelületet másodrendű görbének mondjuk, ha $d = 2$.

A másodrendű hiperfelületeket tehát nemzérus kvadratikus alakok reprezentálják. Általában a $[q]$ jelölést használjuk rájuk, ahol $q \in Q(W)$ kvadratikus alak, $q \neq 0$.

9.1.4. Definíció (Másodrendű hiperfelület képe). Legyen $[q]$ másodrendű hiperfelület P-ben. A $[q]$ képén (vagy képhalmazán) azt a $\mathrm{k}[q] \subset P$ ponthalmazt értjük, amely a q által adott egyenletet kielégítő pontokból áll, tehát

$$\mathrm{k}[q] = \{\, [\mathbf{w}] \in P(W) : q(\mathbf{w}) = 0 \,\}\,.$$

Megjegyzés. A 9.1.3-beli és a 9.1.4-beli definíció különválasztása útján is hangsúlyozni kívánjuk, hogy másodrendű hiperfelületnek nem P-beli ponthalmazt tekintünk, hanem azt az egyenletet, amely a ponthalmazt megadja. (Nem teszünk különbséget két egyenlet között, ha egymás nemzérus skalárral vett többszörösei.) Erre a megkülönböztetésre általában szükség van. Például $\mathbf{R}$ fölött bármely q definit kvadratikus alakra $\mathrm{k}[q] = \emptyset$, míg ($\geq 2$ dimenzióban) a definit kvadratikus alakok nem mind egymás skalárszorosai. Viszont ha $\mathbf{F}$ algebrailag zárt, akkor az algebrából ismert nullhelytétel alapján $\mathrm{k}[q_1] = \mathrm{k}[q_2]$-ből következik, hogy $[q_1] = [q_2]$.

9.1.5. Példa (Másodrendű hiperfelületek az egyenesen). Ha $d = 1$, $q \in Q(W)$, $q \neq 0$, akkor egy $\mathrm{k}[q]$-hoz nem tartozó pontot ideális pontnak tekintve affin koordinátázás mellett a kvadratikus alak $q(x) = ax^2 + bx + c$ alakú. Itt q mátrixa $M = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, így a $q(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa $4 \det M$. Ezekből következik, hogy $\mathrm{k}[q]$ legfeljebb két pontból áll, és pontosan akkor egyelemű, ha q elfajuló. Ha $\mathrm{k}[q] \neq \emptyset$, akkor a $\mathrm{k}[q]$ halmaz $[q]$-t egyértelműen meghatározza. Algebrailag zárt $\mathbf{F}$ esetén $\mathrm{k}[q]$ nem lehet üres.

9.1.6. Definíció (Projektív ekvivalencia, projektív invariáns). A $P\big(Q(W)\big)$-beli $[q_1], [q_2]$ másodrendű hiperfelületeket projektíven ekvivalensnek mondjuk, ha a W vektortér alkalmas $\varphi \in GL(W)$ transzformációjával $[q_2] = [q_1 \circ \varphi]$.

A $(\varphi, q) \mapsto q \circ \varphi^{-1}$ hozzárendelés a $GL(W)$ csoport hatását definiálja a $Q(W)$ vektortéren, majd projektivizálás után a másodrendű hiperfelületek $P(Q(W))$ projektív terén. Amikor a másodrendű hiperfelületek projektív osztályozásáról beszélünk, tulajdonképpen ennek a hatásnak az orbitjait vesszük számba. Két másodrendű hiperfelület pontosan akkor projektíven ekvivalens, ha azonos orbithoz tartozik.

Másodrendű hiperfelületek valamely tulajdonságát vagy számszerű jellemzőjét projektív invariánsnak nevezzük, ha megegyezik bármely két projektíven ekvivalens másodrendű hiperfelület esetén. Például a másodrendű hiperfelület elfajuló vagy nemelfajuló volta projektív invariáns.

9.1.7. Emlékeztető (Kvadratikus alak diagonalizálása). Felidézzük azt az algebrából ismert tételt, hogy (bármilyen test fölötti vektortérben) bármely bilineáris függvényhez található ortogonális bázis, azaz olyan bázis, amelyben a bilineáris függvény mátrixa diagonális. Ha a $\mathbf{w} \in W$ vektor koordinátái egy ortogonális bázisban $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$, akkor

$$q(\mathbf{w}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{d+1} x_{d+1}^2$$

alkalmas $a_1, a_2, \ldots a_{d+1} \in \mathbf{F}$ együtthatókkal. A koordináták sorrendjét megválaszthatjuk úgy, hogy $a_1, \ldots, a_r \neq 0$ és $a_{r+1} = \ldots = a_{d+1} = 0$ teljesüljön, itt az r (≥ 1) szám a q kvadratikus alak rangja.

Ennek alapján a komplex, illetve a valós test fölött a másodrendű hiperfelületek projektív osztályozása egyszerűen elvégezhető.

Ha $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, akkor alkalmas bázis választásával elérhető, hogy $a_1 = \ldots = a_r = 1$ legyen. Emiatt komplex projektív térben a másodrendű hiperfelületek egyetlen projektív invariánsa a rang, amely 1 és $d+1$ között bármely egész szám lehet. (Azt a megállapítást, hogy a rang az „egyetlen" projektív invariáns, úgy kell érteni, hogy bármely projektív invariáns a rangból származtatható. Ez abból következik, hogy $\mathbf{C}$ fölött bármely két egyenlő rangú W-beli kvadratikus alak ekvivalens.)

Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, akkor alkalmas bázisban $a_1 = \ldots = a_k = 1$ és $a_{k+1} = \ldots = a_{k+l} = -1$, ahol $k+l = r$. Itt a k és l számok a Sylvester-féle tehetetlenségi tétel szerint q-nak invariánsai (azaz bármely ortogonális bázisban felírva a pozitív és a negatív együtthatók száma k, illetve l). A (-1)-gyel történő végigszorzás felcseréli k és l szerepét. Így valós projektív térben a másodrendű hiperfelületeket projektív ekvivalencia erejéig jellemzik a (k, l) rendezetlen párok, ahol $0 < k + l \leq d + 1$.

9.1.8. Példák. Az alábbi példákban a 9.1.7-ben leírt osztályozás egyes alacsony dimenziós eseteit tekintjük át, és geometriailag azonosítjuk a képhalmazokat.

- Másodrendű görbék a komplex projektív síkon:
  - Ha $r = 1$, akkor $x_1^2 = 0$ (egyenes).
  - Ha $r = 2$, akkor $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (egyenespár).
  - Ha $r = 3$, akkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (ezt a görbét komplex kúpszeletnek szokás nevezni; meggondolható, hogy a képe homeomorf az $\mathbf{S}^2$ gömbbel, l. a 9.4.4 utáni megjegyzést).
- Másodrendű görbék a valós projektív síkon:
  - Ha $r = 1$, akkor $x_1^2 = 0$ (egyenes).
  - Ha $r = 2$, akkor $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (pont), vagy $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (egyenespár).
  - Ha $r = 3$, akkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (üres), vagy $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (valós nemelfajuló kúpszelet, körrel homeomorf).
- Vegyük számba a valós másodrendű felületeket ($d = 3$) a nemelfajuló ($r = 4$) esetekre szorítkozva. Projektív ekvivalencia erejéig három lehetőség van:

- Ha $k = 4$, akkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ (üres).
- Ha $k = 3$, akkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ (gömbbel homeomorf, nem tartalmaz egyenest).
- Ha $k = 2$, akkor $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ (tórusszal homeomorf, tartalmaz egyenest).

9.1.9. Definíció (Kúp). Legyen $V < W$ lineáris hipersík és $\mathbf{c} \in W - V$, jelölje $\pi : W \to V$ a $\mathbf{c}$ irányú vetítést. Ha $q \in Q(V)$ tetszőleges kvadratikus alak, akkor $\widehat{q} = q \circ \pi \in Q(W)$. Ha $[q]$ másodrendű hiperfelület a $P(V)$ térben, akkor a $P(W)$-beli $[\widehat{q}]$ másodrendű hiperfelületet a $[q]$-ra állított $[\mathbf{c}]$ csúcsú kúpnak nevezzük.

Ha $\mathrm{k}[q] \neq \emptyset$, akkor $\mathrm{k}[\widehat{q}]$ a $\mathrm{k}[q]$-beli pontokat $[\mathbf{c}]$-vel összekötő egyenesek egyesítése. (Ha $\mathrm{k}[q] = \emptyset$, akkor $\mathrm{k}[\widehat{q}] = \{[\mathbf{c}]\}$.)

A $[\widehat{q}]$ kvadratikus alak mindig elfajuló, ugyanis a $\mathbf{c}$ vektor a $\widehat{q}$-hoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény magjában van. Megfordítva, bármely elfajuló másodrendű hiperfelület előállítható alkalmas hipersíkban adott alkalmas másodrendű hiperfelületre alkalmas csúccsal állított kúpként. Valóban, a kúp csúcsát egy tetszőleges, a szimmetrikus bilineáris függvény magjában fekvő $\mathbf{c} \neq 0$ vektor reprezentálhatja, V pedig tetszőleges, $\mathbf{c}$-t nem tartalmazó hipersík lehet.

9.1.10. Példa. Tekintsük az $\mathbf{R}^3$ euklideszi koordinátatérben az

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

egyenletű F forgáskúp-felületet. Homogén x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátákra 8.4.4 szerint átírva az egyenlet

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

alakot ölt. Az egyenlet bal oldalát tekinthetjük egy $\mathbf{R}^3$-beli q kvadratikus alaknak és egy $\mathbf{R}^4$-beli $\widehat{q}$ kvadratikus alaknak is; ekkor $\widehat{q} = q \circ \pi$, ahol $\pi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ a standard vetítés. Így F mint másodrendű felület valóban kúp, amelynek a csúcsa a $[0 : 0 : 0 : 1]$ pont, azaz az $\mathbf{R}^3$ euklideszi tér origója.

9.1.11. Definíció (Szelet). Ha $q \in Q(W)$ és $V \leq W$, akkor nyilván $q|_V \in Q(V)$. Emiatt ha $[q]$ másodrendű hiperfelület a $P(W)$ projektív térben és a $P(V) \subseteq P(W)$ projektív altérre $P(V) \nsubseteq \mathrm{k}[q]$, akkor $[q|_V]$ másodrendű hiperfelület $P(V)$-ben, és $\mathrm{k}[q|_V] = \mathrm{k}[q] \cap P(V)$. Ezt a $[q|_V]$ másodrendű hiperfelületet a $[q]$ másodrendű hiperfelület $P(V)$-ben keletkező szeletének nevezzük.

A 9.1.9-beli $[\widehat{q}]$ kúpnak a $P(V)$ hipersíkban keletkező szelete $[q]$. Emiatt a „kúpszelet” elnevezés tulajdonképpen bármelyik másodrendű hiperfelületet megilletheti. A továbbiakban (a hagyományos szóhasználathoz igazodva) kúpszeleten síkbeli másodrendű görbét értünk.

9.1.12. Példa (Projektív képződmény mint kúpszelet). 8.7.19 alapján tudjuk, hogy a projektív sík két különböző sugársora között adott projektív, de nem perspektív megfeleltetés képződménye alkalmasan választott projektív koordinátarendszerben az $x_1x_2 = x_3^2$ egyenlettel adható meg. Az ennek megfelelő kvadratikus alak mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ahonnan $\det M \neq 0$ következik. A projektív képződmény tehát nemelfajuló kúpszelet.

A projektív másodrendű hiperfelületekkel kapcsolatos ismereteinket felhasználhatjuk az affin, illetve az euklideszi geometriában is, amikor ottani másodfokú egyenletekkel definiált alakzatokat vizsgálunk. A projektív esethez képest a döntő különbség egyrészt abban áll, hogy az egyenletek – affin, illetve Descartes-féle koordinátákban felírva – már nem feltétlenül homogén polinomok, másrészt abban, hogy a másodrendű hiperfelületek ekvivalenciáját jóval kevesebb megengedett transzformáció segítségével értelmezzük, ezért az osztályozás finomabb, és jóval több osztály keletkezik.

9.1.13. Definíció (Affin másodrendű hiperfelület, projektív lezárás). Legyen X affin tér $\mathbf{F}$ felett, ekkor X-beli másodrendű hiperfelületnek tekintjük az $\overline{X}$ projektív tér másodrendű hiperfelületei közül azokat, amelyek $\overline{X}$-beli képe nem tartalmazza a ∞_X ideális hipersíkot.

Azonosítsuk az X affin teret affin koordináták bevezetése útján az $\mathbf{F}^d$ koordinátatérrel. Az x_1, x_2, …, x_d koordinátákban felírt inhomogén másodfokú polinomiális egyenlet általános alakja

$$\sum_{i=1}^{d} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le d} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{d} b_ix_i + c = 0\,,$$

ahol a másodfokú tagok együtthatói (azaz az $a_{ij} \in \mathbf{F}$ elemek) közül nem mindegyik zérus. (Itt is kihasználtuk, hogy $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$, amikor a későbbi könnyebb kezelhetőség érdekében a vegyes másodfokú és a lineáris tagok együtthatóit elfeleztük.)

Vezessük be az $M = (a_{ij}) \in \mathbf{F}^{d\times d}$ szimmetrikus együtthatómátrixot és a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbf{F}^d$ együtthatóvektort, ezekkel az egyenlet tömör alakja az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ vektorra felírt

$$\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} + 2\,\mathbf{b}^\top\mathbf{x} + c = 0$$

vektoregyenlet. Ez az egyenlet akkor másodfokú, ha $M \neq 0$. Egészítsük ki az M mátrixot az $\overline{M} \in \mathbf{F}^{(d+1)\times(d+1)}$ szimmetrikus mátrixszá és az $\mathbf{x}$ vektort az $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}^{d+1}$ vektorrá az

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} M & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top & c \end{pmatrix}, \qquad \text{illetve} \qquad \overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

formulákkal. Ekkor a 8.4.4-ben bevezetett $\mathbf{F}^d \subset \overline{\mathbf{F}^d} = P(\mathbf{F}^{d+1})$ azonosításnál az $\mathbf{x}$ vektornak az $[\overline{\mathbf{x}}]$ pont felel meg. Tekintsük az $\overline{M}$ mátrixszal adott q kvadratikus alakot $\mathbf{F}^{d+1}$-en, ekkor a $\mathrm{k}[q] \cap \mathbf{F}^d$ ponthalmaz éppen a fenti inhomogén egyenlet megoldásaiból áll. Az $M \neq 0$ követelmény q-ra nézve pedig azzal egyenértékű, hogy q nem azonosan zérus az $x_{d+1} = 0$ hipersíkon, azaz $\mathbf{F}^d$ ideális hipersíkján. Tehát az affin másodrendű hiperfelületek pontosan azok az alakzatok, amelyek affin koordinátákban inhomogén másodfokú egyenletekkel írhatók le. A $[q]$ projektív másodrendű hiperfelületet a fenti másodfokú egyenlettel adott affin hiperfelület projektív lezárásának nevezzük.

9.1.14. Definíció (Affin ekvivalencia). Legyen az $f : \mathbf{F}^d \to \mathbf{F}^d$ affinitás az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}') = A\mathbf{x}' + \mathbf{v} \quad (\mathbf{x}' \in \mathbf{F}^d)$ formulával adva, ahol $A \in GL(d, \mathbf{F})$ és $\mathbf{v} \in \mathbf{F}^d$. Az $\mathbf{x}$ képpont akkor és csak akkor elégíti ki a 9.1.13-beli vektoregyenletet, ha

$$\begin{aligned} 0 &= (A\mathbf{x}' + \mathbf{v})^\top M(A\mathbf{x}' + \mathbf{v}) + 2\,\mathbf{b}^\top(A\mathbf{x}' + \mathbf{v}) + c = \\ &= \mathbf{x}'^\top(A^\top MA)\mathbf{x}' + 2\left((M\mathbf{v} + \mathbf{b})^\top A\right)\mathbf{x}' + (\mathbf{v}^\top M\mathbf{v} + 2\,\mathbf{b}^\top\mathbf{v} + c) = \\ &= \mathbf{x}'^\top M'\mathbf{x}' + 2\,\mathbf{b}'^\top\mathbf{x}' + c', \end{aligned}$$

azaz ha $\mathbf{x}'$ kielégíti az $M' = A^\top MA$, $\mathbf{b}' = A^\top(M\mathbf{v} + \mathbf{b})$ és $c' = \mathbf{v}^\top M\mathbf{v} + 2\,\mathbf{b}^\top\mathbf{v} + c$ adatokkal felírt inhomogén másodfokú vektoregyenletet. Tehát az affinitások az affin másodrendű hiperfelületeket affin másodrendű hiperfelületekbe transzformálják. Affin ekvivalensnek mondunk két affin másodrendű hiperfelületet, ha alkalmas affinitással az itt leírt módon egymásba transzformálhatók.

9.1.15. Tétel. *Bármely affin másodrendű hiperfelület affin ekvivalens az alábbi három másodrendű hiperfelülettípus valamelyikével:*

I. $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 = 0$;

II. $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 = 1$;

III. $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 = x_{k+1}$;

Mindhárom esetben $k \geq 1$, I.*-ben és* II.*-ben* $k \leq d$, III.*-ban* $k \leq d-1$, *továbbá* $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$.
Az $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ *esetben megkövetelhető, hogy minden* i*-re* $a_i = 1$ *legyen,* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *esetén pedig hogy* $a_i = \pm 1$ *legyen.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a 9.1.13-beli általános másodfokú egyenletből a 9.1.14-ben leírt affin átalakítások alkalmas sorozatán keresztül eljuthatunk a három típus valamelyikéhez.

Az első lépésben diagonalizáljuk az M együtthatómátrixot. Ez azt jelenti, hogy alkalmas új bázisra való áttérés után az egyenlet

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_k x_k^2 + 2\,(b_1 x_1 + \ldots + b_d x_d) + c = 0$$

alakú, ahol az a_i együtthatók mind különböznek zérustól $(i = 1, \ldots, k)$. Az $i = 1, \ldots, k$ koordinátákban teljes négyzetté kiegészítéssel (azaz az $x_i' = x_i + b_i/a_i$ helyettesítéssel) elérhető, hogy zérustól különböző b_j együttható csak $j > k$ mellett szerepelhessen az egyenletben.

Ha most minden j-re $b_j = 0$, akkor $c = 0$ esetén az egyenlet már I. típusú, ha pedig $c \neq 0$, akkor átrendezve és végigosztva a II. alakra hozható.

Ha a b_j együtthatók között van 0-tól különböző, akkor (az $x_1, \ldots, x_k$ koordinátákat megtartva és) az $x_{k+1}' = 2(b_{k+1}x_{k+1} + \ldots + b_d x_d) + c$ helyettesítéssel élve az egyenletet a III. alakra hozhatjuk. □

Megjegyzések. (1) Az affin másodrendű hiperfelülethez tartozó kvadratikus alak rangja a 9.1.15. Tételbeli I. típus esetében $r = k$, a II.-ban $r = k + 1$, a III.-ban pedig $r = k + 2$. Nemelfajuló másodrendű hiperfelületet csak a II., $k = d$, és a III., $k = d - 1$ esetekben kapunk.

(2) Könnyen látható (tetszőleges $\mathbf{F}$ esetén), hogy különböző típushoz tartozó affin másodrendű hiperfelületek nem lehetnek affin ekvivalensek. Az egyes típusokon belül az affin ekvivalenciaosztályok száma a testtől függően más és más lehet. A komplex és a valós esetben viszont 9.1.7-hez hasonlóan az osztályok könnyen számba vehetők a rang, illetve az előjelek megoszlása szerint.

9.1.16. Példák

- A komplex affin másodrendű görbék ($\mathbf{F} = \mathbf{C}$, $d = 2$) osztályozása (az öt osztály közül csak az utolsó kettő nemelfajuló):

  I. $k=1$: $x_1^2 = 0$ (egyenes);
  $k=2$: $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (metsző egyenespár);

  II. $k=1$: $x_1^2 = 1$ (párhuzamos egyenespár);
  $k=2$: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (komplex ellipszis);

III. $k=1$: $x_1^2 = x_2$ (komplex parabola).

- A nemelfajuló valós affin másodrendű görbék ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $d = 2$, $r = 3$) osztályozása:

  II. $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellipszis);
  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ (hiperbola);
  $-x_1^2 - x_2^2 = 1$ (üres);
  III. $x_1^2 = x_2$ (parabola).

- A nemelfajuló valós affin másodrendű felületek ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $d = 3$, $r = 4$) osztályozása:

  II. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (ellipszoid);
  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ (egyköpenyű hiperboloid);
  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ (kétköpenyű hiperboloid);
  $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ (üres);
  III. $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ (elliptikus paraboloid);
  $x_1^2 - x_2^2 = x_3$ (hiperbolikus paraboloid).

Rátérünk az euklideszi terekben definiált affin másodrendű hiperfelületekre és azok euklideszi osztályozására. A szakasz hátralevő részében feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

9.1.17. Definíció (Euklideszi ekvivalencia). Legyen E euklideszi tér. Két E-beli affin másodrendű hiperfelület euklideszi értelemben ekvivalens, ha affin ekvivalens és az áttranszformálást megvalósító affinitás egybevágóság.

Ortonormált koordinátarendszer bevezetésével feltehetjük, hogy E a természetes euklideszi struktúrával ellátott $\mathbf{R}^d$ koordinátatérrel azonos. A 9.1.14-beli $f(\mathbf{x}') = A\mathbf{x}' + \mathbf{v}$ affin transzformáció tehát pontosan akkor létesít euklideszi ekvivalenciát, ha $A \in O(d)$.

9.1.18. Emlékeztető (Főtengelytétel). Felidézzük a valós szimmetrikus mátrixok fontos tulajdonságát: bármely valós szimmetrikus mátrix alkalmas ortogonális mátrixszal is diagonalizálható, azaz ha $M \in \mathbf{R}^{d\times d}$ és $M^\top = M$, akkor létezik olyan $A \in O(d)$, hogy $A^\top MA$ diagonális.

Vegyük észre, hogy $A \in O(d)$ esetén $A^\top MA = A^{-1}MA$, emiatt a kvadratikus alak áttranszformált mátrixa hasonló az eredetihez. Ezért az M mátrix sajátértékei a másodrendű görbének euklideszi invariánsai, és a diagonális alakú mátrixban a diagonális elemek éppen ezek a sajátértékek.

9.1.19. Következmény. *Bármely euklideszi térbeli affin másodrendű hiperfelület euklideszi értelemben is ekvivalens a 9.1.15. Tételbeli típusok valamelyikével. Két I. típusú másodrendű hiperfelület akkor és csak akkor ekvivalens euklideszi értelemben, ha az együtthatók rendszere (sorrendtől eltekintve) arányos. Két II. vagy III. típusú másodrendű hiperfelület akkor és csak akkor ekvivalens euklideszi értelemben, ha az együtthatók rendszere (sorrendtől eltekintve) megegyezik.* □

9.1.20. Példa (A másodrendű görbék euklideszi osztályozása). Tekintsük át $d = 2$ mellett a lehetséges eseteket. A hagyományos jelöléseket használjuk: a koordinátákat most x és y jelöli, $a, b \neq 0$ konstansok.

I. $k=1$: $x^2 = 0$ (egyenes);

$k=2$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (pont), $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (metsző egyenespár);

II. $k=1$: $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (párhuzamos egyenespár), $-\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (üres);

$k = 2$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipszis), $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (hiperbola), $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (üres);

III. $k=1$: $\dfrac{x^2}{a^2} = y$ (parabola). □

9.1.21. Emlékeztető (Kúpszeletek az elemi geometriában). Felidézzük az ellipszis, a parabola és a hiperbola szokásos definícióját és néhány elemi tulajdonságát. Legyen E euklideszi sík, ρ jelölje a távolságfüggvényt E-n.

Ellipszis:
Rögzítjük az $F_1 \neq F_2$ pontokat E-ben és az $a > c$ számot, ahol $c = \rho(F_1, F_2)/2$. Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszisen az

$$\{A \in E \,:\, \rho(A, F_1) + \rho(A, F_2) = 2a\}$$

ponthalmazt értjük. Ha a Descartes-féle koordinátarendszer tengelyei az $\langle F_1, F_2\rangle$ egyenes, illetve az $[F_1, F_2]$ szakasz felező merőlegese, akkor az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakú. Itt a $b > 0$ konstanst az $a^2 = b^2 + c^2$ egyenlőség határozza meg, és az ellipszis kistengelyének a hossza $2b$-vel egyenlő.

Parabola:

Rögzítjük a $V \subset E$ egyenest és az $F \in E - V$ pontot. A V vezéregyenesű, F fókuszú parabolán az

$$\{A \in E \,:\, \rho(A, V) = \rho(A, F)\}$$

ponthalmazt értjük. Ha a Descartes-féle koordinátarendszer tengelyei egyrészt a parabola szimmetriatengelye, azaz az F-ből V-re bocsátott merőleges egyenes, másrészt az a V-vel párhuzamos egyenes, amely felezi F és V távolságát, akkor a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px$$

alakú, ahol $p = \rho(F, V)$ (a parabola paramétere).

Hiperbola:
Rögzítjük az $F_1 \neq F_2$ pontokat E-ben és az $a < c$ pozitív számot, ahol $c = \rho(F_1, F_2)/2$. Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbolán az

$$\{A \in E \,:\, |\rho(A, F_1) - \rho(A, F_2)| = 2a\}$$

ponthalmazt értjük. Ha a Descartes-féle koordinátarendszer tengelyei az $\langle F_1, F_2 \rangle$ egyenes, illetve az $[F_1, F_2]$ szakasz felező merőlegese, akkor a hiperbola egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakú. Itt a $b > 0$ konstanst a $c^2 = a^2 + b^2$ egyenlőség határozza meg. A hiperbola aszimptotái az $y = \pm \frac{b}{a} x$ egyenletű egyenesek.

Az ellipszis, a parabola és a hiperbola nevezetes tulajdonsága, hogy a háromdimenziós euklideszi térben felvett forgáskúpoknak a kúp csúcsán át nem menő síkokkal vett síkmetszetei éppen ezek a görbék. Valóban, 9.1.9–9.1.11-ben tett megállapításainkból és a 9.1.20-beli osztályozásból ez következik.

Áttekintjük, hogyan lehet a valós projektív térrel és annak transzformációival kapcsolatban már megismert komplexifikációs eljárást kiterjeszteni a valós térben adott másodrendű hiperfelületekre. Ehhez először bilineáris függvények és kvadratikus alakok komplexifikációját értelmezzük. Ennek a szakasznak a hátralevő részében feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, és $W^{\mathbf{C}}$ jelöli a W valós vektortér komplexifikáltját (l. 8.2.14).

9.1.22. Állítás. *Legyen $\beta : W \times W \to \mathbf{R}$ bilineáris leképezés. Ekkor létezik egyetlen olyan $\beta^{\mathbf{C}} : W^{\mathbf{C}} \times W^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ leképezés, amely $\mathbf{C}$ fölött bilineáris, és amelyre $\beta^{\mathbf{C}}|_{W \times W} = \beta$. Ha β szimmetrikus, akkor $\beta^{\mathbf{C}}$ is az. Ha β nemelfajuló, akkor $\beta^{\mathbf{C}}$ is az.*

Bizonyítás: Ha a kívánt tulajdonságú $\beta^{\mathbf{C}}$ létezik, akkor tetszőleges $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in W$-re az $(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) \in W^{\mathbf{C}} \times W^{\mathbf{C}}$ elempáron a

$$\beta^{\mathbf{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) = \beta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + i\big(\beta(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + \beta(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)\big)$$

értéket kell felvennie. Az egyértelműség ebből rögtön adódik. Másrészt ez a formula a keresett $\beta^{\mathbf{C}}$ függvény definíciójául is szolgálhat. Szimmetrikus β esetén $\beta^{\mathbf{C}}$ szimmetriája is kiolvasható a formulából. Ha W-ben $\mathbf{R}$ fölött bázist választunk, akkor ez egyúttal $W^{\mathbf{C}}$ számára is bázis $\mathbf{C}$ fölött, továbbá $\beta^{\mathbf{C}}$ mátrixa erre a bázisra nézve azonos lesz β mátrixával. Ebből az utolsó állítás is közvetlenül következik. □

9.1.23. Definíció (Valós kvadratikus alak komplexifikáltja). Ha $q \in Q(W)$ valós kvadratikus alak, legyen $\beta : W \times W \to \mathbf{R}$ a q-t származtató szimmetrikus bilineáris függvény, és tekintsük a 9.1.22 szerinti $\beta^{\mathbf{C}}$ komplexifikált szimmetrikus bilineáris függvényt. A hozzá tartozó (komplex értékű) kvadratikus alakot q komplexifikáltjának nevezzük és $q^{\mathbf{C}}$-vel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $q^{\mathbf{C}}\,|_W = q$, továbbá hogy egy W-ből választott bázisban $q^{\mathbf{C}}$ mátrixa ugyanaz, mint q-é.

9.1.24. Definíció (Valós másodrendű hiperfelület komplexifikáltja). Ha adott a $[q] \in P\big(Q(W)\big)$ másodrendű hiperfelület a $P = P(W)$ valós projektív térben, akkor $[q]$ komplexifikáltján $[q]^{\mathbf{C}} = [q^{\mathbf{C}}]$-t, azaz a q kvadratikus alak komplexifikáltja által reprezentált komplex másodrendű hiperfelületet értjük a $P^{\mathbf{C}} = P(W^{\mathbf{C}})$ komplexifikált térben.

A $q^{\mathbf{C}}\,|_W = q$ észrevételből következik, hogy a komplexifikált másodrendű hiperfelület képhalmazának a P valós résztérbe eső része megegyezik az eredeti hiperfelülettel, vagyis $\mathrm{k}[q^{\mathbf{C}}] \cap P = \mathrm{k}[q]$.

Megjegyzések. (1) A 9.1.22–24-ben leírt komplexifikációs eljárás annak a kézenfekvő módszernek a koordinátamentes megfogalmazása, ahogyan valós együtthatós polinomiális egyenleteket egyúttal komplex egyenleteknek is tekinthetünk. Ha koordinátákat használunk és a valós másodrendű hiperfelületet egyenlettel adjuk meg, akkor a komplexifikált hiperfelület úgy származik, hogy ugyanazt az egyenletet a komplex koordinátákra vonatkozó egyenletnek tekintjük.

(2) A komplexifikált másodrendű hiperfelület képe egészen más jellegű ponthalmaz is lehet, mint az eredeti valós hiperfelület. Vegyük például a valós másodrendű görbék közül az üres alakzatot definiáló $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ egyenletet, ennek a görbének a komplexifikáltja, a komplex kúpszelet végtelen sok pontot tartalmaz (például az összes $[\cos\alpha : \sin\alpha : i]$ alakú pontot), és homeomorf egy gömbfelülettel. Vagy tekintsük a valós síkon az egyetlen $[0 : 0 : 1]$ pontból álló alakzatot definiáló $x_1^2 + x_2^2 = 0$ egyenletet, ennek a komplexifikáltja

két komplex egyenes (mégpedig $x_1 + ix_2 = 0$ és $x_1 - ix_2 = 0$) egyesítése, amelyek ebben a valós pontban metszik egymást.

9.2. Polaritás

A nemelfajuló másodrendű hiperfelületek igen érdekes és a geometriai alkalmazások szempontjából különösen hasznos megfeleltetést létesítenek a projektív tér pontjai és hipersíkjai között. Ezt a megfeleltetést most részletesen megvizsgáljuk.

Rögzítünk $P = P(W)$-ben egy $[q] \in P\big(Q(W)\big)$ nemelfajuló másodrendű hiperfelületet. Jelölje $\beta : W \times W \to \mathbf{F}$ a q kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvényt. Legyen $\Phi : W \to W^*$ a β-nak természetes módon megfeleltetett lineáris izomorfizmus, azaz $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u})\mathbf{v}$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W)$.

9.2.1. Definíció (Konjugált pontok). Az $X = [\mathbf{x}]$, $Y = [\mathbf{y}] \in P$ pontokat konjugált pontoknak nevezzük $[q]$-ra nézve, ha $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

A pontok konjugáltsága szimmetrikus reláció. Egy pont akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha k$[q]$-hoz tartozik.

9.2.2. Állítás

(1) *Bármely P-beli pont konjugáltjai hipersíkot alkotnak P-ben.*

(2) *Bármely P-beli hipersíkhoz egyetlen olyan P-beli pont létezik, amely a hipersík minden pontjának konjugáltja.*

Bizonyítás: (1): Valóban, rögzített $X = [\mathbf{x}] \in P$ mellett $Y = [\mathbf{y}] \in P$ pontosan akkor konjugáltja X-nek, ha $0 = \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{y}$, azaz X konjugáltjai a $P\big(\operatorname{Ker}(\Phi(\mathbf{x}))\big)$ hipersíkot alkotják.

(2): Ha adott a $H = P(\operatorname{Ker}\alpha)$ hipersík, ahol $\alpha \in W^*$, akkor csak olyan $X = [\mathbf{x}] \in P$ lehet H minden pontjának konjugáltja, amelyre $\operatorname{Ker}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}(\Phi(\mathbf{x}))$, ahonnan $[\Phi(\mathbf{x})] = [\alpha]$ következik. Tehát csakis $X = [\Phi^{-1}(\alpha)]$ jöhet szóba. Másrészt az így definiált X pont nyilván megfelelő. □

9.2.3. Definíció (Poláris, pólus). Az $X \in P$ pont $[q]$-ra vonatkozó polárisának nevezzük azt a P-beli hipersíkot, amely X konjugáltjaiból áll. A $H \subset P$ hipersík $[q]$-ra vonatkozó pólusának nevezzük azt a P-beli pontot, amelynek H a polárisa.

Ezt a hozzárendelést $[q]$-ra vonatkozó polaritásnak nevezzük. A polaritás tehát $P \to P^*$ és $P^* \to P$ bijektív leképezéseket létesít, amelyek egymás inverzei. (Itt $P^* = P(W^*)$ a P duálisa, l. 8.1.4.)

Ha homogén koordinátákkal adjuk meg az $\mathbf{x}$ vektort és B jelöli a q kvadratikus alak mátrixát, akkor 9.2.2.(1) bizonyításából kiolvasható, hogy az $X = [\mathbf{x}]$ pontnak a $[q]$-ra vonatkozó polárisa az a hipersík, amelynek az egyenletében az együtthatók a $B\mathbf{x}$ vektor koordinátái.

9.2.4. Állítás

(1) *A polaritás projektív transzformáció P és P^* között.*

(2) *A polaritás illeszkedéstartó, azaz ha az $A \in P$ pont illeszkedik a $H \subset P$ hipersíkra, akkor H pólusa illeszkedik A polárisára.*

Bizonyítás: Az (1) állítás igazolásához vegyük észre, hogy polaritást a $\Phi : W \to W^*$ lineáris izomorfizmus indukálja, ezért projektivitás. A (2) állítás ebből azonnal következik. Az illeszkedéstartást könnyen meggondolhatjuk anélkül is, hogy (1)-re hivatkoznánk: ha $A \in H$, akkor H pólusa és A konjugált pontok, és emiatt H pólusa hozzátartozik A poláris hipersíkjához. □

Megjegyzés. A klasszikus projektív geometria szóhasználatában a $P \to P^*$ kollineációkat korrelációknak nevezik. Nem nehéz belátni, hogy ha egy korreláció projektív transzformáció P és P^* között, és kétszeri alkalmazása P identikus leképezését adja, akkor az valamely egyértelműen meghatározott nemelfajuló másodrendű görbére vonatkozó polaritás: a korrelációból a Φ lineáris izomorfizmusra, majd abból a β nemelfajuló szimmetrikus bilineáris függvényre következtethetünk vissza.

9.2.5. Példa (Gömbre vonatkozó polaritás euklideszi térben) Legyen most $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, és $\mathbf{P}^d = P(\mathbf{R}^{d+1}) = \overline{\mathbf{R}^d}$, az $\mathbf{R}^d$ euklideszi tér projektív lezárása. Tekintsük az $\mathbf{S}^{d-1}$ euklideszi egységgömbre mint másodrendű hiperfelületre vonatkozó polaritást a $\mathbf{P}^d$ projektív térben. Az $\mathbf{S}^{d-1}$-et definiáló kvadratikus alak mátrixa, és egyúttal a hozzá tartozó Φ leképezés mátrixa a standard bázisra vonatkozóan diagonális, mégpedig rendre az $1, \ldots, 1, -1$ átlóelemekkel. Valamely $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{R}^d$ közönséges pont (azaz homogén koordinátákra átírva az $[a_1 : \ldots : a_d : 1]$ pont) polárisa tehát az a hipersík, amelynek $a_1x_1 + \ldots + a_dx_d - x_{d+1} = 0$ a homogén egyenlete. Átírva $\mathbf{R}^d$-beli Descartes-féle koordinátákra az

$$a_1x_1 + \ldots + a_dx_d = 1$$

affin hipersíkot kapjuk. Az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ esetben ehhez a hipersíkhoz pontosan azok az $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ pontok tartoznak, amelyekre $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 1$. Vegyük észre, hogy ez a hipersík határolja azt az $F_{\mathbf{a}}$ félteret, amely a poláris halmazok 3.4.1-beli konstrukciójában szerepel (a szokásos $(\mathbf{R}^d)^* = \mathbf{R}^d$ azonosítás mellett).

9.2.6. Definíció (Érintő). Legyen $L \subseteq P$ egyenes. Azt mondjuk, hogy L érinti a $[q]$ másodrendű hiperfelületet, ha L-nek és $\mathrm{k}[q]$-nak egyetlen közös pontja van, vagy $L \subseteq \mathrm{k}[q]$. Az első esetben a közös pontot L érintési pontjának nevezzük.

9.2.7. Állítás. *Legyen $A \in \mathrm{k}[q]$ és $L \subseteq P$ egy A-n áthaladó tetszőleges egyenes. Ekkor L pontosan akkor érinti $[q]$-t, ha része A polárisának.*

Bizonyítás: Legyen $A = [\mathbf{u}]$ és rögzítsük az L egyenes egy A-tól különböző $B = [\mathbf{v}]$ pontját. Ekkor az L egyenes A-tól különböző pontjai a $\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakú vektorokkal reprezentálhatók, ahol $\lambda \in \mathbf{F}$ tetszőleges. Egy ilyen pont akkor és csak akkor illeszkedik $\mathrm{k}[q]$-ra, ha

$$0 = q(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda^2 q(\mathbf{u}) + 2\lambda \cdot \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + q(\mathbf{v}) = 2\lambda \cdot \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + q(\mathbf{v}),$$

ami lineáris egyenlet λ-ra nézve.

Ha a $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ főegyüttható nem zérus, akkor egyetlen megoldás van, azaz L-nek és $\mathrm{k}[q]$-nak két közös pontja van. Ilyenkor tehát L nem érintő, és – miután A és B nem konjugáltak – L nem része A polárisának.

Ha $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, akkor vagy nincs megoldás, vagy minden λ megoldás. Mindkét esetben L érintő, és $\beta(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda q(u) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ miatt L része A polárisának. □

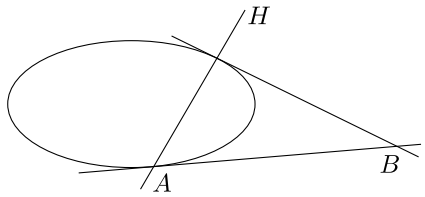
9.2.8. Következmény. *Bármely $A \in \mathrm{k}[q]$-ra $[q]$-nak az A ponton áthaladó érintői hipersíkot söpörnek, mégpedig A polárisát.* □

9.2.9. Definíció (Érintőhipersík). A $H \subset P$ hipersíkot $[q]$ érintőhipersíkjának mondjuk, ha H pólusa illeszkedik $\mathrm{k}[q]$-ra. A pólust H érintési pontjának, H-t pedig az ebben a pontban húzott érintőhipersíknak nevezzük.

Megjegyzés. A 9.2.7. Állítás bizonyításából kiolvasható, hogy egy $L = P(U)$ egyenes (és így egy $H = P(V)$ hipersík is) akkor és csak akkor érinti a $[q]$ másodrendű hiperfelületet, ha a $q|_U$ (illetve a $q|_V$) kvadratikus alak elfajuló. Kézenfekvő tehát egy tetszőleges nemüres $S = P(V) \subset P$ projektív altérre azt mondani, hogy S érinti $[q]$-t, ha $q|_V$ elfajuló. Speciálisan pontok esetére ez a $\mathrm{k}[q]$-ra való illeszkedést jelenti.

9.2.10. Állítás. *Legyen $B \in P - \mathrm{k}[q]$ tetszőleges pont és jelölje H a B poláris hipersíkját. Ekkor a B ponton keresztül $[q]$-hoz húzható érintőegyenesek pontosan az $\langle A, B\rangle$ alakú egyenesek, ahol $A \in H \cap \mathrm{k}[q]$.*

Bizonyítás: Ha L érintő és $B \in L$, akkor jelölje A az L érintési pontját. Ekkor 9.2.8 miatt A és B konjugáltak, ezért $A \in H \cap \mathrm{k}[q]$.



Megfordítva, ha $A \in H \cap \mathrm{k}[q]$, akkor A és B konjugáltak, ezért 9.2.7 miatt az $\langle A, B\rangle$ egyenes érintő. □

9.2.11. Következmény. *Jelölje $H = P(V)$ a $B \in P - \mathrm{k}[q]$ pont polárisát. Ha B-ből lehet érintőt húzni $[q]$-hoz, akkor a B-ből $[q]$-hoz húzott érintők a H-beli nemelfajuló $[q|_V]$ másodrendű hiperfelületre állított B csúcsú kúpot söprik.*

Bizonyítás: Valóban, a következmény $H \cap \mathrm{k}[q] = \mathrm{k}[q|_V]$ miatt 9.2.10-ből adódik. □

9.2.12. Következmény. *Ha $d = 2$ és A a P projektív síknak a $[q]$ nemelfajuló kúpszelet képéhez nem tartozó pontja, akkor A-n keresztül $[q]$-hoz vagy két érintő húzható, vagy egy sem.*

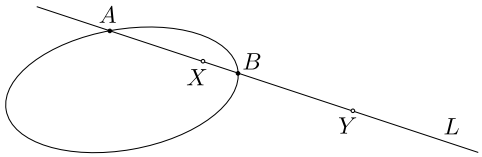
Bizonyítás: Ha $A \notin \mathrm{k}[q]$, akkor A nem tartozik hozzá a polárisához. Ezért A polárisa nem érintőegyenes, azaz $[q]$-nak ezzel az egyenessel vett szelete nemelfajuló másodrendű hiperfelület A poláris egyenesén. Az egyenesen egy nemelfajuló másodrendű hiperfelület képe csak 0 vagy 2 pontból állhat (l. 9.1.5), így 9.2.11 miatt A-n át vagy 0, vagy 2 érintő húzható. □

Megjegyzések. (1) Ha $\mathbf{F}$ algebrailag zárt (pl. $\mathbf{F} = \mathbf{C}$), akkor csak a két érintő esete fordulhat elő.

(2) Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ és $\mathrm{k}[q] \neq \emptyset$, akkor a 9.2.12-beli két eset aszerint áll elő, hogy az A pont a kúpszeletnek külső vagy belső pontja. A valós projektív síkon egy nemelfajuló, nemüres kúpszelet zárt görbe, amely a síkot két tartományra vágja; ezek közül az egyik tartalmaz egyenest (ez a kúpszelet külseje), a másik nem (ez a kúpszelet belseje). Ebből rögtön látszik, hogy egy projektivitás a kúpszelet belsejét szükségképpen a képkúpszelet belsejére, külsejét a külsejére képezi. Könnyen meggondolható, hogy ezek nem is homeomorf tartományok: a kúpszelet belseje a nyílt körlemezzel, míg külseje a nyílt Möbius-szalaggal homeomorf.

(3) Legyen P az E euklideszi sík projektív lezárása. Egy P-beli nemelfajuló és nemüres képhalmazú kúpszelet aszerint ellipszis, parabola vagy hiperbola projektív lezárása, hogy E ideális egyenesének 0, 1, illetve 2 közös pontja van a görbével. Az ideális egyenes érinti a parabolát. A hiperbola ideális pontbeli érintői az aszimptoták.

9.2.13. Tétel. *Legyen $A, B \in \mathrm{k}[q]$ két különböző pont és tegyük fel, hogy az $\langle A, B\rangle$ egyenes nem fekszik $\mathrm{k}[q]$-ban. Az $\langle A, B\rangle$ szelő két további X és Y pontja akkor és csak akkor konjugált $[q]$-ra nézve, ha $(ABXY) = -1$.*



Bizonyítás: Legyen $L = \langle A, B\rangle$. A tett feltevések mellett nyilván $\{A, B\} = L \cap \mathrm{k}[q]$. Az L egyenesnek bármely A-tól és B-től különböző X pontjához egyértelműen található olyan $Y \in L$ pont, amely X-nek konjugáltja, hiszen X polárisa egy X-et nem tartalmazó hipersík, amely így L-et egyetlen pontban metszi. A konjugáltság szimmetrikus reláció, ezért az $L - \{A, B\}$ halmaz pontjait párokba állítja. Ugyancsak párokba állítja ezeket a pontokat az $\{A, B\}$-re vonatkozó harmonikus viszony is. Azt kell belátnunk, hogy a két párba állítás azonos. Ehhez elegendő annyit belátni, hogy ha $(ABXY) = -1$, akkor X és Y konjugáltak, hiszen a megfordítás ekkor már indirekt úton nyilvánvaló.

Tegyük fel tehát, hogy $(ABXY) = -1$. Válasszunk reprezentáns vektorokat először X és Y számára: $X = [\mathbf{x}]$, $Y = [\mathbf{y}]$, majd írjuk fel A egy reprezentáns vektorát $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ alakban. Ekkor $(ABXY) = -1$ miatt a $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{y}$ vektor a B pontot reprezentálja. Miután A és B a $[q]$ másodrendű hiperfelület pontjai, $q(\mathbf{a}) = 0$ és $q(\mathbf{b}) = 0$, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda^2 q(\mathbf{x}) + 2\lambda\mu \cdot \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu^2 q(\mathbf{y}) \\ \text{és}\quad 0 &= \beta(\lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{y}) = \lambda^2 q(\mathbf{x}) - 2\lambda\mu \cdot \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu^2 q(\mathbf{y})\,, \end{aligned}$$

ahonnan $4\lambda\mu \cdot \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ következik. Itt $\lambda, \mu \neq 0$, így $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$ miatt $4\lambda\mu \neq 0$. Ezért $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, azaz X és Y konjugáltak. □

9.2.14. Példa (Polaritás az egyenesen). Tegyük föl, hogy $d = 1$ és $[q]$ nemelfajuló másodrendű hiperfelület az L projektív egyenesen. Miután a hipersíkok most pontok, a $[q]$-ra vonatkozó polaritás pontoknak pontokat feleltet meg, tehát egy $p : L \to L$ leképezésként fogható fel.

Ha $\mathrm{k}[q] \neq \emptyset$, azaz $[q]$ képe valamely $\{A, B\}$ pontpár az L egyenesen, akkor a 9.2.13. Tétel alapján ez a leképezés éppen az A, B fixpontú harmonikus involúció.

Ezt az észrevételt kiterjeszthetjük az általános esetre is (amikor $\mathrm{k}[q] = \emptyset$ is lehet). Tekinthetjük ugyanis a polaritás által 9.2.4.(1) szerint adott $L \to L^*$ projektivitást. Ezt azáltal tudjuk $L \to L$ leképezésnek tekinteni, hogy $\dim L = 1$-nek köszönhetően természetes azonosítás áll fenn L és L^* között

(l. a 8.3.5 utáni negyedik megjegyzést). Ez az azonosítás is projektivitás, ezért az egyenesen értelmezett $p : L \to L$ polaritás is projektivitás. Miután a pontok konjugáltsága szimmetrikus reláció, p involúció az L egyenesen.

A 9.2.13. Tétel alábbi következménye jelentős szerepet fog játszani a 9.4. szakaszban, és később a hiperbolikus geometria projektív modelljével kapcsolatos vizsgálatainkban.

9.2.15. Következmény. *Legyen $A \in P - \mathrm{k}[q]$ és legyen H az A pont poláris hipersíkja $[q]$-ra nézve. Ekkor a $h_{A,H} : P \to P$ harmonikus involúció a $\mathrm{k}[q]$ halmazt önmagára képezi.* □

A 9.2.13. Tételnek számos érdekes alkalmazása ismeretes a kúpszeletek elemi geometriájában. Ezek közül az alábbi állítást emeljük ki.

9.2.16. Következmény. *A valós affin síkon egy ellipszis, parabola vagy hiperbola párhuzamos húrjainak felezőpontjai kollineárisak.*

Bizonyítás: Valóban, 9.2.13 miatt mindegyik felezőpont konjugáltja a húrokat tartó egyenesek közös ideális pontjának, ezért illeszkedik ennek az ideális pontnak a polárisára. □

Ennek a szakasznak a hátralevő részében azt vizsgáljuk meg, hogyan lehet a dualitás elvét (l. a 8.3.5. Állítást) olyan állításokra kiterjeszteni, amelyekben kúpszeletek is szerepelhetnek. Világos, mit kell a kúpszelet fogalmának duálisán értenünk: másodrendű görbét a duális projektív síkban. A kérdés az, hogy ennek a képhalmaza (mint a duális síkban fekvő ponthalmaz) miféle egyeneshalmazt jelent az eredeti síkban. Ezt a kérdést azáltal tesszük konkréttá, hogy továbbra is rögzítettnek tekintünk a P projektív síkban egy $[q]$ nemelfajuló másodrendű görbét, amely a rá vonatkozó polaritás révén egy $P \to P^*$ projektív izomorfizmust rögzít. A duális síkban fekvő kúpszelet képhalmazára tehát úgy tekinthetünk, mint valamely P-beli $[r]$ kúpszelethez tartozó pontok $[q]$-ra vonatkozó polárisainak a halmazára. Ha ez az $[r]$ kúpszelet nemelfajuló, akkor a kérdésre a választ az alábbi tétel adja meg. A tétel nem csak síkban, hanem tetszőleges dimenzióban érvényes. Rögzítettnek tekintjük tehát a d-dimenziós P projektív térben a $[q]$ nemelfajuló másodrendű hiperfelületet.

9.2.17. Tétel. *Legyen $[r] \in P\big(Q(W)\big)$ nemelfajuló másodrendű hiperfelület. Ekkor létezik P-ben olyan $[s]$ nemelfajuló másodrendű hiperfelület, hogy a*

$$\mathcal{H} = \{A \text{ polárisa } [q]\text{-ra nézve} \,:\, A \in \mathrm{k}[r]\,\}$$

hipersíkhalmaz pontosan az $[s]$ hiperfelület érintőhipersíkjaiból áll.

Bizonyítás: Abban a speciális esetben, amikor $[r]$ éppen megegyezik a $[q]$ másodrendű hiperfelülettel, a 9.2.9. Definíció alapján $[s]$ is választható $[q]$-val azonosnak.

Az általános esetben megmutatjuk, hogy $[r]$-nek egy alkalmas projektív transzformációnál származó képe lesz $[s]$. Ehhez össze kell vetnünk az $[r]$-re vonatkozó polaritást a $[q]$-ra vonatkozóval.

Jelölje $p_{[r]}$ és $p_{[q]}$ az $[r]$-re, illetve $[q]$-ra vonatkozó $P \to P^*$ polaritást, ezek 9.2.4.(1) szerint projektív transzformációk. A P^* duális projektív tér elemeit a P-beli hipersíkokkal tekintjük azonosnak, ezáltal a tételbeli $\mathcal{H}$ hipersíkhalmaz a $p_{[q]}(\mathrm{k}[r])$ részhalmazzal azonos P^*-ban. Nyilván $\mathcal{H} = p_{[q]}\big(p_{[r]}^{-1}(p_{[r]}(\mathrm{k}[r]))\big)$, és itt a $\mathcal{H}_{[r]} = p_{[r]}(\mathrm{k}[r])$ halmazról az elöljáróban tisztázott speciális eset miatt már tudjuk, hogy egy másodrendű hiperfelület (nevezetesen $[r]$) érintőhipersíkjaiból áll. A $\mathcal{H}$ hipersíkhalmaz pedig a $\mathcal{H}_{[r]}$ halmaznak a $p_{[q]} \circ p_{[r]}^{-1} :$ $: P^* \to P^*$ projektív transzformációnál származó képe.

Gondoljuk meg, hogy bármely $g : P^* \to P^*$ projektív transzformáció valamely (egyértelműen meghatározott) $f : P \to P$ projektív transzformációnak az „adjungáltja", azaz az f által a hipersíkok halmazán létesített leképezés. Valóban, ha $g = [\psi]$, ahol $\psi \in GL(W^*)$, akkor ψ lineáris algebrai értelemben vett adjungáltja, tehát az a $\varphi \in GL(W)$ leképezés, amelyre $\psi(\alpha) = \alpha \circ \varphi$ ($\alpha \in$ $\in W^*$), indukálja f-et, hiszen $f\big(P(\operatorname{Ker}\alpha)\big) = P(\varphi(\operatorname{Ker}\alpha)) = P(\operatorname{Ker}\psi(\alpha)) =$ $= g([\alpha])$ tetszőleges $\alpha \in W^*$, $\alpha \neq 0$ esetén.

Létezik tehát olyan $f = [\varphi] : P \to P$ projektivitás, amelynél a $\mathcal{H}_{[r]}$ halmazhoz tartozó hipersíkok éppen a $\mathcal{H}$-beliekre képeződnek. Ezért $\mathcal{H}$ pontosan az $[r]$ másodrendű hiperfelület f-nél származó képének, azaz annak az $[s]$ másodrendű hiperfelületnek az érintőhipersíkjaiból áll, amelyre $s = r \circ \varphi^{-1}$. $\square$

Megjegyzések. (1) Ha W-ben rögzítünk egy bázist, amelyre vonatkozóan q mátrixa B, és r mátrixa C, akkor a tétel bizonyításában származtatott s kvadratikus alak mátrixa $BC^{-1}B$. Ennek alapján a tétel állítását nem volna nehéz csupán mátrixokkal történő számolás útján ellenőrizni.

(2) A tételben csak $[s]$ létezését állítottuk, egyértelműségét nem. Az üres képhalmazú másodrendű hiperfelület példája mutatja, hogy az egyértelműség általában nem is igaz. Viszont ha az alaptest algebrailag zárt, akkor $[s]$ egyértelműen létezik.

(3) A 9.2.17. Tételből könnyen következik az a konvex geometriai tétel, hogy euklideszi vektortérben egy origó középpontú ellipszoidtest poláris halmaza szintén ellipszoidtest (vö. 9.2.5). Könnyen ellenőrizhető ugyanis (például az (1) megjegyzést használva), hogy ha $[q]$ az egységgömb és $[r]$ egy origó középpontú ellipszoid, akkor $[s]$ is origó középpontú ellipszoid.

9.2.18. Definíció (Vonalkúpszelet). Legyen $d = 2$. A P projektív síkban vonalkúpszeleteknek nevezzük a P^* duális projektív sík másodrendű görbéit.

Egy P-beli vonalkúpszelet képhalmazának azt a P-beli egyeneshalmazt tekintjük, amely a szóban forgó másodrendű görbe P^*-beli képhalmazának P-ben megfelel. A 9.2.17. Tétel alapján tudjuk, hogy bármely nemelfajuló vonalkúpszelet képhalmaza valamely (eredeti értelemben vett) nemelfajuló kúpszelet érintőegyeneseiből áll. A továbbiakban, ha erre a megkülönböztetésre szükség van, az eredeti P-beli kúpszeleteket pontkúpszeletnek is nevezhetjük.

9.2.19. Példa (Projektív képződmény mint vonalkúpszelet). A 8.7.19. Tétel és a 9.1.12. Példa dualizálásával, valamint a 9.2.17. Tétel alkalmazásával nyerjük, hogy ha a projektív sík két különböző egyenese között adott egy projektív, de nem perspektív megfeleltetés, akkor ennek a képződménye, azaz az egymásnak megfeleltetett pontokat összekötő egyenesek rendszere egy nemelfajuló vonalkúpszelet képhalmaza, tehát valamely, a projektív síkban fekvő nemelfajuló pontkúpszelet érintőiből áll.

9.2.20. Példa (Parabola). Konkrét példa gyanánt tekintsük az euklideszi sík két nem párhuzamos egyenesét, mozogjon rajtuk egy-egy pont egyenletes sebességgel úgy, hogy a metszésponton különböző pillanatokban haladnak át. Minden időpillanatban kössük össze a két pontot egy egyenessel. Az így nyert egyenesek mindannyian egy nemelfajuló kúpszeletet érintenek. A két egyenes közti megfeleltetés affin, ezért az euklideszi sík projektív lezárásában az ideális pontjaikat egymásnak felelteti meg. Emiatt az ideális egyenes érinti a projektív képződményt, ami így csak parabola lehet.

9.3. Kúpszeletsorok

9.3.1. Definíció (Másodrendű hiperfelületsor). Legyen $P = P(W)$ projektív tér, $d = \dim P \geq 1$. A P-beli másodrendű hiperfelületek a $P\big(Q(W)\big)$ projektív teret alkotják. Ennek a projektív térnek az egyeneseit P-beli másodrendű hiperfelületsoroknak nevezzük.

Ha tehát q_1 és q_2 két lineárisan független kvadratikus alak a W vektortéren, akkor a $q_1(\mathbf{x}) = 0$ és $q_2(\mathbf{x}) = 0$ egyenletű másodrendű hiperfelületek egyértelműen foglalhatók másodrendű hiperfelületsorba, mégpedig abba, amelynek a tagjait a $\lambda_1 q_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 q_2(\mathbf{x}) = 0$ egyenletek írják le, ahol a λ_1 és λ_2 együtthatók közül nem mindkettő 0.

Ha $d = 2$, akkor a másodrendű hiperfelületsort kúpszeletsornak, ha $d = 1$, akkor másodrendű pontpársornak nevezzük.

Megjegyzés. Egy másodrendű hiperfelületsornak általában elfajuló tagjai is vannak. Sőt az is előfordulhat, hogy egy másodrendű hiperfelületsor összes tagja elfajuló. Szokás magát a másodrendű hiperfelületsort nemelfajulónak nevezni, ha létezik legalább egy nemelfajuló tagja. Például a projektív egyenesen bármely másodrendű pontpársor nemelfajuló (ha ugyanis $x_1^2 = 0$ és $x_2^2 = 0$ két elfajuló pontpár egyenlete, akkor az általuk generált pontpársorhoz hozzátartozik $x_1^2 + x_2^2 = 0$ is, amely $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$ miatt nemelfajuló pontpár egyenlete). Általában, ha valamilyen rögzített bázisra vonatkozóan q_1 mátrixa M_1, q_2-é M_2, akkor a $\langle [q_1], [q_2] \rangle \subseteq P\big(Q(W)\big)$ másodrendű hiperfelületsor elfajuló tagjait a $\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0$ egyenlet határozza meg. Ez, ha nem azonosan zérus, akkor homogén $(d+1)$-edfokú polinomiális egyenlet a (λ_1, λ_2) együtthatópárra nézve. Így algebrailag zárt test fölött például minden másodrendű hiperfelületsor tartalmaz elfajuló tagot (sőt alkalmasan definiált multiplicitással számolva a nemelfajuló másodrendű hiperfelületsorok pontosan $(d+1)$-et). Páros d esetén $\mathbf{R}$ fölött is van nemtriviális gyök, ezért például a valós projektív síkon bármely kúpszeletsornak szükségképpen van elfajuló tagja.

9.3.2. Definíció (Tartópont). Legyen $\mathcal{Q}$ másodrendű hiperfelületsor P-ben. Az $A \in P$ pontot $\mathcal{Q}$ tartópontjának nevezzük, ha minden $[q] \in \mathcal{Q}$-ra $A \in \mathrm{k}[q]$.

Nincs minden másodrendű hiperfelületsornak tartópontja: ha $\mathrm{k}[q_1] \cap \mathrm{k}[q_2] = \emptyset$, akkor $\mathcal{Q} = \langle [q_1], [q_2] \rangle$-nak nyilván nem lehet tartópontja.

9.3.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{Q}$ másodrendű hiperfelületsor P-ben és $A \in P$. Ekkor vagy A tartópontja $\mathcal{Q}$-nak, vagy pedig pontosan egy olyan $[q] \in \mathcal{Q}$ létezik, amelyre $A \in \mathrm{k}[q]$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{Q} = \langle [q_1], [q_2] \rangle$. Ha $A = [\mathbf{a}]$ és $q_1(\mathbf{a}) = q_2(\mathbf{a}) = 0$, akkor $q(\mathbf{a}) = 0$ bármely $q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$-re, azaz A tartópontja $\mathcal{Q}$-nak. Ha pedig $q_1(\mathbf{a})$ és $q_2(\mathbf{a})$ közül legalább az egyik nem 0, akkor a $\lambda_1 q_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 q_2(\mathbf{a}) = 0$ egyenletnek arányosság erejéig egyértelműen létezik nemtriviális (λ_1, λ_2) megoldása (mégpedig $\lambda_1 = q_2(\mathbf{a})$, $\lambda_2 = -q_1(\mathbf{a})$), ezekkel és arányosság erejéig csak ezekkel az együtthatókkal lesz $q(\mathbf{a}) = 0$. □

Megjegyzés. Amikor a projektív sík kúpszeletsorait vizsgáljuk, illetve alkalmazzuk, azok legtöbbször tartópontjaik segítségével vannak megadva. Ennek a feltételeit tisztázzuk az alábbiakban.

9.3.4. Tétel. *Legyen $d = 2$ és tegyük föl, hogy A_1, A_2, A_3, A_4 a P projektív sík négy különböző pontja, amelyek nem illeszkednek egy egyenesre. Ekkor azok a másodrendű görbék, amelyek áthaladnak az A_1, A_2, A_3, A_4*

pontokon, kúpszeletsort alkotnak P-ben, amelynek ez a négy pont tartópontja. Ha a négy pont között nincs három kollineáris, akkor a kúpszeletsornak más tartópontja nincsen.

Bizonyítás: Legyen $i = 1,2,3,4$-re $A_i = [\mathbf{a}_i]$, ekkor a $q(\mathbf{a}_i) = 0$ feltétel homogén lineáris egyenlet q-ra. Belátjuk, hogy ez a négy egyenlet lineárisan független. Ebből már következik, hogy kúpszeletsort kapunk, ugyanis ekkor $\dim Q(W) = 6$ miatt a $\{q \in Q(W) : q(\mathbf{a}_i) = 0 \ (i = 1,2,3,4)\}$ altér 2-dimenziós, és így projektivizáltja egyenes.

Megmutatjuk például, hogy a negyedik egyenlet független az első háromtól, és ugyanilyen módon nyerhető bármelyikük függetlensége a többitől. Legyen $1 \leq i, j \leq 4$-re $l_{ij} = 0$ az $\langle A_i, A_j \rangle$ egyenes homogén lineáris egyenlete. Tekintsük az A_1, A_2, A_3 pontok által páronként kifeszített egyeneseket. Akár kollineáris ez a három pont, akár nem, mindig lehet két olyan pontpárt közülük kiválasztani, hogy A_4 nem illeszkedik az általuk meghatározott (egy vagy két) egyenesre. Legyen például $\{A_1, A_2\}$ és $\{A_2, A_3\}$ két ilyen pontpár. Ekkor $l_{12} \cdot l_{23} \in Q(W)$, $(l_{12} \cdot l_{23})(\mathbf{a}_1) = (l_{12} \cdot l_{23})(\mathbf{a}_2) = (l_{12} \cdot l_{23})(\mathbf{a}_3) = 0$, de $(l_{12} \cdot l_{23})(\mathbf{a}_4) \neq 0$. Emiatt a negyedik egyenletnek függetlennek kell lennie az első háromtól, hiszen különben $(l_{12} \cdot l_{23})(\mathbf{a}_4) = 0$ következne.

Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok nyilvánvalóan tartópontjai a szóban forgó kúpszeletsornak. Tegyük föl, hogy a négy pont között nincs három kollineáris, belátjuk, hogy más tartópont nincsen. Tekintsük az $[l_{12} \cdot l_{34}]$ és $[l_{13} \cdot l_{24}]$ másodrendű görbéket. Mindkettő egyenespárrá elfajuló kúpszelet. Mindkettő a kúpszeletsorhoz tartozik és már ennek a két kúpszeletnek sincs az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokon kívül más közös pontja. □

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha a 9.3.4-beli négy pont között van három kollineáris, akkor a keletkező kúpszeletsor minden tagja elfajuló. Ha például A_1, A_2 és A_3 egy $L \subset P$ egyenesre illeszkedik, akkor könnyen meggondolható, hogy a kúpszeletsor tagjai pontosan azok az egyenespárok, amelyek L-ből és egy tetszőleges, A_4-en áthaladó egyenesből állnak. Ha a négy pont között semelyik három sem kollineáris, akkor a kúpszeletsor nemelfajuló (l. 9.3.10), és három elfajuló tagja van, mégpedig a négy pontra illeszthető három egyenespár.

9.3.5. Definíció (Köri pontok). Tekintsük az E euklideszi sík $\overline{E}$ projektív lezárását, valamint annak komplexifikáltját, az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$ komplex projektív síkot. A ∞_E ideális egyenesen az ortogonális involúciónak (közönséges pont körüli $\pi/2$ szögű forgatásnak) valós fixpontja nincsen, de a komplexifikált ideális egyenesen 8.6.15 alapján két fixpontja van. Ezt a két $\infty_E^{\mathbf{C}}$-beli pontot az E sík köri pontjainak nevezzük.

Vezessük be az x_1, x_2 Descartes-féle koordinátákat E-ben, ekkor az ideális egyenes pontjai homogén koordinátákkal megadva $[x_1 : x_2 : 0]$ alakúak. Az

ortogonális involúció az $[x_1 : x_2 : 0]$ ponthoz $[-x_2 : x_1 : 0]$-t rendeli, ezért fixpontjait a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixnak a (0 harmadik koordinátával kiegészített) sajátvektorai reprezentálják. Ezért a két köri pont (a Descartes-féle koordinátarendszer megválasztásától függetlenül) homogén koordinátákkal felírva $[1 : i : 0]$ és $[1 : -i : 0]$.

Nem nehéz meggondolni, hogy a köri pontokat nemcsak az ortogonális involúció, hanem minden E-beli forgatás, sőt E-nek minden irányítástartó hasonlósági transzformációja is fixen hagyja, az irányításváltó hasonlóságok pedig felcserélik őket. Ezek a tulajdonságok jellemzik is a hasonlóságokat az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$ komplex projektív sík azon projektivitásainak a körében, amelyek $\overline{E}$-t saját magába képezik (azaz amelyek komplexifikációval keletkeznek $\overline{E}$ valamely valós projektív transzformációjából).

A köri pontok elnevezését az alábbi észrevétel magyarázza. Tekintsük az $\mathbf{R}^2$ euklideszi koordinátasíkon az

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

affin másodrendű görbét. Ez a görbe akkor és csak akkor kör (megengedve most a zérus sugarú, elfajuló „pontkör” és a negatív sugárnégyzetű „képzetes kör” esetét is), ha $a_{11} = a_{22} \neq 0$ és $a_{12} = 0$. Ez a feltétel pedig azzal egyenértékű, hogy a két köri pont kielégíti a 8.4.4 szerint homogén koordinátákra átírt egyenletet. Az euklideszi síkon tehát egy valós kúpszelet pontosan akkor kör (esetleg egypontú vagy képzetes kör), ha a projektív lezárásának a komplexifikáltja áthalad a két köri ponton. (Vegyük észre, hogy ha az egyik köri ponton áthalad, akkor a másikon is, hiszen az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$-beli komplex konjugálás a két köri pontot felcseréli, míg a valós kúpszelet komplexifikáltját önmagára képezi.)

A köri pontok és a kúpszeletek érdekes kapcsolatát mutatja a következő példa.

9.3.6. Példa. Legyen K ellipszis, parabola vagy hiperbola az E euklideszi síkban, jelölje $\overline{K}^{\mathbf{C}}$ a K projektív lezárásának a komplexifikáltját $\overline{E}^{\mathbf{C}}$-ben. Húzzunk érintőket K egy fókuszából $\overline{K}^{\mathbf{C}}$-hez az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$ komplexifikált projektív térben. Azt állítjuk, hogy ennek a két egyenesnek az ideális pontjai éppen a köri pontok. A számolást csak az ellipszis esetében vázoljuk, a másik két kúpszelet hasonló módon kezelhető.

Feltehetjük, hogy az ellipszis a Descartes-féle koordinátarendszerhez képest a 9.1.21 szerinti kanonikus helyzetben van, azaz egyenlete $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alakú, fókuszai a $(\pm c,0)$ pontok. Az ellipszist definiáló kvadratikus alak mátrixa diagonális, az átlóban rendre az $1/a^2$, $1/b^2$, -1 elemekkel. Ezért a $[c : 0 : 1]$ homogén koordinátájú fókusz polárisának az egyenlete 9.2.3 alapján

$(c/a^2)x_1 - x_3 = 0$. Ez az egyenes az ellipszis komplexifikáltját az $[a^2 : ib^2 : c]$ és $[a^2 : -ib^2 : c]$ pontokban metszi (felhasználva, hogy $c^2 = a^2 - b^2$). Ezek a pontok tehát a $[c : 0 : 1]$ fókuszból húzható érintők érintési pontjai (l. 9.2.10). A fókuszt ezekkel a pontokkal összekötő egyenesek, azaz a kérdéses érintők egyenletei tehát $-ib^2x_1 + b^2x_2 + ib^2cx_3 = 0$, illetve $ib^2x_1 + b^2x_2 - ib^2cx_3 = 0$. Ezek ideális pontjai valóban az $[1 : i : 0]$, $[1 : -i : 0]$ köri pontok. □

9.3.7. Példa (Körsorok). Legyen K_1 és K_2 két kör az E euklideszi síkon. Használjunk Descartes-féle koordinátákból származtatott homogén koordinátákat az $\overline{E}$ projektív síkon, és legyen $q_1(\mathbf{x}) = 0$, illetve $q_2(\mathbf{x}) = 0$ a körök egyenlete, ahol $q_1, q_2 \in Q(\mathbf{R}^3)$. A $q_1^{\mathbf{C}}$ és $q_2^{\mathbf{C}}$ komplexifikált kvadratikus alakok által az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$ komplex projektív síkon generált kúpszeletsornak 9.3.3 alapján mindkét köri pont tartópontja. Ezért a valós részsíkra, azaz $\overline{E}$-ra szorítkozva a kúpszeletsor minden nemelfajuló tagja kör. Miután két köregyenlet alkalmas kombinációjaként a hatványvonalból és az ideális egyenesből álló elfajuló másodrendű görbe egyenlete is előáll, és ilyen görbéből a kúpszeletsor csak egyet tartalmazhat, a szóban forgó körrendszer bármely két tagjának közös a hatványvonala (megengedve az üres hatványvonal, azaz koncentrikus körök esetét is). Tehát a K_1 és K_2 által generált kúpszeletsor körsor.

Az E euklideszi síkon a körsorok tehát úgy állnak elő, hogy olyan $\overline{E}$-beli kúpszeletsoroknak tekintjük az E-be eső részét, amelyek komplexifikáltjának a két köri pont tartópontja. A koncentrikus körsoroknak nincs további tartópontja, az érintkező körsoroknak egy további tartópontja van, az Apollóniosz-féle és a metsző körsoroknak kettő. A metsző körsor esetében a két további tartópont a valós sík pontjai, az elliptikus körsoréi nem valós pontok, amelyek (csakúgy, mint a köri pontok) egymás komplex konjugáltjai.

9.3.8. Állítás. *Ha a projektív síkon adott öt különböző pont között van olyan négy, amelyek között nincs három kollineáris, akkor egy és csak egy olyan kúpszelet létezik, amely áthalad az öt adott ponton.*

Bizonyítás: Legyenek a pontok A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 úgy, hogy A_1, A_2, A_3, A_4 között nincs három kollineáris. Tekintsük az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokon áthaladó kúpszeletek alkotta kúpszeletsort, ennek 9.3.3 és 9.3.4 miatt egyetlen tagja halad át A_5-ön is. □

9.3.9. Definíció (Általános helyzetű pontok). A projektív sík pontjainak egy rendszerét általános helyzetűnek mondjuk, ha a pontok között nincs három kollineáris.

Négy pont akkor és csak akkor általános helyzetű, ha projektív bázist alkot. Egy legalább négyelemű pontrendszer akkor és csak akkor általános helyzetű, ha bármely négy pontja projektív bázis.

9.3.10. Következmény. *Ha a projektív síkon adott öt általános helyzetű pont, akkor egy és csak egy olyan nemelfajuló kúpszelet létezik, amely áthalad az öt adott ponton.*

Bizonyítás: Valóban, a 9.3.8 szerinti kúpszelet ebben az esetben nem lehet elfajuló, hiszen elfajuló kúpszelet bármely öt pontja között van három kollineáris. □

9.3.11. Példa (Projektív képződmény). Legyenek A, A', B_1, B_2 és B_3 általános helyzetű pontok a P projektív síkon. Tekintsük az A, illetve A' tartópontú S, illetve S' sugársort P-ben. Definiáljuk az $f : S \to S'$ projektivitást az $\langle A, B_i\rangle \mapsto \langle A', B_i\rangle$ ($i = 1,2,3$) hozzárendeléssel. Állítjuk, hogy ennek az f projektivitásnak a projektív képződménye az A, A', B_1, B_2 és B_3 pontokon áthaladó kúpszelet. A konstrukció folytán a képződmény áthalad a nem kollineáris B_1, B_2 és B_3 pontokon, ezért f nem lehet perspektivitás. A képződmény ilyenkor az A, A' tartópontokon is áthalad, továbbá a 8.7.19. Tétel és a 9.1.12. Példa szerint a projektív képződmény nemelfajuló kúpszelet.

Ha az A, A', B_1, B_2 és B_3 pontokat eleve egy nemelfajuló kúpszelet pontjai közül választjuk, akkor ezek automatikusan általános helyzetű pontok, és a 9.3.10-beli egyértelműségi tulajdonság miatt a fenti konstrukció visszaadja az eredeti kúpszeletet.

Ha például B_1, B_2 és B_3 három nem kollineáris pont az E euklideszi síkon és A, A' az E köri pontjai, akkor a képződmény a $B_1B_2B_3$ háromszög köré írt kör. (Pontosabban ez a kör az $\overline{E}^{\mathbf{C}}$ komplexifikált projektív síkban keletkező projektív képződménynek az $\overline{E}$ valós részsíkba eső részhalmaza.)

Vegyük észre, hogy az $\langle A, A'\rangle$ egyenesnek az f-nél vett ősképe, illetve képe a kúpszelet A-beli, illetve A'-beli érintője. Valóban, ezeknek az egyeneseknek a megfelelő tartópontokon kívül nem lehet más közös pontja a kúpszelettel, ezért érintők. □

Rátérünk a kúpszeletsorok és az egyenes involúciói közti kapcsolat vizsgálatára. Az egyenes esetében egy másodrendű pontpársor akkor érdekes, ha nincsen tartópontja; ezt tisztázza az alábbi tétel.

9.3.12. Tétel. *Legyen $\mathcal{Q}$ másodrendű pontpársor az L projektív egyenesen. Ekkor két eset lehetséges: vagy*

(1) *létezik olyan $A \in L$ pont, hogy minden $[q] \in \mathcal{Q}$-ra $\mathrm{k}[q] = \{A, B\}$ és itt minden $B \in L$ előáll, vagy pedig*

(2) *létezik olyan $f : L \to L$ projektív involúció, hogy a $\mathcal{Q}$-hoz tartozó pontpárok pontosan az $\{X, f(X)\}$ ($X \in L$) alakban előálló párok.*

Bizonyítás: Ha $\mathcal{Q}$-nak van tartópontja, akkor csak egy tartópontja lehet, jelöljük a tartópontot A-val. Ekkor 9.3.3 alapján az $\{A, B\}$ pár minden $B \in \in L - \{A\}$-ra előáll $\mathcal{Q}$-ban. Állítjuk, hogy a $\mathcal{Q}$ pontpársornak létezik elfajuló tagja, mégpedig az $\{A, A\} = \{A\}$ pont. Valóban, tetszőleges, A-tól és egymástól különböző $B, C \in L$ pontokat választva, majd $B = [0 : 1]$, $C = [1 : 0]$, $A = [1 : 1]$ koordinátázást használva az $\{A, B\}$ pár egyenlete $x_1^2 - x_1x_2 = 0$, az $\{A, C\}$ páré $x_2^2 - x_1x_2 = 0$, a két egyenlet összege pedig az A pontot adó elfajuló $(x_1 - x_2)^2 = 0$ egyenlet. Ezzel beláttuk, hogy a tételbeli (1) eset áll fönn.

Tegyük föl most, hogy $\mathcal{Q}$-nak nincs tartópontja, bebizonyítjuk a (2) tulajdonságot. Szemeljünk ki $\mathcal{Q}$-ból egy olyan pontpárt, $\{A, A'\}$-t, amelyre $A \neq A'$. (Ilyen pontpár biztosan létezik, hiszen az egyenesen egy másodrendű pontpársor nem állhat csupa elfajuló pontpárból.) Koordinátázzuk az L egyenest úgy, hogy $A = [0 : 1]$ és $A' = [1 : 0]$ legyen (azaz affin koordinátázást használva $A = 0$ és $A' = \infty$). Ekkor az $\{A, A'\}$ pontpár egyenlete $x_1x_2 = 0$. Tekintsük a pontpársor egy másik tagját, legyen annak az egyenlete $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$. A pontpársor $\{A, A'\}$-től különböző tagjait az $ax_1^2 + (b + \lambda)x_1x_2 + cx_2^2 = 0$ kombinációk adják meg, ahol $\lambda \in \mathbf{F}$ tetszőleges. Affin koordinátára átírva ezek az egyenletek $ax^2 + (b + \lambda)x + c = 0$ alakúak. Bármely λ esetén az egyenlet két gyökének a szorzata c-vel egyenlő. Tekintsük L-en a választott koordinátázás szerinti $f(x) = c/x$ involúciót, ekkor a pontpársor minden tagja (beleértve $\{A, A'\}$-t is) $\{X, f(X)\}$ alakban áll elő. Miután a pontpársor lefedi L-et, az összes $\{X, f(X)\}$ pontpár hozzá is tartozik. □

9.3.13. Következmény (Desargues involúciótétele). *Legyen $\mathcal{Q}$ másodrendű hiperfelületsor a P projektív térben, valamint $L \subseteq P$ olyan egyenes, amely nem halad át $\mathcal{Q}$ egyetlen tartópontján sem, és semelyik $[q] \in \mathcal{Q}$-ra sem fekszik* $\mathrm{k}[q]$*-ban. Legyen $f : L \to L$ az a leképezés, amely L egy tetszőleges X pontjához hozzárendeli a $\mathcal{Q}$ sor X-en áthaladó tagjának L-lel vett másik meszéspontját (illetve magát X-et, ha L érinti a szóban forgó másodrendű hiperfelületet). Ekkor f projektív involúció az L egyenesen.*

Bizonyítás: Valóban, $\mathcal{Q}$-nak az L egyenesre történő leszűkítése másodrendű pontpársor L-ben, amelyre a 9.3.12. Tétel (2) esete érvényes. □

9.3.14. Definíció (Desargues-involúció). A 9.3.13-ban tett feltevések és jelölések mellett az ott származtatott f involúciót a $\mathcal{Q}$-hoz tartozó Desargues-involúciónak nevezzük az L egyenesen.

9.3.15. Következmény (Desargues tétele a teljes négyszögről). *Adott a projektív síkon egy teljes négyszög, valamint egy L egyenes, amely nem halad át a teljes négyszög egyik csúcsán sem. Ekkor a teljes négyszög három szemköztes oldalpárja három olyan pontpárt metsz ki L-ből, amelyek L valamely involúciójához tartoznak.*

Bizonyítás: Legyenek A_1, A_2, A_3 és A_4 a teljes négyszög csúcsai és tekintsük az általuk mint tartópontok által definiált kúpszeletsort. Ha $l_{ij} = 0$ jelöli az $\langle A_i, A_j \rangle$ egyenes homogén lineáris egyenletét, akkor $[l_{12} \cdot l_{34}]$, $[l_{13} \cdot l_{24}]$ és $[l_{14} \cdot l_{23}]$ mindhárman ehhez a kúpszeletsorhoz tartoznak, így 9.3.13 speciális eseteként adódik az állítás. □

Ennek a szakasznak a hátralevő részében példákat mutatunk arra, hogy a kúpszeletsorokkal kapcsolatos projektív geometriai ismeretek birtokában hogyan kaphatunk érdekes tételeket az euklideszi síkgeometriában ellipszisekről, parabolákról és hiperbolákról. A példák hátterében a Desargues-féle involúció alábbi tulajdonsága áll.

Legyen $\mathcal{Q}$ és L adott úgy, mint 9.3.13-ban, és legyen $[q] \in \mathcal{Q}$ a másodrendű hiperfelületsor olyan nemelfajuló tagja, amelyet L nem érint. Ekkor a $[q]$-ra (pontosabban, $[q]$-nak a $[q|_V]$ nemelfajuló szeletére, ahol $L = P(V)$) vonatkozó konjugáltság 9.2.14 szerint egy $p_{[q]} : L \to L$ projektív involúciót létesít. Az L egyenesen tehát egyszerre több projektív involúciót is tekinthetünk, a Desargues-involúció mellett az összes ilyen $p_{[q]}$ involúciót.

9.3.16. Állítás. *A Desargues-involúció felcserélhető mindegyik olyan $p_{[q]}$ involúcióval, ahol $[q] \in \mathcal{Q}$ nemelfajuló és L nem érintője $[q]$-nak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $L \cap \mathrm{k}[q] \neq \emptyset$, ekkor ez a metszet két pontból áll, legyenek ezek A és B. A $p_{[q]}$ involúciónak A és B fixpontjai, a D Desargues-involúció pedig ezt a két pontot felcseréli. Ezért a $D \circ p_{[q]}$ projektivitás is felcseréli A-t B-vel, és így 8.7.10.(1) miatt $D \circ p_{[q]}$ is involúció. Az állítás így rögtön következik abból az észrevételből, hogy egy csoportban két különböző másodrendű elem pontosan akkor felcserélhető, ha a szorzatuk másodrendű.

Ha L-nek nincs közös pontja $\mathrm{k}[q]$-val, akkor áttérünk az $\mathbf{F}$ alaptestről annak $\overline{\mathbf{F}}$ algebrai lezárására, tekintjük a W vektortér és a $P(W)$ projektív tér $W^{\overline{\mathbf{F}}}$, illetve $P(W^{\overline{\mathbf{F}}})$ természetes kibővítését $\overline{\mathbf{F}}$ fölötti vektortérré, illetve projektív térré, továbbá $\mathcal{Q}$, $[q]$, L, $p_{[q]}$ és D ottani természetes kiterjesztését. (Ezeknek a fogalmaknak a formális értelmezésétől itt eltekintünk; szemléletes mintaként szolgál az a kép, ahogyan a komplexifikált fogalmakat származtatjuk az $\mathbf{R}$ felettiekből.) A kiterjesztett változatban az egyenesnek már van két közös pontja a hiperfelülettel, ezért a kiterjesztett involúciók a fenti gondolatmenet alapján felcserélhetők. Az eredetiek ezek megszorításai, tehát azok is felcserélhetők. □

Az alábbi két példában az E euklideszi sík projektív lezárásában tekintünk egy-egy olyan kúpszeletsort, amelyet négy speciálisan választott tartóponttal adunk meg a 9.3.4. Tétel alapján.

9.3.17. Példák (ortocentrikus tartópontok, körön lévő tartópontok)

- Tekintsünk az E euklideszi síkon egy ortocentrikus pontnégyest, azaz egy (nem derékszögű) háromszög három csúcsából és magasságpontjából álló pontrendszert. Legyen ez a négy pont a $\mathcal{Q}$ kúpszeletsor négy tartópontja. A kúpszeletsor három elfajuló tagja egy-egy merőleges egyenespár. Tekintsük E ideális egyenesén a Desargues-involúciót. Ez csak az ortogonális involúció lehet, hiszen a három elfajuló kúpszelettel vett metszetként adódó pontpárok az ortogonális involúcióhoz tartoznak.

  Az ideális egyenes Desargues-involúciója tehát elliptikus. Meggondolható, hogy a valós projektív egyenesen egy elliptikus involúcióval felcserélhető involúció csak hiperbolikus lehet. (A legegyszerűbben ezt a következő szakaszban tárgyalandó kúpszeleti involúciókra vonatkozó 9.4.16. Következmény segítségével lehet belátni.) A kúpszeletsor bármelyik tagjára vonatkozó konjugálásnak tehát két fixpontja van az ideális egyenesen, ráadásul ezek a fixpontok merőleges irányokhoz tartozó ideális pontok. Az ideális egyenes ezért $\mathcal{Q}$ mindegyik tagját két, egymásra merőleges irányú pontban metszi. Emiatt $\mathcal{Q}$ mindegyik nemelfajuló tagja derékszögű hiperbola.

  Azt az euklideszi geometriai következményt kaptuk tehát, hogy egy ortocentrikus pontnégyesre illeszthető bármely nemelfajuló kúpszelet derékszögű hiperbola. A négy pont által kifeszített hat egyenes pontjain kívül a sík bármely pontján át egyetlen ilyen hiperbola fektethető. □

- Válasszunk most négy pontot valamely E-beli K körön úgy, hogy az őket páronként összekötő hat egyenes között ne legyen két párhuzamos (azaz a keletkező húrnégyszög ne legyen trapéz). Legyen most $\mathcal{Q}$ az a kúpszeletsor, amelynek ez a négy pont a tartópontja. Vizsgáljuk ismét a Desargues-involúciót az ideális egyenesen. A K-hoz tartozó konjugáltsági involúció az ortogonális involúció, és 9.3.16 szerint a Desargues-involúció ezzel felcserélhető. Emiatt a Desargues-involúció hiperbolikus, és fixpontjai, F_1 és F_2, egymásra merőleges irányokhoz tartoznak. Ez azt jelenti, hogy az ideális egyenes kettőt érint $\mathcal{Q}$ tagjai közül, azaz két parabola tartozik $\mathcal{Q}$-hoz, amelyek tengelyei merőlegesek. Tekintsük most $\mathcal{Q}$ egy elfajuló tagját, azaz a húrnégyszög egyik szemköztes oldalpárját, vagy az átlópárját. A Desargues-involúció az F_1 és F_2 fixpontokra vonatkozó harmonikus involúció, ezért ennek az egyenespárnak az ideális pontjai harmonikus társak F_1-re és F_2-re nézve. Miután F_1 és F_2 merőleges irányokhoz tartoznak, ez csak úgy lehetséges, hogy F_1 és F_2 az egyenespár szögfelezőihez tartozó ideális pontok.

  E megállapítások következményeként azt az euklideszi geometriai tételt kaptuk, hogy bármely (trapéztól különböző) húrnégyszögben mindkét

szemközti oldalpár két-két szögfelezője, valamint az átlók szögfelezői egyállásúak, és ez a két szögfelezőirány megegyezik a húrnégyszög csúcsaira illeszthető két parabola tengelyirányával. □

A következő két példában a kúpszeletsor fogalmának a dualizálásával nyert alakzatok, úgynevezett vonalkúpszelet-seregek szerepelnek. A kúpszeletsor definícióját dualizálva kapjuk a vonalkúpszeletsor fogalmát. Ezekre a 9.3.1–9.3.4-ben, illetve a 9.3.9–9.3.16-ban foglaltak duális formában minden további nélkül érvényesek.

A 9.2.18-ben leírtak szerint a vonalkúpszeletsor mindegyik nemelfajuló tagjának a képe valamely pontkúpszelet érintőiből áll. Ilyen módon bármely nemelfajuló vonalkúpszeletsor pontkúpszeleteknek egy családját származtatja. Ezt szokás vonalkúpszelet-seregnek nevezni. A vonalkúpszelet-seregek általában egészen más jellegű kúpszelethalmazok, mint a kúpszeletsorok; ezt az alábbi példák is alátámasztják.

Vonalkúpszelet-seregek megadásához (tartópontok helyett) tartóegyeneseket lehet használni; például a sík négy rögzített, általános helyzetű egyenesét érintő kúpszeletek halmaza vonalkúpszelet-sereg. Az alábbi két konkrét példa is így keletkezik.

A Desargues-féle involúciótétel egyenesek helyett sugársorokról szól: a projektív sík egy tipikus sugársorán (amelynek a tartópontja elkerül bizonyos speciális helyzeteket, például a vonalkúpszelet-sereg tartóegyeneseinek a pontjait) projektív involúciót létesítünk azátal, hogy párba állítjuk egyazon kúpszelet két érintőjét.

9.3.18. Példák (parabolasereg, konfokális ellipszisek és hiperbolák)

- Tekintsük az E euklideszi sík egy ABC háromszögének a három oldalegyenesét, valamint a sík ideális egyenesét. Ez négy általános helyzetű egyenes az $\overline{E}$ projektív síkon, tehát mint tartóegyenesek egy $\mathcal{K}$ vonalkúpszelet-sereget határoznak meg. $\mathcal{K}$ összes nemelfajuló tagja parabola, hiszen az ideális egyenes érinti őket. Három elfajuló vonalkúpszelet tartozik hozzá, mégpedig az a három sugársorpár, amelyeket az ABC háromszög valamelyik csúcsára és a szemközti oldal ideális pontjára lehet illeszteni. Felhasználjuk a paraboláknak azt az elemi geometriából ismert tulajdonságát, hogy a sík valamely pontjából a parabolához húzott két érintő akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a pont illeszkedik a vezéregyenesre. Tekintsük a $\mathcal{K}$-hoz tartozó parabolák közül kettőnek a vezéregyenesét, és legyen M ezek metszéspontja. Az M tartópontú sugársoron a Desargues-involúcióhoz két merőleges egyenespár is hozzátartozik, tehát ez a Desargues-involúció az ortogonális involúció. Emiatt a szóban forgó összes parabola vezéregyenese áthalad az M ponton. A $\mathcal{K}$ vonalkúpszelet-sereg három elfajuló tagja esetében

a Desargues-involúcióhoz tartozó egyenespár csak akkor lehet merőleges, ha a tartópont a megfelelő magasságvonalra illeszkedik. Ezért M az ABC háromszög magasságpontja. Tehát a háromszög oldalegyeneseit érintő mindegyik parabolának a vezéregyenese áthalad a háromszög magasságpontján.

- Rögzítsünk két különböző pontot, F_1-et és F_2-t az E euklideszi síkon. Tekintsük $\overline{E}^{\mathbf{C}}$-ben azt a négy egyenest, amely e két pont valamelyikét köti össze a két köri pont valamelyikével. Ezek általános helyzetű egyenesek, tehát vonalkúpszelet-sereget határoznak meg. A 9.3.6. Példa alapján ehhez a $\mathcal{K}$ vonalkúpszelet-sereghez az összes olyan ellipszis és hiperbola hozzátartozik, amelynek F_1 és F_2 a fókuszai. A komplexifikált $\mathcal{K}$ elfajuló tagjai olyan sugársorpárok, amelyek a két köri pontra, F_1-re és F_2-re, illetve a négy tartóegyenes harmadik (komplex) metszéspontpárjára vannak illesztve. Tekintsük az euklideszi sík valamely, az $\langle F_1, F_2\rangle$ egyenesre nem illeszkedő X pontját, és az X tartópontú $\overline{E}^{\mathbf{C}}$-beli sugársoron a Desargues-involúciót. Ennél az involúciónál az $\langle X, F_1\rangle$ és az $\langle X, F_2\rangle$ egyenes egymásnak van megfeleltetve, valamint az X-et a két köri ponttal összekötő két egyenes is egymásnak van megfeleltetve. Ezért ez az involúció csak az $\langle X, F_1\rangle$ és az $\langle X, F_2\rangle$ egyenes szögfelezőire vonatkozó tükrözés lehet. Ez a két szögfelező tehát a Desargues-involúció két fixegyenese. Ebből az a kúszeletek elemi geometriájából is jól ismert tény következik, hogy a közös fókuszú, X-en áthaladó ellipszis és hiperbola X-beli érintője az X-et a fókuszokkal összekötő két egyenes két szögfelező egyenese (amelyek így egymásra merőlegesek).

9.4. A kúpszeletek projektív struktúrája

A másodrendű hiperfelületek körében a kétdimenziós esetnek, azaz a másodrendű görbéknek kitüntetett jelentősége van. Ez abból fakad, hogy a kúpszeleteken a kettősviszony fogalma értelmezhető, és ez az egyenessel szoros kapcsolatot mutató projektív struktúrával ruházza fel őket. Ez a struktúra lehetővé teszi a 9.1.7. szakasz eredményei közül jó néhánynak az átvitelét kúpszeletek esetére, továbbá eszközt ad a kezünkbe ahhoz, hogy egyszerű bizonyítást adjunk a projektív síkgeometria néhány nevezetes tételére.

Ebben a szakaszban $P = P(W)$ projektív síkot jelöl. Rögzítünk P-ben egy $[q] \in P\big(Q(W)\big)$ nemüres, nemelfajuló kúpszeletet, amelynek a képhalmazára bevezetjük a $K = \mathrm{k}[q]$ jelölést.

9.4.1. Állítás. *Legyen $A, B, C, D, T, T' \in K$ hat különböző pont a kúpszeleten. Jelölje E, F, G, H, illetve E', F', G', H' a T-t, illetve T'-t az A, B, C, D pontokkal összekötő egyeneseket. Ekkor $(EFGH) = (E'F'G'H')$.*

Bizonyítás: Az $E \mapsto E'$, $F \mapsto F'$, $G \mapsto G'$ hozzárendelés megad egy projektivitást a T tartópontú sugársorról a T' tartópontú sugársorra. Miután T, T', A, B és C általános helyzetű pontok, 9.3.11 alapján ennek a projektivitásnak a projektív képződménye K. Ezért ez a projektivitás a H egyeneshez H'-t rendeli. Az állítás így a projektivitás kettősviszonytartó tulajdonságából következik. □

9.4.2. Kiegészítés. *A 9.4.1. Állításban megengedhetjük, hogy T vagy T' egybeessen A, B, C vagy D valamelyikével. Ha ilyenkor összekötő egyenesen a kúpszelet T-beli, illetve T'-beli érintőjét értjük, akkor $(EFGH) = (E'F'G'H')$ továbbra is érvényben van.*

Bizonyítás: Valóban, a 9.4.1. Állítás bizonyításában értelmezett projektivitásnál 9.3.11 alapján a T-beli érintő (azaz a T-t T-vel összekötő egyenes) a $\langle T, T' \rangle$ egyenesbe, a $\langle T, T' \rangle$ egyenes pedig a T'-beli érintőbe (azaz a T'-t T'-vel összekötő egyenesbe) képeződik. □

9.4.3. Definíció (Kúpszeleti kettősviszony). Ha adott A, B, C és D, a K kúpszelet négy különböző pontja, akkor válasszunk egy tetszőleges $T \in K$ tartópontot és tekintsük a T-t a négy adott ponttal rendre összekötő E, F, G, H egyenesek alkotta sugárnégyest. Az A, B, C, D pontok kúpszeleti kettősviszonyán az $(ABCD)_K = (EFGH) \in \mathbf{F}$ testelemet értjük.
A 9.4.1. és 9.4.2. Állítások alapján $(ABCD)_K$ csak a négy ponttól és K-tól függ, a T tartópont speciális megválasztásától nem. A definícióban megengedhetjük, hogy T egybeessen a négy pont valamelyikével, l. 9.4.2.

9.4.4. Definíció (Kúpszelet vetítése egyenesre). Ha kiszemelünk egy $T \in K$ pontot és egy T-n át nem haladó $L \subset P$ egyenest, akkor K-nak a T középpontból L-re történő vetítésén azt a $p : K \to L$ leképezést értjük, amely K tetszőleges A pontjához a T-t A-val összekötő egyenes L-lel vett metszéspontját rendeli.

Ez a vetítés nyilván bijektív és kettősviszonytartó.

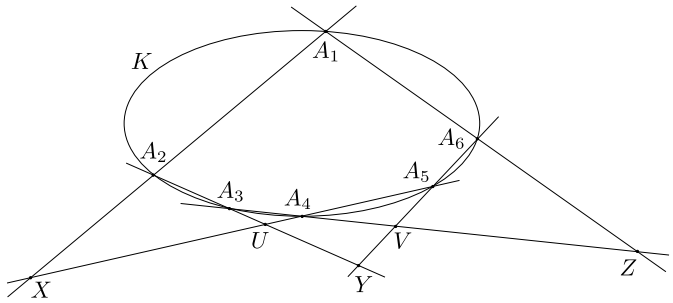
Megjegyzés. Tudjuk, hogy az egyenes projektív struktúráját a kettősviszony adja. A kúpszeleti kettősviszony ugyanilyen jellegű struktúrával látja el a kúpszeleteket mint ponthalmazokat. A 9.4.4-beli vetítés segítségével konkrét izomorfizmust létesíthetünk a kúpszelet és az egyenes projektív struktúrája között. Könnyen meggondolható, hogy a valós és a komplex esetben a vetítés homeomorfizmus a projektív sík megfelelő részhalmazai között. Így látható be például, hogy bármely nemelfajuló komplex kúpszelet homeomorf az $\mathbf{S}^2$ gömbfelülettel.

9.4.5. Definíció (Kúpszeleti projektivitás). Kúpszeleti projektivitásnak nevezzük azokat a $K \to K$ bijekciókat, amelyek megőrzik a kúpszeleti kettősviszonyt. A kúpszeleti projektivitások nyilván csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve.

Ha rögzítjük K-nak egy L egyenesre történő $p : K \to L$ vetítését, akkor a kúpszeleti projektivitások pontosan a $p^{-1} \circ f \circ p$ alakú leképezések, ahol $f : L \to L$ projektivitás. Emiatt K kúpszeleti projektivitásainak csoportja a $PGL(2, \mathbf{F})$ projektív csoporttal izomorf.

Ha a P projektív sík valamely $g : P \to P$ projektivitásánál $g(K) = K$, akkor g-nek a K-ra történő $g|_K : K \to K$ megszorítása kúpszeleti projektivitás K-n, hiszen g megőrzi a sugárnégyesek kettősviszonyát. Később belátjuk (l. 9.4.17), hogy bármely kúpszeleti projektivitás előáll ilyen módon.

9.4.6. Tétel (Pascal tétele). *Legyen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és A_6 a K kúpszelet hat különböző pontja. Ekkor az $X = \langle A_1, A_2\rangle \cap \langle A_4, A_5\rangle$, $Y = \langle A_2, A_3\rangle \cap \langle A_5, A_6\rangle$, $Z = \langle A_3, A_4\rangle \cap \langle A_6, A_1\rangle$ metszéspontok kollineárisak.*



Bizonyítás: Legyen $U = \langle A_2, A_3\rangle \cap \langle A_4, A_5\rangle$ és $V = \langle A_3, A_4\rangle \cap \langle A_5, A_6\rangle$. Vetítsük K-t az A_2 középpontból az $\langle A_4, A_5\rangle$ egyenesre, valamint az A_6 középpontból az $\langle A_3, A_4\rangle$ egyenesre. Az A_1, A_3, A_4, A_5 pontok ezeknél a vetítéseknél rendre X-be, U-ba, A_4-be és A_5-be, illetve Z-be, A_3-ba, A_4-be és V-be kerülnek. Ezért

$$(XUA_4A_5) = (A_1A_3A_4A_5)_K = (ZA_3A_4V).$$

Vetítsük az Y középpontból az $\langle A_4, A_5\rangle$ egyenest az $\langle A_3, A_4\rangle$ egyenesre, ekkor U az A_3 pontba, A_5 a V pontba képeződik. Jelöljük Z'-vel az X pont képét, azaz az $\langle X, Y\rangle \cap \langle A_3, A_4\rangle$ metszéspontot. Ekkor

$$(XUA_4A_5) = (Z'A_3A_4V),$$

ahonnan $Z' = Z$, azaz X, Y és Z kollineáris volta következik. $\square$

Megjegyzések. (1) Szokás Pascal tételét úgy is fogalmazni, hogy egy kúpszeletbe beírt hatszög szemközti oldalegyeneseinek a metszéspontjai kollineárisak.

(2) A 9.4.6. Tételben feltettük, hogy a hat pont mind különböző. Ezt a feltételt bizonyos korlátok közt gyengíteni lehet, azaz meg lehet engedni a pontok között bizonyos egybeeséseket. Nem nehéz arról meggyőződni, hogy ha a hat pont közül olyanok esnek egybe, amelyek a ciklikus felsorolásban nem szomszédosak, akkor a tétel állítása – ha egyáltalán értelmes – triviálisan teljesül. Azok az esetek érdekesek, ahol a felsorolás szerint szomszédos pontpárok eshetnek csak egybe. Ilyenkor (9.4.2-vel összhangban) egy ilyen egybeeső pár összekötő egyenesén az ottani érintőt kell érteni. A tételnek ilyen módon három új változata fogalmazható meg aszerint, hogy egy, kettő, vagy három szomszédos pár esik egybe a hat pont közül. Meggondolható, hogy 9.4.6. bizonyítása ezekben az esetekben is helyes. (A három egybeeső pontpár esetében ehhez a kettősviszony fogalmát is ki kell terjeszteni bizonyos fajta egybeesések esetére.)

Azok a fogalmak és állítások, amelyeket ebben a szakaszban bevezettünk, illetve bebizonyítottunk, mind dualizálhatók. Kiemeljük ezek közül a Pascal-tétel duálisát, amely tehát a dualitás elve miatt nem igényel külön bizonyítást. A duális tétel egy nemelfajuló vonalkúpszelethez tartozó hat egyenesről szól, ezért a 9.2.17. Tétel alapján ezeket tekinthetjük úgy, mint egy pontkúpszelet érintőit.

9.4.7. Tétel (Brianchon tétele). *Legyen E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 és E_6 a K kúpszelet hat különböző érintője. Ekkor az $\langle E_1 \cap E_2\,,\ E_4 \cap E_5\rangle$, $\langle E_2 \cap E_3\,,\ E_5 \cap \cap E_6\rangle$, és $\langle E_3 \cap E_4\,,\ E_6 \cap E_1\rangle$ összekötő egyenesek egy ponton haladnak át.* □

Megjegyzések. (1) A Brianchon-tétel úgy is fogalmazható, hogy egy kúpszelet köré írt hatszög főátlói egy ponton mennek át.

(2) Elláthatjuk a Brianchon-tételt is az egybeesések esetére vonatkozó kiegészítésekkel. Ha két, a ciklikus felsorolás szerint szomszédos érintő egybeesik, akkor metszéspontjukon a közös érintési pontot kell érteni. Vegyük észre, hogy abban az esetben, amikor három szomszédos pár is egybeesik, a Pascal-tétel és a Brianchon-tétel lényegében ugyanazt állítja: két háromszög (nevezetesen az érintőegyenesek alkotta háromszög, illetve az érintési pontok alkotta háromszög) egyenesre, illetve pontra vonatkozó perspektivitását mondja ki.

Most a Pascal-tétel felhasználásával a 8.7.12–8.7.15-beli megállapításokat visszszük át a kúpszeleti projektivitások esetére. Legyen adott a $g : K \to K$ kúpszeleti projektivitás. Az egyszerűség kedvéért egy tetszőleges $A \in K$ pont képét $g(A)$ helyett A'-vel jelöljük.

9.4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $g : K \to K$ kúpszeleti projektivitás nem identikus. Ekkor az $\langle X, Y' \rangle \cap \langle X', Y \rangle$ (ahol $X, Y \in K$, $X \neq Y$, X és Y közül nem mindkettő fixpontja g-nek) alakban metszéspontként előálló pontok halmaza egyenes.*

Bizonyítás: A 8.7.12. Tétel bizonyítását annyiban kell csak módosítani, hogy Papposz tétele helyett Pascal tételét használjuk föl. □

Megjegyzés. A 9.4.8. Tételben is a kúpszelet két pontját összekötő egyenesen egybeeső pontok esetében az érintőt kell érteni.

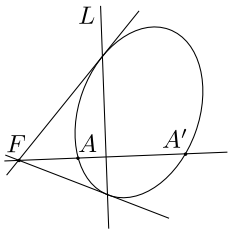
9.4.9. Definíció (Steiner-tengely). A 9.4.8. Tételbeli egyenest a g kúpszeleti projektivitás Steiner-tengelyének nevezzük.

Az alábbi észrevétel rögtön adódik a Steiner-tengely definíciójából.

9.4.10. Állítás. *A Steiner-tengely és K közös pontjai éppen a g kúpszeleti projektivitás fixpontjai.* □

9.4.11. Definíció (Kúpszeleti involúció). A másodrendű $K \to K$ kúpszeleti projektivitásokat kúpszeleti involúcióknak nevezzük K-n.

9.4.12. Példa. Legyen F a P projektív sík K-hoz nem tartozó rögzített pontja. Tekintsük K-nak az F pontból történő „átvetítését”, azaz azt az $i_F : K \to K$ leképezést, amely egy tetszőleges $A \in K$ ponthoz az $\langle F, A \rangle$ egyenesnek a K-val vett másik metszéspontját rendeli (illetve saját magát, ha ez az egyenes érinti K-t). Ekkor i_F kúpszeleti involúció K-n, hiszen 9.2.15 alkalmazásával $i_F = h_{F,L}|_K$, ahol L az F polárisa K-ra nézve, és $h_{F,L}$ harmonikus involúció. □



Nevezetes tény, hogy minden kúpszeleti involúció a 9.4.12-beli módon származtatható.

9.4.13. Tétel (Frégier tétele). *Bármely $g : K \to K$ kúpszeleti involúcióhoz található egyetlen olyan $F \in P - K$ pont, amellyel $g = i_F$.*

Bizonyítás: Legyen $\{A, A'\}$ és $\{B, B'\}$ két különböző, involúcióban álló pontpár és tekintsük az $F = \langle A, A'\rangle \cap \langle B, B'\rangle$ pontot. Ekkor $F \notin K$ és i_F ezt a két pontpárt szintén involúcióba állítja. Miután az involúciót – akár egyenesen, akár kúpszeleten – két pontpár egyértelműen meghatározza (l. 8.7.10.(4)), $g = i_F$ következik. Az F pont egyértelműsége nyilvánvaló. □

9.4.14. Definíció (Frégier-pont). A 9.4.13-beli F pontot a $g : K \to K$ kúpszeleti involúció Frégier-pontjának nevezzük.

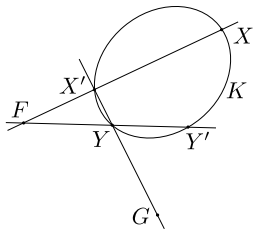
A valós projektív síkon egy kúpszeleti involúció nyilván elliptikus, ha Frégier-pontja a kúpszeletnek belső pontja, és hiperbolikus, ha külső.

9.4.15. Állítás. *Kúpszeleti involúció esetén a Frégier-pont a Steiner-tengely pólusa.*

Bizonyítás: Legyen az F Frégier-pont polárisa az L egyenes. Az i_F átvetítés felcseréli a Steiner-tengely pontjait származtató egyenespárokat, ezért a Steiner-tengely pontonként fixen marad a $h_{F,L}$ harmonikus involúciónál. Emiatt a Steiner-tengely az L egyenes. □

9.4.16. Következmény. *Két különböző kúpszeleti involúció akkor és csak akkor felcserélhető, ha Frégier-pontjaik konjugáltak.*

Bizonyítás: Tekintsük az i_F és i_G kúpszeleti involúciókat K-n, ahol $F \neq G$. Válasszunk egy $X \in K$ pontot, amely nincs rajta sem az $\langle F, G\rangle$ egyenesen, sem F polárisán. Legyen $X' = i_F(X)$, $Y = i_G(X')$, és $Y' = i_F(Y)$, ekkor X, X', Y és Y' négy különböző pont.



Ha i_F és i_G felcserélhetők, akkor $i_G(Y') = i_G\big(i_F(Y)\big) = i_F\big(i_G(Y)\big) = i_F(X') = X$, ahonnan X, Y' és G kollineáris. Így $G = \langle X, Y'\rangle \cap \langle Y, X'\rangle$, azaz G illeszkedik i_F Steiner-tengelyére. Ezért 9.4.15 miatt F és G konjugáltak.

Megfordítva, ha F és G konjugáltak, akkor 9.4.15 miatt G illeszkedik i_F Steiner-tengelyére. Ezért az X, X', Y és Y' pontokon $i_G \circ i_F$ és $i_F \circ i_G$ megegyezik, amiből már következik, hogy $i_G \circ i_F = i_F \circ i_G$. □

9.4.17. Tétel. *Bármely $f : K \to K$ kúpszeleti projektivitáshoz egyértelműen létezik olyan $g : P \to P$ projektív transzformáció, amelyre $f = g|_K$.*

Bizonyítás: A kúpszeleti involúciók 9.4.12 és 9.4.13 alapján kiterjeszthetők harmonikus involúciókká. A kúpszeleti involúciók 8.7.10.(5) miatt generátorrendszert alkotnak a kúpszeleti projektivitások csoportjában, ezért bármely kúpszeleti projektivitás kiterjeszthető a sík projektív transzformációjává. A kiterjesztés egyértelműsége abból következik, hogy bármely nemüres és nemelfajuló kúpszelet tartalmaz négy általános helyzetű pontot, azaz projektív bázist. □

A kúpszeleti kettősviszony – köri kettősviszony néven – az inverzív geometriában is szerepet játszik. Fontosságát a köri kettősviszony invarianciatétele (l. 9.4.21) adja, amelyet projektív geometriai tételeink következményeként kapunk.

9.4.18. Definíció (Köri kettősviszony). Legyen E^+ az E euklideszi tér inverzív bővítése. Ha A, B, C, D négy különböző pont E^+-ban, amelyek egy körre vagy egy egyenesre illeszkednek, akkor e négy pont köri kettősviszonyát, az $(ABCD) \in \mathbf{R}$ számot a következőképpen értelmezzük:

- Ha A, B, C, D egy E-beli K kör pontjai, akkor K-t kúpszeletnek tekinthetjük K síkjának a projektív lezárásában, és $(ABCD)$-t mint az $(ABCD)_K$ kúpszeleti kettősviszonyt definiáljuk.
- Ha A, B, C, D egy E-beli L egyenes pontjai (megengedve, hogy egyikük a ∞ pont is lehessen), akkor L-et (a ∞ pontjával együtt) valós projektív egyenesnek tekinthetjük, és az ott értelmezett $(ABCD)$ kettősviszonyt nevezzük a négy pont köri kettősviszonyának.

9.4.19. Lemma. *Ha $G \subset E$ hipergömb, akkor a G-beli gömbi tükrözések a G-beli pontnégyesek köri kettősviszonyát megtartják.*

Bizonyítás: Legyen $\tau_{G'} : G \to G$ gömbi tükrözés. Tekintsük az $\overline{E}$ projektív lezárásban a $H = \langle G' \rangle$ hipersíkot és annak G-re vonatkozó pólusát, az $F \in \overline{E}$ pontot, valamint az ezek által adott $h_{F,H}$ harmonikus involúciót az $\overline{E}$ téren. Ekkor $\tau_{G'} = h_{F,H}\,|_G$. A $h_{F,H}$ leképezés, projektív transzformáció lévén, megőrzi a kúpszeleti kettősviszonyt, ezért $\tau_{G'}$ megőrzi a köri kettősviszonyt. □

9.4.20. Lemma. *Ha $G \subset E$ hipergömb és $v : G \to H^+$ sztereografikus vetítés G-ről valamely E^+-beli H^+ hipersíkra, akkor v megtartja a G-beli pontnégyesek köri kettősviszonyát.*

Bizonyítás: Jelöljük O-val a v vetítés középpontját. Legyen $K \subseteq G$ tetszőleges kör és $K' = v(K)$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $O \in K$, illetve $O \notin K$.

Ha $O \in K$, akkor K' egyenes H^+-ban, legyen L^+ ez az egyenes. Ekkor az $\langle O, L\rangle$ sík projektív lezárásában a $v|_K$ leképezés éppen a 9.4.4-ben értelmezett vetítés a K kúpszeletről az $\overline{L} = L^+$ egyenesre, tehát (a 9.4.18-ban megkövetelt értelemben) kettősviszonytartó K-n.

Ha $O \notin K$, akkor pedig tekintsük az $S = \langle K\rangle$ és $S' = \langle K'\rangle$ síkokat és az O középpontú $p : \overline{S} \to \overline{S'}$, vetítést a háromdimenziós $\langle O, S\rangle$ projektív altérben. Ekkor $v\,|_K = p\,|_K$, és mivel p projektivitás, v is kettősviszonytartó K-n. □

9.4.21. Tétel. *A Möbius-transzformációk (akár egy gömb Möbius-transzformációi, akár az inverzív tér Möbius-transzformációi) megtartják a köri kettősviszonyt.*

Bizonyítás: A gömbi Möbius-transzformációk esetében a tétel azonnal következik a 9.4.19. lemmából, hiszen a Möbius-transzformációk csoportját ebben az esetben a gömbi tükrözések generálják.

Az inverzív tér Möbius-transzformációi az 5.3.4. állítás szerint $v \circ \mu \circ v^{-1}$ alakban írhatók, ahol μ gömbi Möbius-transzformáció, v pedig sztereografikus vetítés. Ezért az előző megállapításból és a 9.4.20. Lemmából a tétel állítása az inverzív térre is következik. □

Hiperbolikus geometria

A hiperbolikus geometria felfedezéséhez az a geometria megalapozásával kapcsolatos sok évszázados kérdés vezetett, hogy vajon a párhuzamossági axióma levezethető-e a többi axiómából. A tagadó választ olyan konkrét matematikai struktúrák létezése bizonyítja, amelyekben az axiomatikus geometria alapfogalmai értelmezve vannak, és amelyekben az axiómák a párhuzamossági axióma kivételével mind teljesülnek, míg maga a párhuzamossági axióma nem. Ilyen matematikai struktúrákra – évtizedekkel Bolyai és Lobacsevszkij munkáját követően – először Klein és Beltrami, majd később Poincaré adott nevezetes példákat. Ezeket nevezzük a hiperbolikus geometria modelljeinek. A hiperbolikus geometriával itt nem axiomatikusan, hanem modelljeinek konstrukcióján és tulajdonságain keresztül ismerkedünk meg. Ebben a felfogásban a hiperbolikus tér tehát – hasonlóan az affin, az euklideszi vagy a projektív térhez – konkrét matematikai konstrukció eredménye lesz. Ez a tárgyalásmód nagymértékben épít a geometria megelőző fejezeteire, és megteremti azokat a kapcsolódási pontokat, amelyeken keresztül a hiperbolikus geometria szervesen kötődik a modern matematikai kutatáshoz elsősorban az algebra, a topológia és a differenciálgeometria területén.

Az alábbiakban először megismerkedünk a hiperbolikus geometria legfontosabb modelljeivel, kitérünk néhány érdekes speciális kérdésre a hiperbolikus síkgeometriában, majd a hiperbolikus tér jellegzetes alakzatait és izometrikus transzformációit tanulmányozzuk.

10. A hiperbolikus geometria modelljei

A tanulmányainkban eddig szerepelt geometriai rendszerek (affin, euklideszi, gömbi, inverzív, projektív geometria) esetében vizsgálataink tárgyát elsősorban a geometria alábbi fő alkotóelemei jelentették:

- a tér illeszkedési struktúrája, azaz az alterek rendszere,

- a geometriára jellemző transzformációk csoportja,
- az invariáns mennyiségek, például affin geometriában az osztóviszony, projektív geometriában a kettősviszony, euklideszi geometriában a távolság, szög, térfogat.

Ugyanezt a mintát követjük, amikor a hiperbolikus geometria modelljeit tárgyaljuk: először rögzítjük a modell alaphalmazát és benne az altereket hordozó részhalmazokat, majd definiáljuk, hogy milyen leképezéseket tekintünk a modell transzformációinak, és végül megadjuk a legfontosabb invariánst, a modell metrikáját.

A hiperbolikus geometria számára modellek háromféle típusát készítjük el. Bár ezek mind egymással izomorf matematikai struktúrák lesznek, mégis érdemes mindegyiket ismerni, mert gyakran előfordul, hogy különféle geometriai kérdések megválaszolásához más-más modellekben kapunk hatékony matematikai eszközt.

10.1. Projektív modell

Legyen W $(d+1)$-dimenziós valós vektortér, és tegyük fel, hogy a $q \in Q(W)$ nemelfajuló kvadratikus alak $(d,1)$ típusú, azaz q diagonális alakjában d pozitív és 1 negatív együttható szerepel (l. 9.1.7). Ebben a szakaszban adottnak tekintünk és rögzítünk egy ilyen (W, q) párt. A d-dimenziós hiperbolikus geometria modelljét a $P = P(W)$ projektív térben a $[q]$ másodrendű hiperfelület (illetve a $K = \mathrm{k}[q] \subset P$ ponthalmaz) segítségével definiáljuk.

10.1.1. Definíció (A projektív modell illeszkedési struktúrája). A modell alaphalmaza az

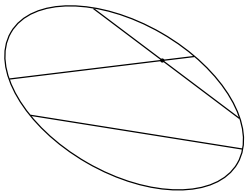
$$X = \{\, [\mathbf{x}] \in P \,:\, q(\mathbf{x}) < 0 \,\}$$

halmaz, azaz a $q(\mathbf{x}) = 0$ egyenletű K hiperfelület belső pontjai halmaza. Az X halmazt d-dimenziós hiperbolikus térnek nevezzük. Ha $S \subseteq P$ olyan k-dimenziós projektív altér, amelyre $S \cap X \neq \emptyset$, akkor az $Y = S \cap X$ részhalmazt k-dimenziós hiperbolikus altérnek tekintjük X-ben.

Az $S \cap X \neq \emptyset$ feltétel egyenértékű módon úgy is fogalmazható, hogy $S = P(V)$, ahol $V \leq W$ olyan $(k+1)$-dimenziós lineáris altér, amelyre a $q|_V$ kvadratikus alak $(k,1)$ típusú. Emiatt a hiperbolikus alterek maguk is projektív modellek a megfelelő dimenzióban.

Ha $Y \subseteq Y$ hiperbolikus altér, akkor (a 8.1.3-ban bevezetett jelöléssel összhangban) $\langle Y \rangle$ jelöli azt a P-beli projektív alteret, amelyre $Y = S \cap X$.

A 0-dimenziós hiperbolikus alterek X pontjai, az egydimenziósakat hiperbolikus egyeneseknek, a kétdimenziósakat hiperbolikus síkoknak, a $(d-1)$-dimenziósakat hiperbolikus hipersíkoknak nevezzük X-ben.



Megjegyzések. (1) Már most látszik hogy a párhuzamossági axióma nem teljesül a hiperbolikus geometriában, sőt az axióma tagadásánál egy formálisan erősebb állítás érvényes benne. A hiperbolikus sík egy kúpszelet belseje, a benne fekvő hiperbolikus egyenesek ennek a kúpszeletnek a nyílt húrjai. Nyilvánvaló, hogy nem csupán létezik olyan egyenes és rá nem illeszkedő pont, hogy a síkjukban több egyenes is húzható a ponton át, amely az első egyenest nem metszi, hanem ez a tulajdonsága bármely egyenesből és rá nem illeszkedő pontból álló párnak megvan.

(2) A modell egyenesei valós projektív egyenesek valódi nyílt intervallumai. Ezért a hiperbolikus egyeneseken automatikusan adott az elválasztásnak, illetve rendezésnek a valós affin egyenesből örökölt fogalma. A koordinátarendszer alkalmas megválasztásával (l. 10.1.2) elérhető, hogy a modell a d-dimenziós valós affin térben feküdjön. Ennek alapján minden további nélkül beszélhetünk szakaszokról, félegyenesekről, félsíkokról, félterekről, szögtartományokról, háromszögekről, konvexitásról, konvex burokról a hiperbolikus térben. Ezek a fogalmak nem függnek az affin struktúra megválasztásától, az-az attól, hogy mely K-t elkerülő projektív hipersíkot választjuk ideális hipersíknak. A koordináták speciális megválasztásával a modell a d-dimenziós euklideszi koordinátatér egységgömbjébe is helyezhető. Ebben a speciális esetben a modell külön elnevezést kap.

10.1.2. Definíció (Cayley–Klein-modell). Legyen a $q \in Q(\mathbf{R}^{d+1})$ kvadratikus alak a

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_d^2 - x_{d+1}^2$$

formulával definiálva. Ekkor a szokásos $\overline{\mathbf{R}^d} = P(\mathbf{R}^{d+1})$ azonosítás (l. 8.4.3) mellett $K = \mathbf{S}^{d-1}$ az $\mathbf{R}^d$ euklideszi tér origó körüli egységgömbje, X az egységgömb belseje. Ebben a speciális esetben a projektív modellt Cayley–Klein-féle modellnek nevezzük.

Nyilván bármelyik projektív modell alkalmas projektív transzformációval a Cayley–Klein-modellbe vihető. Ha egy projektív transzformáció egy projektív modellt egy másikba visz, akkor azt izomorfizmusnak nevezzük a két modell

között. Az adott dimenziójú projektív modellek tehát mind izomorfak egymással, és így köztük a Cayley–Klein-modellel.

10.1.3. Definíció (A projektív modell kongruenciái, $G(X)$). Egy $f : X \to X$ leképezést a modell kongruenciájának nevezünk, ha létezik olyan $F : P \to P$ projektív transzformáció, amelyre $F|_X = f$. Más szóval a modellt önmagára képező izomorfizmusokat hívjuk kongruenciáknak. Két X-beli részhalmazt kongruensnek mondunk, ha alkalmas kongruenciával egyikük a másikra képezhető.

A kongruenciák nyilván csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve, ezt a csoportot $G(X)$-szel jelöljük. Miután X-ből lehet projektív bázist választani P számára, az $F|_X$ megszorítás egyértelműen meghatározza F-et. Ezért $G(X)$ a $PGL(W)$ projektív csoport részcsoportjaként fogható föl.

10.1.4. Állítás. *Ha $d \neq 1$, akkor $G(X)$ mint $PGL(W)$ részcsoportja pontosan a K másodrendű hiperfelületet önmagára képező P-beli projektivitásokból áll.*

Bizonyítás: Miután a projektivitások homeomorfizmusok és K az X határa, az X-et önmagára képező transzformációk természetesen K-t is önmagára képezik. A megfordításhoz vegyük észre, hogy $d \neq 1$ esetén a tér valamely pontja pontosan akkor belső belső pontja K-nak, ha a polárisa diszjunkt K-tól. (Ezt a koordináták 10.1.2-beli megválasztása mellett 9.2.5 alkalmazásával rögtön láthatjuk.) Ezért ha a tér valamely projektivitása K-t önmagára képezi, akkor a belső pontokat belső pontokba kell, hogy képezze. □

Megjegyzés. A $d = 1$ eset kivételes jellegét az magyarázza, hogy olyankor a kvadratikus alak típusa (1,1), itt a két szám egyenlő volta miatt a K-t megőrző projektivitások között olyan szimmetriák is fellépnek, amelyek felcserélik a pozitív q-értékeket adó vektorokat a negatívakkal, azaz K külsejét a belsejével.

10.1.5. Példa (Hiperbolikus tükrözés). Legyen $H \subset X$ hiperbolikus hipersík, és legyen $Z \in P$ a $\langle H \rangle$ projektív hipersík pólusa $[q]$-ra nézve. A $h_{Z,\langle H \rangle}$ harmonikus involúció a 9.2.15. Következmény szerint K-t önmagára képezi, így 10.1.4 miatt ($d \neq 1$ esetén) X kongruenciáját származtatja. Ez a $d = 1$ esetben is így van, mert H fixen marad, tehát K belseje nem képeződhet a külsejére. Az így definiált $\sigma_H = h_{Z,\langle H \rangle}|_X \in G(X)$ kongruenciát a H hipersíkra vonatkozó hiperbolikus tükrözésnek nevezzük X-ben.

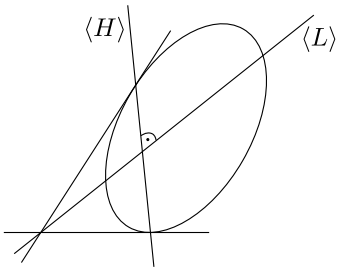
A harmonikus involúció definíciójából adódóan a σ_H tükrözés másodrendű a $G(X)$ csoportban, és a H hipersík a σ_H fixpontjaiból áll.

Megjegyzés. Ha $Z \in X$, akkor Z polárisa, az $S \subset P$ projektív hipersík, diszjunkt K-tól (és így X-től is). A $h_{Z,S}$ harmonikus involúció ekkor is másodrendű kongruenciát származtat X-en, csak ennek most Z az egyetlen fixpontja.

Az euklideszi analógia alapján ezt a kongruenciát a Z pontra vonatkozó középpontos szimmetriának nevezhetjük.

10.1.6. Definíció (Hipersík és egyenes merőlegessége). Azt mondjuk, hogy egy $L \subseteq X$ hiperbolikus egyenes merőleges egy $H \subset X$ hiperbolikus hipersíkra (jelben $L \perp H$), ha a $\langle H \rangle$ projektív hipersík $[q]$-ra vonatkozó pólusa illeszkedik az $\langle L \rangle$ projektív egyenesre.

Az X hiperbolikus tér kongruenciái megtartják a merőlegességet, hiszen az őket származtató projektivitások a polaritást megőrzik.



A $d = 2$ esetben mind H, mind L egyenes. A merőlegesség ilyenkor szimmetrikus reláció, mert azzal egyenértékű, hogy $\langle H \rangle$ és $\langle L \rangle$ pólusai konjugált pontok $[q]$-ra nézve.

10.1.7. Állítás. *Legyen H hiperbolikus hipersík X-ben. Ekkor:*

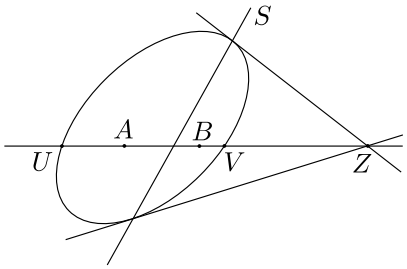
(1) *Ha $L \subseteq X$ hiperbolikus egyenes és $L \perp H$, akkor H-nak és L-nek egyetlen közös pontja van, továbbá $\sigma_H(L) = L$.*

(2) *Bármely $A \in X$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $L \subseteq X$ hiperbolikus egyenes, hogy $L \perp H$.*

Bizonyítás: (1): A $\langle H \rangle$ projektív hipersík pólusa nem illeszkedik $\langle H \rangle$-ra, mert ez csak az érintőhipersíkok esetén van így. Ezért az $\langle L \rangle$ projektív egyenes nem fekszik benne a $\langle H \rangle$-ban, tehát egyetlen közös pontjuk van a P projektív térben. Ez a metszéspont 9.2.13 alapján K belsejébe esik, mert $\langle H \rangle$ pólusa külső pont. A $\sigma_H(L) = L$ állítás is magától értetődik a σ_H-t származtató harmonikus involúció definíciója alapján.

(2): Legyen Z a $\langle H \rangle$ projektív hipersík pólusa $[q]$-ra nézve. A keresett L egyenest előállító projektív egyenesnek az A ponton is és Z-n is át kell haladnia, tehát csak $L = \langle A, Z \rangle \cap X$ lehetséges. Másrészt az így definiált L hiperbolikus egyenes nyilván megfelelő is. □

10.1.8. Lemma. *Tetszőlegesen adott A, $B \in X$, $A \neq B$ pontokhoz található olyan hiperbolikus tükrözés, amely A-t és B-t fölcseréli.*



Bizonyítás: Tekintsük az $\langle A, B\rangle$ projektív egyenes és K metszéspontjait, U-t és V-t. 8.7.10.(4) alapján létezik az $\langle A, B\rangle$ egyenesen olyan g projektív involúció, amely A-t B-vel, és U-t V-vel cseréli föl. Miután az $\{A, B\}$ pár és az $\{U, V\}$ pár nem választják el egymást, 8.7.10.(6) alapján ennek az involúciónak két fixpontja van. A fixpontok elválasztják U-t és V-t, ezért egyikük K külsejében van, legyen ez a fixpont Z. Legyen S a Z pont polárisa, és tekintsük a $H = S \cap X$ hiperbolikus hipersíkot. A $h_{Z,S}$ harmonikus involúció az $\langle A, B\rangle$ egyenesen 8.7.10.(3) miatt azonos g-vel, ezért a $\sigma_H = h_{Z,S}|_X$ hiperbolikus tükrözés felcseréli A-t B-vel. □

Megjegyzés. A bizonyításban konstruált H hiperbolikus hipersíkra az euklideszi analógia alapján úgy gondolhatunk, mint az A és B pontok felező merőleges hipersíkjára. A merőlegesség a konstrukció alapján valóban fennáll, és a távolság modellbeli definíciója (10.1.13) után nyilvánvaló lesz, hogy H tényleg felezi az $[A, B]$ szakaszt.

10.1.9. Tétel. *A $G(X)$ csoport tranzitívan hat az X halmazon, és a pontok stabilizátora az $O(d)$ ortogonális csoporttal izomorf.*

Bizonyítás: A tranzitivitás rögtön következik 10.1.8-ból. A stabilizátor azonosítása céljából feltehetjük, hogy X a Cayley–Klein-modell, és a tranzitivitás miatt elegendő az $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$ origót fixen hagyó kongruenciákat, azaz a $G(X)_{\mathbf{0}}$ részcsoportot meghatározni $G(X)$-ben.

A modell euklideszi szimmetriái (projektív kiterjesztés, majd leszűkítés útján) $G(X)$-hez tartoznak, és a $\mathrm{Sym}\,(\mathbf{S}^{d-1}) = O(d)$ csoportot alkotják. Ezért nyilván $O(d) \leq G(X)_{\mathbf{0}}$.

A fordított irányú tartalmazás bizonyítása céljából tegyük föl, hogy a Cayley–Klein-modell valamely $f : X \to X$ kongruenciájára $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Legyen $F \in$ $\in PGL(d+1, \mathbf{R})$ az f-et származtató projektivitás. Miután F-nek $\mathbf{0}$ fixpontja és $F(\mathbf{S}^{d-1}) = \mathbf{S}^{d-1}$, a $\mathbf{0}$ pont $\mathbf{S}^{d-1}$-re vonatkozó polárisa, azaz az $\mathbf{R}^d$ tér ideális hipersíkja is invariáns F-nél. Ezért 8.4.7 alkalmazásával F egy $\mathbf{R}^d$-beli (ugyancsak F-fel jelölt) affinitás projektív kiterjesztése. Ez az F affinitás az origót fixen hagyja, tehát lineáris. Miután $F(\mathbf{S}^{d-1}) = \mathbf{S}^{d-1}$, a vektorok normáját F megtartja, ezért F ortogonális. Tehát $G(X)_{\mathbf{0}} \leq O(d)$. □

Megjegyzések. (1) Figyeljünk föl arra a párhuzamra, amely a három klasszikus geometria (euklideszi, gömbi és hiperbolikus) transzformációi csoportjának a téren való hatásában megmutatkozik. A 10.1.9. Tételben megfogalmazott tulajdonság a 4.2.10. Tétel alapján az euklideszi terek izometriacsoportjára, és a 4.7.11. Tétel következtében a gömbi terek izometriacsoportjára is érvényes. Ez a közös tulajdonság a háromfajta klasszikus tér „egyenlő mértékű" homogenitását fejezi ki. A 10.1.8. Lemma és a 10.1.9. Tétel alábbi következményei is ezeknek a tereknek a rokonságára utalnak.

(2) A stabilizátorok $O(d)$-vel való izomorfiája azt jelenti, hogy a klasszikus geometriák „infinitezimális méretekben" egyformák. Konkrétan ez azt jelenti, hogy a tér valamely pontját fixen tartó transzformációk ugyanolyan jellegűek, ugyanúgy osztályozhatók, ugyanazokat az algebrai tulajdonságokat mutatják föl mindhárom esetben. Például a két-, illetve háromdimenziós hiperbolikus geometria esetében – az euklideszi geometria mintájára – valamely pont stabilizátorában az $SO(2)$, illetve $SO(3)$ részcsoporthoz tartozó kongruenciákat tekinthetjük a hiperbolikus sík, illetve tér e pontot fixen tartó forgatásainak.

10.1.10. Következmények

(1) *A $G(X)$ csoportban a hiperbolikus tükrözések generátorrendszert alkotnak: bármely kongruencia előállítható legfeljebb $d+1$ hiperbolikus tükrözés szorzataként.*

(2) *Értelmezzük a hiperbolikus térben a zászló fogalmát ugyanúgy, ahogyan azt az euklideszi tér esetében a 6.1.15. Példában tettük. Ekkor a $G(X)$ csoport egyszeresen tranzitívan hat a zászlók halmazán.*

(3) *Minden rögzített k mellett bármely két X-beli k-dimenziós hiperbolikus altér kongruens.*

Bizonyítás: (1): Feltehetjük, hogy X a Cayley–Klein-modell. Legyen $f \in G(X)$ tetszőleges. Ha $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, akkor f-et egy $\mathbf{R}^d$-beli ortogonális transzformáció származtatja. A 4.3.14. Tétel szerint ez a transzformáció legfeljebb d darab lineáris tükrözés szorzata. Ebben a szorzatban mindegyik tényező X-re leszűkítve hiperbolikus tükrözést ad, ezért f előáll legfeljebb d hiperbolikus tükrözés szorzataként. Ha $f(\mathbf{0}) = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor 10.1.6 alapján válasszunk olyan σ hiperbolikus tükrözést, amelyre $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, és állítsuk elő a $\sigma \circ f$ kongruenciát legfeljebb d tükrözés szorzataként. Ezt a szorzatot balról σ-val szorozva f kívánt előállítását kapjuk.

(2): Most is a Cayley–Klein-modellben dolgozunk. Legyen $\mathcal{Z}_0$ az origóban az $\mathbf{R}^d$-beli standard ortonormált koordinátarendszerhez illesztett zászló. Ha $\mathcal{Z}$ tetszőleges zászló X-ben, akkor alkalmas kongruencia a $\mathcal{Z}$-beli félegyenes kezdőpontját átviszi az origóba, majd egy alkalmas $O(d)$-beli transzformáció

$\mathcal{Z}$ képét $\mathcal{Z}_0$-ba. Ezzel a tranzitivitást beláttuk, hiszen mindkét transzformáció $G(X)$-ben van.

Ha egy kongruencia $\mathcal{Z}_0$-t helyben hagyja, akkor csak identikus lehet, hiszen az origó fixpontja, tehát a kongruencia 10.1.9. szerint $O(d)$-beli, és $O(d)$-ről tudjuk, hogy egyszeresen tranzitív az origóbeli zászlók halmazán.

(3): Nyilvánvaló módon következik (2)-ből. □

10.1.11. Példa (Hiperbolikus eltolás). Legyen $L \subseteq X$ hiperbolikus egyenes. Ha Z az $\langle L \rangle$ projektív egyenesnek a K külsejéhez tartozó pontja, és S a Z poláris hipersíkja, akkor az $\langle L \rangle$ egyenest a $h_{Z,S}$ harmonikus involúció önmagára képezi. Ezért a $H = S \cap X$ hipersíkra vonatkozó σ_H hiperbolikus tükrözésnél $\sigma_H(L) = L$. Ha két ilyen pontot, Z_1-et és Z_2-t választunk, akkor a két tükrözés kompozícióját, a $\sigma_{Z_2} \circ \sigma_{Z_1}$ kongruenciát az L egyenes mentén történő hiperbolikus eltolásnak nevezzük X-ben.

10.1.8 alapján magától értetődik, hogy az L egyenes mentén történő hiperbolikus eltolásokkal L bármely pontjából bármely másik pontjába el lehet jutni. (Az is igaz, hogy ezek a transzformációk részcsoportot alkotnak $G(X)$-ben, de ez most még nem nyilvánvaló.)

Értelmezni szeretnénk a távolságmérést a projektív modellben. A távolsággal szemben természetes elvárás, hogy kongruens pontpárok távolsága egyenlő legyen, valamint hogy a hiperbolikus egyeneseket a távolságmérés a valós számegyenessel tegye izometrikussá. Az alábbi tétel szerint ezeknek a kívánalmaknak lényegében egyféleképpen lehet eleget tenni.

10.1.12. Tétel. *Az X halmazon létezik olyan ρ metrika, amelyre az alábbi két feltétel teljesül:*

(1) *ρ invariáns a $G(X)$ csoport hatására nézve (azaz X minden kongruenciája izometrikus leképezés),*

(2) *ha $L \subseteq X$ hiperbolikus egyenes, akkor az $(L, \rho|_{L \times L})$ metrikus tér izometrikus a standard metrikával ellátott $\mathbf{R}$ számegyenessel.*

Ha ρ_1 és ρ_2 az (1) és (2) feltételeknek megfelelő metrikák X-en, akkor $\rho_2 = \lambda\rho_1$ alkalmas λ konstanssal.

Bizonyítás: A kívánt metrika létezését az alábbi ún. Cayley-féle távolságformula segítségével igazoljuk. Legyen $A, B \in X$. Ha $A = B$, akkor természetesen $\rho(A, B) = 0$. Ha $A \neq B$, akkor legyen U és V az $\langle A, B \rangle$ egyenes két metszéspontja K-val, és definiáljuk $\rho(A, B)$-t a

$$\rho(A, B) = |\ \ln (U\,V\,A\,B)\ |$$

képlettel. Miután U és V nem választja el A-t és B-t, a kettősviszony pozitív (l. 8.6.2), tehát vehető a logaritmusa. A kettősviszony nem lehet 1-gyel egyenlő, tehát a formula pozitív értéket ad. Akár U és V, akár A és B felcserélése a kettősviszonyt a reciprokára változtatja, ezért egyrészt $\rho(A, B)$ értéke nem függ az U és V jelölések kiosztásától, másrészt ρ szimmetrikus az A és B változókban. Ahhoz, hogy ρ valóban metrika legyen, már csak a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése szükséges. Ezt jóval könnyebb lesz egy később tárgyalandó modell felhasználásával ellenőrizni, ezért a nem kollineáris pontokra vonatkozó esetét külön állítás (l. 10.1.17.(1)) formájában rögzítjük, és indoklását egyelőre függőben hagyjuk. Kollineáris ponthármasokra a háromszög-egyenlőtlenség következni fog a tételbeli (2) tulajdonságból, amelyet alább bebizonyítunk.

A $G(X)$-hatással szembeni invariancia bizonyítása céljából tegyük fel, hogy A', B', U', V' rendre az A, B, U és V képei valamely kongruenciánál. Ekkor a $\rho(A', B')$-t definiáló formulában az $\{U', V'\} = \langle A', B'\rangle \cap K$ pontpárnak kell szerepelnie a kongruencia egyenestartó volta miatt. Ezért $\rho(A', B') = \rho(A, B)$ a kongruencia kettősviszonytartásából következik.

Tekintsük most a ρ metrika megszorítását valamely L hiperbolikus egyenesre, belátjuk a (2) követelmény teljesülését. Miután a kongruenciákra vonatkozó invarianciát már tisztáztuk, feltehetjük, hogy X a Cayley–Klein-modell, és L az első koordinátatengelyen a $(-1{,}1)$ intervallum. Ennek tetszőleges $a \neq b$ elemeire a Cayley-féle távolságformula szerint

$$\rho(a, b) = |\ln(-1\ 1\ a\ b)| = \left|\ln\left(\frac{a+1}{1-a} : \frac{b+1}{1-b}\right)\right| = \left|\ln\frac{1+a}{1-a} - \ln\frac{1+b}{1-b}\right| .$$

Ezért az a $\varphi : (-1{,}1) \to \mathbf{R}$ függvény, amelyet a $\varphi(x) = \ln\big((1+x)/(1-x)\big)$ képlet definiál, távolságtartó az L hiperbolikus egyenes és $\mathbf{R}$ között. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $y \mapsto (e^y - 1)/(e^y + 1)$ függvény a φ inverze, ezért a φ függvény szürjektív. Tehát L valóban izometrikus a számegyenessel.

Rátérünk az egyértelműségi állítás bizonyítására. Ehhez először a valós számegyenes alábbi tulajdonságát gondoljuk meg:

Ha ρ eltolásinvariáns metrika az $\mathbf{R}$ számegyenesen, amellyel az $(\mathbf{R}, \rho)$ metrikus tér izometrikus a standard $\mathbf{R}$ metrikus térrel, akkor ρ a standard metrika konstansszorosa.

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ izometria a két metrikus tér között, azaz olyan bijekció, amelynél minden $x, y \in \mathbf{R}$-re $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Feltehetjük, hogy f növő függvény (például ha kell, kicserélhetjük a (-1)-szeresével), így $x < y$-ra $\rho(x, y) = f(y) - f(x)$ érvényes. Az $x \mapsto \rho(0, x)$ függvény pozitív x-re ρ

eltolásinvarianciája miatt additív az x változóban:

$$\rho(0,x+y)=\rho(-x,y)=f(y)-f(-x)=\big(f(y)-f(0)\big)+\big(f(0)-f(-x)\big)=$$
$$=\rho(0,y)+\rho(-x,0)=\rho(0,x)+\rho(0,y)\,.$$

Ezért alkalmas $\lambda>0$ konstanssal minden pozitív x-re $\rho(0,x)=\lambda x$, amiből most már tetszőleges $x<y$ esetén $\rho(x,y)=\rho(0,y-x)=\lambda(y-x)$ következik. Ezzel a számegyenesre vonatkozó segédállítást beláttuk.

Szemeljük ki a modell valamely L egyenesét, és tekintsük ρ_1 és ρ_2 megszorítását ezen az egyenesen. A tételben megkövetelt (2) tulajdonság miatt a $\rho_1|_{L\times L}$ megszorítást felfoghatjuk mint a számegyenes standard metrikáját. Ezen az L mentén történő (X-beli) hiperbolikus eltolások mint $\mathbf{R}$ standard eltolásai hatnak. Ezekre nézve $\rho_2|_{L\times L}$ is invariáns, tehát a segédállítás miatt $\rho_2|_{L\times L}=\lambda_L\cdot\rho_1|_{L\times L}$ érvényes alkalmas (L-től esetleg függő) λ_L konstanssal. Végül igazoljuk, hogy λ_L valójában nem függ L választásától. Ez annak a ténynek a nyilvánvaló következménye, hogy X-ben bármely két egyenes kongruens, és a kongruenciákra nézve mind ρ_1, mind ρ_2 invariáns. □

A tétel alapján tehát a projektív modellben a távolságmérés a mértékegység megválasztása erejéig egyértelmű. A mértékegységet az alábbi definícióval rögzítjük.

10.1.13. Definíció (Hiperbolikus távolság, természetes távolságegység). Tetszőleges $A,B\in X$ pontokra A és B hiperbolikus távolságán a

$$\rho_p(A,B)=\begin{cases}0, & \text{ha } A=B\\ \dfrac{1}{2}\,\big|\ln(U\,V\,A\,B)\big|, & \text{ha } A\neq B \text{ és } \{U,V\}=\langle A,B\rangle\cap K\end{cases}$$

számot értjük. A p index arra utal, hogy ezt a metrikát a projektív modellben értelmeztük. Az $1/2$ szorzó jelenlétének érdekes matematikai háttere van; ebben a pillanatban a legegyszerűbb magyarázata az, hogy ezáltal válik a projektív modell a később definiálandó modellekkel izometrikussá. A ρ_p metrikához tartozó távolságegységet (azaz bármelyik 1 hosszúságú hiperbolikus szakaszt) a hiperbolikus tér természetes távolságegységének nevezzük.

Megjegyzés. A 10.1.12. Tétel bizonyításában explicit izometriát mutattunk az $\mathbf{R}$ számegyenes és a Cayley–Klein-modellbeli $(-1,1)$ átmérő között. Ha a modellben a ρ_p természetes távolságot használjuk, akkor az izometria képlete $y\mapsto(e^{2y}-1)/(e^{2y}+1)=\operatorname{th} y$.

10.1.14. Állítás. *A hiperbolikus távolság X-en a P projektív térből örökölt topológiát indukálja.*

Bizonyítás: Miután a modellek közti izomorfizmus homeomorfizmus az alaphalmazok között, az állítást elegendő a Cayley–Klein-modellre vonatkozóan ellenőrizni, és elég abban egyetlen pontnak, például az origónak a környezeteit összehasonlítani. Legyen a Cayley–Klein-modell valamely $\mathbf{x}$ pontjának az origótól mért euklideszi távolsága $a = \|\mathbf{x}\|$, ekkor a 10.1.12 bizonyításához hasonló számolással

$$\rho_p(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left| \ln(-1\ 1\ 0\ a) \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a}\,.$$

Erről a függvényről látszik, hogy a 0 alkalmas környezetében alkalmas c_1 és c_2 pozitív konstansokkal értéke $c_1 a$ és $c_2 a$ között marad. Ezért a két metrika (ρ_p és az euklideszi) az origónak ugyanazokat a környezeteit származtatja. □

10.1.15. Definíció (Hiperbolikus szög). Legyen M és N két félegyenes az X projektív modellben, amelyek közös kezdőpontja az A pont. Az M és N által bezárt szöget a következőképpen értelmezzük. Válasszunk olyan f izomorfizmust X és a Cayley–Klein-modell között, amelynél az A pont az origóba kerül. Az M és N félegyenesek képe, $f(M)$ és $f(N)$, ennél az izomorfizmusnál két, az origóból kiinduló félig nyílt egységszakasz az $\mathbf{R}^d$ koordinátatérben. Az ezek által bezárt szöget nevezzük M és N szögének. A definíció korrektségének tisztázása céljából válasszunk egy másik g izomorfizmust, amelyre szintén $g(A) = \mathbf{0}$, és ellenőrizzük, hogy g segítségével ugyanazt a szöget kapjuk. Valóban, a 10.1.9. Tétel stabilizátorról szóló állítása miatt az M-ből és N-ből álló félegyenespár g-nél keletkező képe csak egy (az egységgömb belsejére megszorított) ortogonális transzformációban (nevezetesen, $g \circ f^{-1}$-ben) tér el az f szerinti képtől, ezért $g(M)$ és $g(N)$ között a szög ugyanakkora, mint $f(M)$ és $f(N)$ között.

A hiperbolikus szög nyilvánvalóan invariáns a modell kongruenciáira nézve.

Az euklideszi tér egységgömbjére vonatkozó polaritásra (l. 9.2.5) hivatkozva rögtön látható, hogy ha az X-beli L egyenes merőleges a H hiperbolikus hipersíkra a 10.1.6. definíció értelmében, továbbá $M \subset H$ és $N \subset L$ a $H \cap L$ metszéspontból induló félegyenesek, akkor M és N szöge 10.1.14 értelmében is $\pi/2$.

Két metsző egyenes hajlásszögét az euklideszi geometriában használatos definíció mintájára értelmezzük: a metszéspontból induló félegyenesek közül választunk egyet-egyet, és az általuk bezárt (legfeljebb) kétféle szög közül a kisebbet (nem nagyobbat) tekintjük.

A hiperbolikus térben három nem kollineáris pont háromszöget feszít ki. Beszélhetünk a háromszög szögéről mint valamely csúcsból kiinduló, a másik két csúcson áthaladó két félegyenes által bezárt szögről. Az alábbi tételt egy másik fajta modell apparátusával fogjuk később bebizonyítani (l. 10.3.21), egyelőre bizonyítás nélkül használjuk föl.

10.1.16. Tétel (Hiperbolikus koszinusztétel) *Legyenek az X-beli ABC háromszög oldalai $a = \rho_p(B, C)$, $b = \rho_p(C, A)$ és $c = \rho_p(A, B)$, valamint legyen α az A csúcsnál levő szög. Ekkor*

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha \,. \qquad \square$$

10.1.17. Következmények

(1) *Ha az $A, B, C \in X$ pontok nem illeszkednek egy hiperbolikus egyenesre, akkor $\rho_p(A, B) + \rho_p(A, C) > \rho_p(B, C)$.*

(2) *Hiperbolikus derékszögű háromszögben az átfogó hosszabb bármelyik befogónál.*

(3) *Ha az (X, ρ_p) metrikus tér egy f izometriája egy $H \subset X$ hiperbolikus hipersíkot pontonként fixen hagy, akkor vagy $f = id_X$, vagy $f = \sigma_H$.*

Bizonyítás: (1): 10.1.16. jelöléseivel $\alpha < \pi$ miatt $\cos \alpha > -1$, ezért a tételből $\operatorname{ch} a < \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch}(b + c)$, és így $a < b + c$ következik.

(2): Ha 10.1.16-ban $\alpha = \pi/2$, akkor $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch} b$, amiből $a > b$ következik.

(3): Legyen $A \in X - H$ tetszőleges pont. Bocsássunk merőlegest 10.1.7-re hivatkozva az A pontból H-ra, legyen ez az L hiperbolikus egyenes, és legyen B a döféspontja. Tetszőleges további $C \in H$, $C \neq B$ ponttal az $[A, C]$ szakasz az ABC derékszögű háromszög átfogója, ezért (2) alapján $\rho_p(A, B) < < \rho_p(A, C)$. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges A ponthoz egyértelműen létezik H-ban hozzá legközelebbi pont, mégpedig az A-n áthaladó L merőleges egyenes döféspontja. Miután f a H hipersíkot pontonként fixen tartja, ebből az következik, hogy $f(A)$-hoz ugyanaz a döféspont tartozik, mint A-hoz, azaz $f(A) \in L$. Az L egyenesen csak olyan pont jöhet szóba mint $f(A)$, amelynek a B-től mért távolsága $\rho_p(A, B)$-vel egyenlő. Ha $A \notin H$, két ilyen pont van: A és $\sigma_H(A)$. Akármelyik eset áll is fönn, az f folytonossága miatt bármely A ponttal együtt az A pont egy egész környezetében f-nek egybe kell esnie id_X-szel, illetve σ_H-val. A H szerinti félterek összefüggő volta miatt ezért f egy egész féltéren egybeesik id_X-szel, illetve σ_H-val, és akkor ez nyilván az egész X-en is így van. $\square$

10.1.18. Tétel *Az (X, ρ_p) metrikus tér izometriái azonosak az X projektív modell kongruenciáival.*

Bizonyítás: Egyfelől 10.1.12.(1) éppen azt jelenti, hogy $G(X) \leq I(X, \rho_p)$. A fordított tartalmazás bizonyítása céljából pedig a 8.7.5. Lemmára és a 10.1.10.(2) Következményre hivatkozva elegendő egyrészt azt belátni, hogy (X, ρ_p) izometriái a zászlókat zászlókba viszik, másrészt azt, hogy ha egy izometria egy zászlót önmagára képez, akkor identikus.

Először is a szigorú háromszög-egyenlőtlenségből és az egyenesek $\mathbf{R}$-rel izometrikus voltából következik, hogy az izometriák a modell egyeneseit egyenesekbe képezik, és megőrzik rajtuk a pontok elválasztását. Ebből a dimenzió szerinti indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy a hiperbolikus alterek és a bennük fekvő félterek képe is ugyanilyen jellegű halmaz. Ezért zászló képe zászló.

Legyen $\mathcal{Z} = (F_1, F_2, \ldots, F_d)$ zászló X-ben (azaz minden $k < d$-re F_k féltér abban a k-dimenziós hiperbolikus altérben, amely az F_{k+1} félteret határolja), és tegyük fel, hogy az $f \in I(X, \rho_p)$ izometriánál $f(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. Arra akarunk ebből következtetni, hogy $f = id_X$. Ehhez k szerinti indukcióval minden k-ra belátjuk, hogy f identikus az F_k-t tartalmazó k-dimenziós altéren. Ez $k = d$ esetén éppen azt jelenti, hogy $f = id_X$.

A $k = 1$ esetben a 10.1.12.(2) feltételből következik, hogy f valóban identikus az F_1 félegyenesen, mert a valós számegyenes egy félegyenesének az identitás az egyetlen izometriája. Az indukciós lépésben 10.1.17.(3)-at lehet alkalmazni a soron következő altérre mint megfelelő dimenziójú projektív modellre vonatkoztatva. □

10.1.19. Definíció (Ideális határ, végtelen távoli pont). Az X projektív modellt definiáló másodrendű hiperfelület K képhalmazát szokás a modell ideális határának nevezni, és ∂X-szel jelölni. Elemeit a modell végtelen távoli (vagy ideális) pontjainak nevezzük.

A természetes topológiával ellátott P valós projektív térben a ∂X halmaz topologikus értelemben valóban az $X \subseteq P$ nyílt halmaz határa, és homeomorf az $\mathbf{S}^{d-1}$ gömbbel, az $\overline{X} = X \cup \partial X$ lezárás pedig a d-dimenziós zárt gömbtesttel.

Ha $Y \subseteq X$ hiperbolikus altér, akkor $\partial Y = \overline{Y} \cap \partial X$ az Y ideális határa. Az X végtelen távoli pontjai közül ∂Y elemeiről azt mondjuk, hogy az Y altérhez tartoznak.

Vegyük észre, hogy bármely X-beli egyenesnek pontosan két végtelen távoli pontja van, továbbá hogy $\overline{X}$ bármely két különböző – akár közönséges, akár végtelen távoli – pontjához egyértelműen lehet olyan hiperbolikus egyenest találni, amelyhez ez a két pont hozzátartozik. A 10.1.7.(2) Állítás értelemszerű kiterjesztésével az X-beli hipersíkokra ∂X pontjaiból is egyértelműen lehet merőleges egyenest bocsátani.

Megjegyzés. A projektív modellek közti izomorfizmusok természetes módon értelmezve vannak az egész $\overline{X}$ lezáráson, és ott homeomorfizmusok. Az X hiperbolikus metrikája viszont nem terjeszthető ki az ideális határra: megmutatható, hogy ($d \geq 2$ esetén) ∂X-en nem létezik olyan, a topológiáját indukáló metrika, amely invariáns $G(X)$ hatására nézve.

A modell ideális határa és annak viselkedése a modell izometriái során lényegében minden, a hiperbolikus térrel kapcsolatos információt magában hordoz. Ez annak köszönhető, hogy a ∂X halmazból ki lehet választani egy projektív bázist a befoglaló P tér számára, és a modell bármely izometriáját egyértelműen meghatározza, hogy ez a bázis hova kerül. A hiperbolikus sík esetében, azaz amikor $d = 2$, a K kúpszeleten 9.4 szerint a projektív egyenes struktúrája a természetes (azaz a $G(X)$-hatásra nézve invariáns) struktúra. Az általános esetben ennek a struktúrának a felderítése vezet el a modellek következő típusához.

10.2. Konform modellek

Legyen ebben a szakaszban E d-dimenziós euklideszi tér, ahol $d \geq 1$. A most tárgyalandó modellek konstrukciójában a tér inverzív geometriája döntő szerepet játszik. Emlékeztetünk arra, hogy E^+ jelöli az E tér inverzív bővítését (l. 5.3.1). Legyen $K \subset E$ rögzített hipergömb. A K gömböt felfoghatjuk mint egy az előző szakaszban előírt típusú q kvadratikus alak képhalmazát a $P = \overline{E}$ projektív térben. Ezáltal a K gömb X-szel jelölt belsején a d-dimenziós hiperbolikus geometria projektív modellje áll elő, és tekinthetjük a $G(X) = I(X, \rho_p)$ izometriacsoport hatását a modell $K = \partial X$ ideális határán. A következő modell, az ún. Poincaré-féle gömbmodell konstrukciójában ezt a csoporthatást megtartjuk, de K belsejében az előzőtől eltérő módon értelmezzük a modell struktúráját.

10.2.1. Tétel. *$d \geq 2$ esetén a $G(X)$ csoport hatása a K halmazon azonos az $\mathcal{M}(K)$ Möbius-csoport hatásával (l. 5.3.2). Speciálisan $G(X) \cong \mathcal{M}(K)$.*

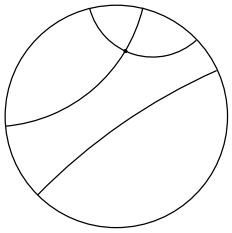
Bizonyítás: $G(X)$ hatását a K halmazon úgy értelmeztük, hogy egy $f : X \to X$ hiperbolikus kongruenciához először az őt származtató (és egyértelműen létező) $F : P \to P$ projektivitást rendeltük, majd az $F|_K$ megszorítást tekintettük.

Ha $f = \sigma_H \in G(X)$ hiperbolikus tükrözés egy $H \subset X$ hiperbolikus hipersíkra, akkor definíció szerint a hozzá tartozó F harmonikus involúció P-ben, mégpedig $F = h_{Z,\langle H\rangle}$, ahol Z a $\langle H\rangle$ hipersík pólusa K-ra nézve. Ezért $F|_K$ gömbi tükrözés K-ban a $\langle H\rangle \cap K$ gömbre vonatkozóan (l. 5.2.14). Mivel a $G(X)$ csoportban 10.1.10.(1) szerint a hiperbolikus tükrözések generátorrendszert alkotnak, $G(X)$ hatása K-n az a transzformációcsoport, amelyet a K-beli gömbi tükrözések generálnak, vagyis az $\mathcal{M}(K)$ Möbius-csoport. □

Megjegyzés. A tételhez szükséges volt feltenni, hogy a tér dimenziója legalább 2, hiszen a Möbius-csoportot a 0-dimenziós gömbök esetében nem értelmeztük, és nem is lehetne úgy értelmezni, hogy a tétel igaz legyen. Ez az oka

annak is, hogy a most tárgyalandó modell bizonyos tulajdonságait az egydimenziós esetben másképp kell kezelni, mint az egynél magasabb dimenzió esetében.

10.2.2. Definíció (A Poincaré-féle gömbmodell illeszkedési struktúrája). A Poincaré-féle gömbmodell (illetve körmodell, ha $d = 2$) alaphalmaza a K hipergömb belseje, tehát azonos a K-hoz tartozó projektív modell X alaphalmazával. Ha $1 \leq k \leq d-1$, akkor k-dimenziós altérnek nevezünk minden olyan $G \cap X$ alakban előálló részhalmazt, ahol G olyan k-dimenziós gömb vagy affin altér, amely merőlegesen metszi a K hipergömböt.



Miután az X alaphalmazon kétféle modellt is értelmezünk, és a kétféle értelemben vett alterek különböznek egymástól, az egyértelmű fogalmazás érdekében a Poincaré-féle modellhez tartozó altereket – ebben a szakaszban, amíg ezt a két modellt hasonlítjuk össze – P-altereknek nevezzük.

Állapodjunk meg egyrészt abban, hogy maga az E tér is merőlegesen metszi K-t, másrészt abban is, hogy egy 0-dimenziós gömb vagy affin altér (azaz E^+-beli pontpár) akkor és csak akkor merőleges K-ra, ha a K-ra vonatkozó inverzió a két pontját fölcseréli. Ezáltal a P-alterek fenti definíciója értelemmel bír a $k = d$ és $k = 0$ esetekben is. Természetesen az egyetlen d-dimenziós P-altér maga az X alaphalmaz, míg a 0-dimenziósak az alaphalmaz egyelemű részhalmazai, amelyeket a tér pontjaival azonosítunk.

A Poincaré-féle gömbmodellben az egydimenziós P-altereket P-egyeneseknek, a kétdimenziósakat P-síkoknak, a $(d-1)$-dimenziósakat P-hipersíkoknak hívjuk.

Megjegyzés. A szokásos illeszkedési és rendezési tulajdonságok most kevésbé nyilvánvalóak, mint a projektív modell esetében. Már az az alapvető tény is, hogy bármely két különböző ponton át egyetlen P-egyenes halad, bizonyítást igényel. Ezeket a tulajdonságokat azáltal tisztázzuk, hogy megadunk egy $X \to X$ bijektív leképezést, amely a projektív modell illeszkedési struktúráját átrakja a Poincaré-féle gömbmodell illeszkedési struktúrájára. A Poincaré-modell további struktúraelemeit is annak szem előtt tartásával értelmezzük, hogy ez a leképezés izomorfizmus legyen a két modell között.

10.2.3. Definíció (A Φ leképezés). Helyezzük el az E euklideszi teret mint hipersíkot egy eggyel nagyobb dimenziójú $\widetilde{E}$ euklideszi térben; a konkrétság kedvéért legyen például $\widetilde{E} = E \times \mathbf{R}$. Tekintsük $\widetilde{E}$-ben azt a $\widetilde{K}$ hipergömböt, amely közös középpontú és egyenlő sugarú K-val, és legyen

$$Y = \widetilde{K} \cap \big(E \times (0, +\infty)\big)\,,$$

vagyis az a felső féltérbe eső d-dimenziós nyílt félgömb, amelynek K a határa. Jelölje $p : \widetilde{E} \to E$ az ortogonális vetítést az E hipersíkra, ekkor $p\,|_{\overline{Y}}$ bijektíven képezi az $\overline{Y}$ zárt félgömböt az $\overline{X}$ zárt gömbtestre.
Legyen D a $\widetilde{K}$ hipergömb „déli pólusa", vagyis $D = (C, -1) \in E \times \mathbf{R}$, ahol C a K középpontja. Jelölje $v : \widetilde{K} \to E^+$ a D középpontú sztereografikus vetítést. Ekkor a

$$\Phi = (v\,|_Y) \circ (p\,|_Y)^{-1} : X \to X \quad \text{és a} \quad \overline{\Phi} = (v\,|_{\overline{Y}}) \circ (p\,|_{\overline{Y}})^{-1} : \overline{X} \to \overline{X}$$

leképezés homeomorf módon képezi az X nyílt, illetve az $\overline{X}$ zárt gömbtestet saját magára, emellett $\overline{\Phi}\,|_K = id_K$.

10.2.4. Állítás. *A Φ leképezés izomorfizmus a projektív modell és a Poincaré-modell illeszkedési struktúrái között.*
Bizonyítás: Csak azt kell ellenőrizni, hogy ha $M \subseteq X$ k-dimenziós hiperbolikus altér a projektív modellben, akkor $\Phi(M)$ szintén k-dimenziós P-altér a Poincaré-modellben. Ez $k = 0$ és $k = d$ esetén nyilvánvaló, így feltehetjük, hogy $1 \le k \le d-1$. Az első lépésben keletkező $(p\,|_{\overline{Y}})^{-1}\big(\overline{M}\big)$ halmaz k-dimenziós zárt félgömb, amelyet a $(k+1)$-dimenziós $F_M = \langle M \rangle \times [0, +\infty)$ affin féltér metsz ki a $\widetilde{K}$ hipergömbből. Miután $\langle F_M \rangle \perp E$, ez a félgömb merőlegesen metszi K-t. Tudjuk, hogy a v sztereografikus vetítés gömb- és szögtartó, továbbá a K halmazt helyben hagyja. Ezért ennek a félgömbnek a v-nél származó képe, a $\overline{\Phi}\left(\overline{M}\right) = \overline{\Phi(M)}$ halmaz, egy a K-t merőlegesen metsző k-dimenziós E-beli gömbnek vagy affin altérnek az $\overline{X}$-be eső része, tehát egy k-dimenziós P-altér lezárása. □

A 10.2.4. Állítás következményeként az illeszkedéssel és a rendezéssel kapcsolatos projektív modellbeli fogalmakat a Φ leképezés segítségével átvihetjük a Poincaré-féle gömbmodellre. Beszélhetünk tehát szakaszokról, félegyenesekről, félsíkokról, félterekről, szögtartományokról, háromszögekről, stb. ebben a modellben is.

10.2.5. Definíció (A Poincaré-féle gömbmodell kongruenciái). Tegyük fel először, hogy $d \ge 2$, a $d = 1$ esetet külön fogjuk tárgyalni. Tekintsük a K hipergömb Möbius-transzformációinak E^+-ra történő Poincaré-kiterjesztését (l. 5.3.9), azaz a $p_K^E : \mathcal{M}(K) \to \mathcal{M}(E)$ injektív homomorfizmust. A kiterjesztett Möbius-transzformációk K belsejét önmagára képezik,

ezért vehetjük az X-re való leszűkítésüket. Az így nyert leképezéseket tekintjük a Poincaré-féle gömbmodell kongruenciáinak.

A kongruenciák csoportja $d \geq 2$ esetén tehát az $\mathcal{M}(K)$ Möbius-csoport, amely a

$$\mu \,:\, A \mapsto \left(p_K^E(\mu)\right)(A) \qquad (\,\mu \in \mathcal{M}(K),\ A \in X)$$

szabály szerint hat a modell alaphalmazán.

Legyen most $d = 1$. Ilyenkor a Poincaré-modell illeszkedési struktúrája azonos a projektív modell illeszkedési struktúrájával. Definíció szerint tekintsük az egydimenziós projektív modell kongruenciáit egyúttal az egydimenziós Poincaré-féle gömbmodell kongruenciáinak.

10.2.6. Példa (Tükrözés a Poincaré-modellben). Tegyük fel elĂl'ször, hogy $d \geq 2$. Ha $H \subset X$ hiperbolikus hipersík a projektív modellben, akkor a σ_H tükrözés K-n gömbi tükrözést származtat (l. 10.2.1). A gömbi tükrözések Poincaré-kiterjesztései az E^+ inverzív térben hipersíkra vonatkozó tükrözések vagy inverziók aszerint, hogy K középpontja illeszkedik-e H-ra vagy sem. Ezért ha a Poincaré-féle gömbmodellben tekintünk egy $G \cap X$ P-hipersíkot, akkor a rá vonatkozó modellbeli tükrözés azonos a $\sigma_G\,|_X$ transzformációval, ahol σ_G euklideszi tükrözés, ha G tartalmazza K középpontját (és így hipersík E^+-ban), egyébként pedig a K-t merőlegesen metsző G hipergömbre vonatkozó inverzió.

Ha $d = 1$, akkor H pont X-ben. A projektív modellben a 10.1.5 Példában már értelmeztük a H-ra vonatkozó tükrözést, tekintsük ugyanezt a leképezést tükrözésnek az egydimenziós Poincaré-modell értelmében is. A H hipersík pólusa a $Z \in E^+$ pont, és a $h_{Z,H}$ harmonikus involúció 8.7.10.(7) miatt azonos az E^+ inverzív egyenesen a $\{Z, H\}$ pontpárra vonatkozó inverzióval (illetve tükrözéssel, ha $Z = \infty$, azaz ha H az X nyílt intervallum középpontja). A 10.2.2-beli megállapodással összhangban ez egy K-ra merőleges (0-dimenziós) gömbre vonatkozó inverzió.

10.2.7. Tétel. *A Poincaré-féle gömbmodell kongruenciái pontosan a $\Phi \circ f \circ \circ \Phi^{-1} : X \to X$ leképezések, ahol $f : X \to X$ a projektív modell kongruenciáin fut végig.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a két modell kongruenciacsoportja izomorf, sőt az egydimenziós esetben definíció szerint azonosak, a $d \geq 2$ esetben pedig a 10.2.1. Tétel szerint a K hipergömbre való megszorítás azonosítja őket. Ezért elegendő azt belátni, hogy az $f \mapsto \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ megfeleltetésnél a projektív modell tükrözései a Poincaré-modell tükrözéseibe mennek át, hiszen ezek a tükrözések generálják a megfelelő kongruenciacsoportokat.

Legyen tehát $\sigma_H \in G(X)$ hiperbolikus tükrözés, ahol $H \subset X$ hipersík a projektív modellben. Azt állítjuk, hogy $\Phi \circ \sigma_H \circ \Phi^{-1}$ egy E-beli Möbius-

transzformáció megszorítása X-re. (Ha ez így van, akkor persze csak a $\Psi(H)$ P-hipersíkra vonatkozó tükrözés lehet a Poincaré-modellben.)

A Φ leképezés $\Phi = (v\,|_Y) \circ (p\,|_Y)^{-1}$ definíciója alapján a $\Phi \circ \sigma_H \circ \Phi^{-1}$ transzformációt két lépésben állítjuk elő, először a $(p\,|_Y)^{-1}$, majd a $v\,|_Y$ vetítéssel konjugáljuk σ_H-t. Belátjuk, hogy mindkét lépésben Möbius-transzformációt kapunk (pontosabban annak Y-ra, illetve X-re való megszorítását).

A projektív modellbeli σ_H hiperbolikus tükrözést a $h_{Z,\langle H\rangle} : \overline{E} \to \overline{E}$ harmonikus involúció származtatja, ahol $Z \in \overline{E}$ a $\langle H\rangle$ hipersík pólusa K-ra nézve. Az első lépésben vegyük észre, hogy az $\widetilde{E} = E \times \mathbf{R}$ euklideszi tér projektív lezárásában a $(Z,0)$ pont $\widetilde{K}$-ra vonatkozó polárisa a $\langle H \times \mathbf{R}\rangle$ hipersík, azaz az E-re merőlegesen állított, H-t tartalmazó hipersík. Ezért a $(p\,|_Y)^{-1} \circ \sigma_H \circ (p\,|_Y)$ leképezés a $h_{(Z,0),\langle H\times\mathbf{R}\rangle}$ harmonikus involúció megszorítása Y-ra, azaz egy $\widetilde{K}$-beli gömbi tükrözésnek (mégpedig az $F\,|_K$ gömbi tükrözés Poincaré-kiterjesztésének) a megszorítása. A második lépésben pedig azért marad Möbius-transzformáció az eredmény, mert sztereografikus vetítéssel konjugálunk. □

10.2.8. Következmény. *Ha $d = 1$, akkor az $f \mapsto \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ leképezés automorfizmus a $G(X)$ csoportban.*

Bizonyítás: Az egydimenziós esetben a két modell kongruenciái azonosak, és a 10.2.7. Tétel szerint ilyenkor is Φ felelteti meg őket egymásnak. □

10.2.9. Definíció (A Poincaré-féle gömbmodell metrikája). Tetszőleges $A, B \in X$ pontokra definiáljuk a modellbeli távolságot a

$$\rho_k(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A = B \\ \left|\ \ln\,(U\,V\,A\,B)\,\right|, & \text{ha } A \neq B \end{cases}$$

formulával, ahol az $A \neq B$ esetben az U és V pontokat az A-n és B-n áthaladó, K-t merőlegesen metsző kör vagy egyenes metszi ki K-ból, $(U\,V\,A\,B)$ pedig a négy pont köri kettősviszonyát jelöli. (A ρ_k jelölésben a k index arra utal, hogy ez a metrika konform modellhez tartozik, l. a 10.2.13 utáni első megjegyzést.) Miután a köri kettősviszonyt a Möbius-transzformációk 9.4.21 szerint megtartják, a ρ_k távolságfüggvény invariáns a Poincaré-modell kongruenciáira nézve. Nem kell ellenőriznünk, hogy a ρ_k függvény valóban metrika az X halmazon, mert ez (és az is, hogy X-nek az euklideszi térből örökölt topológiáját származtatja) azonnal következik az alábbi 10.2.11. Tételből 10.1.12-re és 10.1.14-re hivatkozva. A tételt egy lemmával készítjük elő, amely a Φ leképezésnek a kettősviszonnyal szembeni viselkedéséről szól.

10.2.10. Lemma. *Tekintsük a Φ leképezésnek az egydimenziós Cayley–Klein-modellhez tartozó változatát, azaz a $\Phi : (-1,1) \to (-1,1)$ leképezést. Ha $a, b \in (-1,1)$ tetszőleges különböző pontok, akkor*

$$\big(-1\,1\,\Phi(a)\;\Phi(b)\big)^2 = (-1\,1\,a\,b)\,.$$

Bizonyítás: Nézzük az $\mathbf{R}^2$-beli egységkört, amelynek az első koordinátatengelyen fekvő nyílt átmérője a szóban forgó $(-1,1)$ intervallum. Az első tengelyre történő merőleges vetítés inverze az $(x,0)$ pontot a felső félkör $(x, \sqrt{1-x^2})$ pontjába viszi, a $(0,-1)$ déli pólusból történő középpontos vetítés pedig a felső félkör (x,y) pontját az $\big(x/(1+y),0\big)$ pontba képezi. Ezekből

$$\Phi(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Elég belátni, hogy bármely $x \in (-1,1)$-re a $(-1\,1\,x)$ osztóviszony a $(-1\,1\,\Phi(x))$ osztóviszony négyzetével egyenlő, hivatkozhatunk ugyanis a kettősviszony 8.6.6.(2)-beli kiszámítására az osztóviszonyból. Az osztóviszony definíciója alapján $(-1\,1\,x) = (1+x)/(1-x)$, és ezzel

$$\big(-1\,1\,\Phi(x)\big) = \frac{1+\Phi(x)}{1-\Phi(x)} = \frac{1+\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,.$$

Ennek a négyzete valóban $(1+x)/(1-x)$-szel egyenlő. □

10.2.11. Tétel. *Tetszőleges $A, B \in X$ pontokra*

$$\rho_k\big(\Phi(A), \Phi(B)\big) = \rho_p(A,B)\,,$$

azaz a Φ leképezés izometria a két modell között.

Bizonyítás: Feltehető, hogy K az $\mathbf{R}^d$ koordinátatér origó körüli egységgömbje, azaz a projektív modell a Cayley–Klein-modell. A metrikák invarianciája miatt azt is feltehetjük, hogy A pont és B az első koordinátatengely a, illetve b koordinátájú pontjai, ahol $-1 < a, b < 1$. Ekkor $\Phi(A)$ és $\Phi(B)$ szintén az első koordinátatengelyen vannak, és koordinátáik a 10.2.10. Lemmában szereplő $\Phi(a)$, illetve $\Phi(a)$ számok.

A lemmából $\big(-1\,1\,\Phi(A)\,\Phi(B)\big)^2 = \big(-1\,1\,A\,B\big)$ következik, amiből logaritmusokra áttérve a tétel állítását kapjuk. □

Megjegyzés. A Φ elképezésre a $(-1,1)$ intervallum esetében explicit képletet kaptunk a 10.2.10. Lemma bizonyításában. Érdemes ezt a képletet a $\mathrm{th}^{-1} : (-1,1) \to \mathbf{R}$ leképezéssel, amely izometria a projektív modell metrikája és

a számegyenes között, átrakni $\mathbf{R}$-re. Az $x = \operatorname{th} t$ jelölést használva

$$\begin{aligned}\operatorname{th}^{-1}\big(\Phi(x)\big) &= \operatorname{th}^{-1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{th}^{-1}\frac{\operatorname{th} t}{1+\sqrt{1-\operatorname{th}^2 t}} = \\ &= \operatorname{th}^{-1}\frac{\operatorname{th} t}{1+\frac{1}{\operatorname{ch} t}} = \operatorname{th}^{-1}\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t+1} = \operatorname{th}^{-1}\frac{2\operatorname{sh}\frac{t}{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}}{2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}} = \frac{t}{2}\,.\end{aligned}$$

Tehát a Φ leképezésnek a számegyenesen az 1/2-del való szorzás felel meg.

A Poincaré-modell soron következő, legnevezetesebb tulajdonsága annak a körülménynek a közvetlen folyománya, hogy a modell kongruenciái szögtartó transzformációk az alaphalmazon.

10.2.12. Definíció (Szög a Poincaré-féle gömbmodellben). Ha M és N két közös kezdőpontú P-félegyenes, akkor M és N szögét mint a $\Phi^{-1}(M)$ és $\Phi^{-1}(N)$ projektív modellbeli félegyenesek által bezárt hiperbolikus szöget értelmezzük.

Ezáltal a Φ leképezés szögtartó a két modell között.

10.2.13. Tétel. *Legyen M és N két közös kezdőpontú P-félegyenes a Poincaré-modellben. Ekkor M és N szöge egyenlő az euklideszi szögükkel, vagyis az E euklideszi térben annak a két érintő félegyenesnek a szögével, amelyeket a közös kezdőpontban az M és N körívekhez (illetve esetleg egyenes intervallumokhoz) húzunk.*

Bizonyítás: Ha a közös kezdőpont éppen K középpontja, akkor a hiperbolikus szög 10.1.15-beli definíciója alapján igaz az állítás. Ha nem, akkor vigyük át a két P-félegyenest a Poincaré-modell alkalmas kongruenciájával ilyen helyzetbe. Miután a kongruenciák szögtartók a modellbeli értelemben is és az euklideszi értelemben is, a modellbeli szög egyenlő az euklideszi szöggel az eredeti helyzetben is. □

Megjegyzések. (1) A Poincaré-féle gömbmodellt gyakran a hiperbolikus geometria (egyik) konform modelljének nevezik. Konform leképezésnek általában a szögtartó leképezéseket (például a Möbius-transzformációkat) hívják. A modellre vonatkozóan a konform jelző arra a szögtartási tulajdonságra utal, amit a 10.2.13. Tétel mond ki. Ha az euklideszi tér részhalmazaként állítunk elő egy modellt, akkor annak szögtartó volta azt jelenti, hogy a szögek modellbeli mértéke egyenlő az euklideszi térben mért szögekkel.

(2) Ha a Poincaré-féle gömbmodellt valamely Möbius-transzformációval egy másik alaphalmazra képezzük, és a struktúra minden elemét ezzel a transzformációval átvisszük az új alaphalmazra, akkor magától értetődő módon újabb, az előzővel izomorf modellt kapunk, amely továbbra is szögtartó lesz.

Az alábbiakban ilyen módon származtatjuk a konform modellek további két változatát.

(3) Érdemes arra fölfigyelni, hogy a Poincaré-féle gömbmodellben a P-alterek nem automatikusan a modell alacsonyabb dimenziójú változata szerinti struktúrát viselik. Ez így van a K-ból affin altér által kimetszett (vagyis a modellgömb középpontját tartalmazó) hiperbolikus alterek esetében, a többire vonatkozóan viszont csak a (2)-beli elven mondhatjuk, hogy azok önmagukban tekintve is modellek.

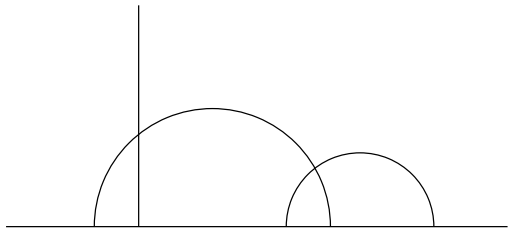
10.2.14. Definíció (Poincaré-féle félgömbmodell). A Φ leképezés definíciójában (l. 10.2.3) bevezettük az Y „köztes" halmazt, amelyre most átvihetjük a modell struktúráját. Az Y alaphalmaz tehát d-dimenziós nyílt félgömb. A struktúra származtatására akár a $(p\,|_Y)^{-1} : X \to Y$, akár a $(v\,|_Y)^{-1} : X \to Y$ leképezést használhatjuk; az első esetben az X-en értelmezett projektív modellből, a másodikban az X-en értelmezett Poincaré-modellből kapjuk ugyanazt a struktúrát Y-on. A hiperbolikus geometria így konstruált modelljét Poincaré-féle félgömbmodellnek nevezzük.

A félgömbmodellben a hiperbolikus alterek maguk is nyílt félgömbök, amelyeket az E-re merőleges affin alterek metszenek ki Y-ból. A modell kongruenciáit a $d \geq 2$ esetben úgy is kaphatjuk, hogy a K gömb Möbius-transzformációinak a $\widetilde{K}$ gömbre történő Poincaré-kiterjesztését szorítjuk meg Y-ra. Speciálisan a hipersíkokra vonatkozó tükrözéseket $\widetilde{K}$ olyan gömbi tükrözései szolgáltatják, amelyekhez az E^+ hipersíkban fekvő csúcsú érintőkúp tartozik. A félgömbmodell metrikáját ugyanaz a 10.2.9-beli formula adja, mint az X-beli Poincaré-modell esetében. Végül, miután a $(v\,|_Y)^{-1} : X \to Y$ izomorfizmus konform leképezés X és Y között, a félgömbmodell is szögtartó modell.

10.2.15. Definíció (Poincaré-féle féltérmodell). Válasszunk egy $P \in K$ pontot és tekintsünk (tetszőlegesen választott P körüli alapgömbbel) egy $\sigma : E^+ \to E^+$ inverziót. Ez az inverzió K-t egy $H^+ \subset E^+$ affin hipersíkba viszi, az X halmazt pedig a H szerinti egyik nyílt féltérbe. Másoljuk át σ segítségével az X-en adott Poincaré-féle gömbmodell struktúráját az $U = \sigma(X)$ féltérre. Az inverzió szögtartó volta miatt ilyen módon a hiperbolikus geometria újabb szögtartó modelljét kapjuk, a Poincaré-féle féltérmodellt.

Világos, hogy a σ inverzió helyett bármely olyan E^+-beli Möbius-transzformációt is használhattunk volna, amelynél K egy pontja a ∞ pontba kerül.

A féltérmodell hiperbolikus alterei a H hipersíkot merőlegesen metsző gömböknek és affin altereknek az U-ba eső részei, amelyek így tehát vagy nyílt félgömbök, vagy nyílt félterek valamely H-ra merőleges affin altérben. A legalább 2-dimenziós esetben a kongruenciák H Möbius-transzformációiból származnak Poincaré-kiterjesztés, majd U-ra történő leszűkítés útján. A metrikát



a 9.4.21. Tétel miatt itt is a 10.2.9-beli képlet definiálja. A Poincaré-féle féltérmodell „kanonikus” változatában alaphalmaz gyanánt az $\mathbf{R}^d$-beli

$$U = \{\, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d \,:\, x_d > 0 \,\}$$

felső félteret választjuk, amelynek az $\mathbf{R}^{d-1} \subset \mathbf{R}^d$ hipersík a határa. A modell ideális határa ilyenkor tehát az $(\mathbf{R}^{d-1})^+$ inverzív tér, izometriacsoportja az $\mathcal{M}^{d-1}$ Möbius-csoport.

10.2.16. Példák. A Poincaré-féle féltérmodell a $d = 2$ és a $d = 3$ esetben közvetlen kapcsolatot teremt egyfelől a hiperbolikus sík- és térgeometria, másfelől a valós, illetve komplex projektív egyenes geometriája között. Ennek a kapcsolatnak a leírásához mindkét esetben a fenti kanonikus koordinátázású modellt használjuk.

- Legyen $d = 2$. A 8.7.4.(1). Tétel alapján az $\mathbf{R}^+$ ideális határ Möbius-transzformációi pontosan a projektív transzformációk az $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^+$ valós projektív egyenesen, és így a hiperbolikus sík izometriacsoportja a $PGL(2, \mathbf{R})$ projektív csoporttal azonos. Ha a modellt magában foglaló $\mathbf{R}^2$ síkot a szokásos módon a $\mathbf{C}$ komplex síkkal, azaz $\mathbf{R}$ komplexifikáltjával tekintjük azonosnak, akkor 8.7.4.(3)–(4) alapján a $PGL(2, \mathbf{R})$ izometriacsoport az

$$[A] : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{ha } \det A > 0 \\ \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, & \text{ha } \det A < 0 \end{cases} \quad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{R}),\ z \in U \right)$$

  törtlineáris (illetve tört-szemilineáris) leképezésekkel hat az U komplex felső félsíkon.

  Tekintsük példaképpen a 8.7.9-beli

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad C(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

mátrixokkal a $PGL(2,\mathbf{R})$ csoportban értelmezett egyparaméteres transzformációcsoportok hatását az U modellben. A 8.7.9-ben tisztázottak alapján a 10.1.9. Tételt követő második megjegyzést figyelembe véve az $A(t)$ mátrix az $i \in U$ pont körüli $2t$ szögű forgatást származtatja. Ugyancsak 8.7.9 alapján $C(t)$ hiperbolikus eltolás a -1 és $1 \in \partial U$ végtelen távoli pontokat összekötő hiperbolikus egyenes, azaz U-beli félkör mentén. A $\big(-1\ i\ \big(C(t)i\big)\ 1\big)$ köri kettősviszonyról közvetlen számolással megállapítható, hogy értéke e^{-2t}-vel egyenlő, ezért a t paraméter az ezen egyenes mentén mért előjeles távolsággal arányos. A $B(t)$ mátrixszal adott transzformációnak egyelőre nem adtunk nevet. Mindhárom transzformációcsoport esetében 8.7.9-ben megállapítottuk, hogy az U-beli pontokat egy-egy körsor tagjai mentén mozgatják. Valamivel egyszerűbb a $B(t)$ mátrixok helyett a transzponáltjaikkal megadott egyparaméteres transzformációcsoportot átlátni: a pontok U-beli orbitjai a ∂U egyenessel párhuzamos egyenesekből álló sugársorhoz tartoznak. (Ezek természetesen nem egyenesek a modellbeli értelemben.)

- Legyen $d = 3$. A modell ideális határa most az $(\mathbf{R}^2)^+$ inverzív sík, amelyet a $\mathbf{C}^+ = \overline{\mathbf{C}}$ komplex projektív egyenessel azonosítunk. A háromdimenziós hiperbolikus tér kongruenciacsoportjában az irányítástartó Möbius-transzformációk a 2 indexű $\mathcal{M}^+(\mathbf{R}^2)$ részcsoportot alkotják, amelyet 8.7.4.(2) alapján a $PGL(2,\mathbf{C})$ projektív csoporttal azonosítunk. A hiperbolikus tér irányítástartó izometriái tehát a modell ideális határán, a $\mathbf{C}^+$ inverzív síkon az

$$[A] : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{C}),\ z \in \mathbf{C}^+\right)$$

törtlineáris leképezésekkel hatnak, ahol a formulába beleértjük a ∞-nel kapcsolatos értelemszerű megállapodásokat (l. 8.7.1).

Megjegyezzük, hogy bármely invertálható 2×2-es komplex mátrixhoz található olyan 1 determinánsú mátrix, amely vele ekvivalens (azaz ugyanazt a projektivitást létesíti a komplex egyenesen), hiszen csak a determináns négyzetgyökével kell osztani. Ez azt jelenti, hogy $PGL(2,\mathbf{C}) = PSL(2,\mathbf{C})$. A szakirodalomban a háromdimenziós hiperbolikus tér irányítástartó izometriacsoportja ezért legtöbbször $PSL(2,\mathbf{C})$ néven szerepel.

10.3. Hiperboloidmodell

A projektív modellt határoló másodrendű hiperfelületet a W vektortérben egy nemelfajuló kvadratikus alakkal adtuk meg. A kvadratikus alakhoz tar-

tozó szimmetrikus bilineáris függvény részletesebb vizsgálatával, a tér struktúrájának „finomhangolásával” újabb modellt definiálunk, amely rávilágít a hiperbolikus geometria és a gömbi geometria közti mélyebb rokonságra.

Elöljáróban felidézzük azokat az indefinit valós kvadratikus alakokkal és szimmetrikus bilineáris függvényekkel kapcsolatos lineáris algebrai ismereteket, amelyeket a modell konstrukciójában felhasználunk.

10.3.1. Emlékeztető (Valós kvadratikus alakok, q-ortogonalitás). Legyen q kvadratikus alak a W véges dimenziós valós vektortéren. A q-hoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvényt most a skaláris szorzás szokásos $\langle\ ,\ \rangle$ jelével jelöljük, tehát $q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Két vektort, $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t q-ortogonálisnak (vagy egyszerűen csak ortogonálisnak) mondunk, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.

Izotróp vektornak mondjuk az $\mathbf{x} \in W$ vektort, ha saját magára ortogonális, azaz ha $q(\mathbf{x}) = 0$. Definit q esetén ilyen csak a zérusvektor lehet. Általában viszont az izotróp vektorok halmaza elég sokat elárul a kvadratikus alakról, sőt bizonyos esetekben skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározza q-t (l. 10.3.10). Az izotróp vektorok halmaza kúp abban az értelemben, hogy bármely elemének bármely skalárszorosát tartalmazza. Ha q indefinit, akkor ez a kúp hiperfelület W-ben, amely elválasztja egymástól azt a két W-beli nyílt halmazt, amelyek egyikén q pozitív, másikán q negatív. Valamely $V \leq$ $\leq W$ lineáris altéren a $q|_V$ megszorított kvadratikus alak akkor és csak akkor definit, ha V az origótól eltekintve elkerüli az izotróp vektorok kúpját.

Tetszőleges $V \leq W$ altérre $V^\perp$ jelöli a V altér q-ortogonális kiegészítőjét, amely azokból a W-beli vektorokból áll, amelyek V minden elemére q-ortogonálisak. Általában a $V^\perp$ altér nem független V-től, de ha igen, azaz $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, akkor $V^\perp$ direkt kiegészítője V-nek W-ben. A q kvadratikus alak pontosan akkor nemelfajuló, ha $W^\perp = \{\mathbf{0}\}$, sőt általánosabban valamely $V \leq W$ altéren $q|_V$ pontosan akkor nemelfajuló, ha $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Egy $\varphi : W \to W$ lineáris leképezés q-ortogonális, ha $q \circ \varphi = q$, vagy ekvivalens feltétellel $\langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$-re. A q-ortogonális $W \to W$ lineáris leképezések egy $O(q) \leq GL(W)$ részcsoportot, a q ortogonális csoportját alkotják. Ha valamely W-beli bázisra nézve q mátrixa M, φ mátrixa A, akkor φ pontosan akkor q-ortogonális, ha $A^\top M A = M$.

Az $\mathbf{R}^{k+l}$ koordinátatéren a standard (k, l) típusú kvadratikus alakhoz, azaz a

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$$

kvadratikus alakhoz tartozó ortogonális csoportot $O(k, l)$-lel jelöljük. Bármely nemelfajuló kvadratikus alak alkalmas bázisban ilyen alakú, és ezért ortogonális csoportja $O(k, l)$-lel izomorf.

Megjegyzés. Ha q nemelfajuló kvadratikus alak W-n, akkor a W-hez asszociált $P(W)$ projektív térben a $q(\mathbf{x}) = 0$ egyenletű másodrendű görbére vo-

natkozó konjugáltság éppen a W-beli q-ortogonalitás projektív megfelelője: 9.2.1 szerint $[\mathbf{x}]$ és $[\mathbf{y}] \in P(W)$ akkor és csak akkor konjugáltak $[q]$-ra nézve, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Emiatt egy $[\mathbf{x}] \in P(W)$ pont polárisa a $P(\mathbf{x}^\perp)$ hipersík, és a $P(V) \subset P(W)$ projektív hipersík pólusa a $P(V^\perp)$ pont.

10.3.2. Definíció (Minkowski-tér). Legyen W valós vektortér, $\dim W = d + 1$. A (W, q) párt Minkowksi-térnek nevezzük, ha q kvadratikus alak W-n, amelynek a típusa $(d,1)$. A jelölésben gyakran q-t nem szerepeltetjük, és magát a W vektorteret mondjuk Minkowski-térnek, ha egyértelmű, hogy mely kvadratikus alak tartozik hozzá.

Bármely $(d + 1)$-dimenziós Minkowski-tér izomorf a standard $(d,1)$ típusú kvadratikus alakkal ellátott $\mathbf{R}^{d+1}$ koordinátatérrel, amelyet $\mathbf{R}^{d,1}$-gyel szokás jelölni.

Az $\mathbf{R}^{d,1}$-ben felírt $q(\mathbf{x}) = 0$ egyenlet $d = 1$ esetén origóban metsző egyenespárt, $d = 2$ esetén forgáskúpfelületet ad meg, $d > 2$ esetén pedig ezek $O(d)$-szimmetrikus magasabb dimenziós változatát.

10.3.3. Elnevezések. Legyen (W, q) Minkowski-tér, $\dim W = d + 1$. Egy $\mathbf{x} \in W$ vektort térszerű, időszerű, illetve fényszerű vektornak mondunk, ha $q(\mathbf{x}) > 0$, $q(\mathbf{x}) < 0$, illetve $q(\mathbf{x}) = 0$. Az izotróp, azaz fényszerű vektorok alkotta kúpot a Minkowski-tér fénykúpjának nevezzük. Az időszerű vektorok a fénykúp belsejében helyezkednek el és két összefüggő komponensből álló nyílt halmazt alkotnak. Ha $d > 1$, akkor a térszerű vektorok halmaza összefüggő.

Ha $V \leq W$ altér, $\dim V = k + 1$, akkor a $q|_V$ kvadratikus alak mátrixának mindig van legalább k pozitív sajátértéke. Aszerint, hogy a fennmaradó $(k + 1)$-edik sajátérték pozitív, negatív, vagy zérus, a V alteret térszerűnek, időszerűnek, illetve fényszerűnek nevezzük. (Az egydimenziós alterek esetében ezek az elnevezések összhangban vannak az előzőkkel, ha a generáló vektorokra alkalmazzuk.)

Ha V térszerű altér, azaz elkerüli a fénykúp belsejét, akkor $q|_V$ pozitív definit, és euklideszi vektortérré teszi V-t. Ha V időszerű altér, akkor V belemetsz a fénykúp belsejébe, és $(V, q|_V)$ maga is Minkowski-tér. Ha pedig V fényszerű altér, akkor V a fénykúp egyetlen alkotóját tartalmazza, amely éppen a $q|_V$ elfajuló kvadratikus alak magja.

Ha V térszerű, akkor $V^\perp$ időszerű, és fordítva, ha V időszerű, akkor $V^\perp$ térszerű. Speciálisan ha $\mathbf{u} \in W$ nem izotróp vektor, akkor az $\mathbf{u}^\perp$ hipersík térszerű, ha $q(\mathbf{u}) < 0$, és időszerű, ha $q(\mathbf{u}) > 0$. Mindkét esetben $\mathbf{u}$-t az $\mathbf{u}^\perp$ hipersík normálvektorának mondjuk. A normálvektor egységvektornak $(q(\mathbf{u}) = 1)$ is választható, ha a hipersík időszerű.

Egy V altér akkor és csak akkor fényszerű, ha $V^\perp$ is fényszerű, hiszen Minkowski-térben egy altér fényszerű volta azzal egyenértékű, hogy a kvadratikus alak elfajuló az altéren.

Megjegyzés. A 10.3.3-beli elnevezések a speciális relativitáselméletből származnak, amelynek a tere, a téridő, négydimenziós Minkowski-tér. Az alábbi egyenlőtlenség is a speciális relativitáselmélet jellegzetes vonása, amely szerepet fog játszani a hiperboloidmodell konstrukciójában.

10.3.4. Lemma (Fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség). *Legyen* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *két időszerű vektor a* W *Minkowski-térben. Ekkor*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \sqrt{q(\mathbf{x})q(\mathbf{y})}\,,$$

ahol egyenlőség csak akkor áll, ha $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *lineárisan összefüggők.*

Bizonyítás: Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők, például $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, akkor $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle| = |\lambda q(\mathbf{x})| = \sqrt{\lambda^2 q(\mathbf{x})^2} = \sqrt{q(\mathbf{x})q(\mathbf{y})}$.

Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan függetlenek, akkor az általuk generált kétdimenziós V altérben írjuk föl a $q|_V$ kvadratikus alak mátrixát az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ alkotta bázisban:

$$B = \begin{pmatrix} q(\mathbf{x}) & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & q(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

Miután V időszerű altér, $q|_V$ nemelfajuló és indefinit. Ezért $q(\mathbf{x}) < 0$ miatt B determinánsának is negatívnak kell lennie. A $\det B < 0$ egyenlőtlenség pedig azzal egyenértékű, hogy $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| > \sqrt{q(\mathbf{x})q(\mathbf{y})}$. □

10.3.5. Definíció (Lorentz-transzformáció, Lorentz-csoport). Legyen (W, q) Minkowski-tér. A q-ortogonális $W \to W$ lineáris leképezéseket a W tér Lorentz-transzformációinak nevezzük. A Lorentz-transzformációk $O(q)$ csoportja a W tér Lorentz-csoportja.

Bármely Lorentz-transzformáció a vektorok és alterek térszerű, időszerű, illetve fényszerű voltát megtartja. Az időszerű vektorok halmaza két összefüggő komponensből áll, amelyeket egy Lorentz-transzformáció – homeomorfizmus lévén – vagy önmagukba képez, vagy felcserél. Pozitív Lorentz-transzformációknak hívjuk azokat a Lorentz-transzformációkat, amelyek nem cserélik föl a két komponenst. A pozitív Lorentz-transzformációk a Lorentz-csoport egy 2 indexű részcsoportját alkotják, amelyet $O^+(q)$-val jelölünk.

A $W = \mathbf{R}^{d,1}$ standard Minkowski-térben a Lorentz-transzformációk csoportja az $O(d,1)$ mátrixcsoport, amelyben a pozitív Lorentz-transzformációk az $O^+(d,1)$ részcsoportot alkotják. Ha J jelöli a standard kvadratikus alak mátrixát, vagyis azt a $(d+1) \times (d+1)$ méretű diagonális mátrixot, amelynek átlóelemei rendre $1, \ldots, 1, -1$, akkor

$$\begin{aligned} O(d,1) &= \{\, A \in GL(d+1, \mathbf{R}) \,:\, A^\top J A = J \,\}\,, \quad \text{és} \\ O^+(d,1) &= \{\, A \in O(d,1) \,:\, A_{d+1,d+1} > 0 \,\}\,. \end{aligned}$$

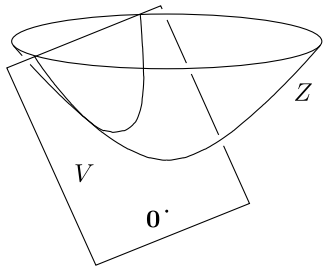
Miután $\det J \neq 0$, az $O(d,1)$-et definiáló $A^\top JA = J$ formulából következik, hogy bármely Lorentz-transzformáció determinánsa ± 1. Az 1 determinánsúak a 2 indexű $SO(d,1)$ részcsoportot alkotják $O(d,1)$-ben. A determináns pozitív volta és a Lorentz-transzformáció pozitivitása két független feltétel, ezért az 1 determinánsú pozitív Lorentz-transzformációk $SO^+(d,1)$ csoportja 4 indexű részcsoport $O(d,1)$-ben. Az $SO(d)$ speciális ortogonális csoport összefüggőségét felhasználva meggondolható, hogy $O(d,1)$-nek négy összefüggő komponense van, amelyek közül $SO^+(d,1)$ tartalmazza az egységelemet.

10.3.6. Definíció (A hiperboloidmodell illeszkedési struktúrája). A $(d+1)$-dimenziós (W, q) Minkowski-térben tekintsük a $q(\mathbf{x}) = -1$ egyenlettel, azaz standard koordináták bevezetése után az

$$x_1^2 + \ldots + x_d^2 - x_{d+1}^2 = -1$$

egyenlettel adott affin másodrendű hiperfelületet. Ez az idom $d = 0$ esetén két pont, $d = 1$ esetén hiperbola, $d = 3$ esetén kétköpenyű forgási hiperboloid. A magasabb dimenziós esetekben szintén tekinthetjük kétköpenyű forgási hiperboloidnak, és ebben az elnevezésben a „forgási” jelző az első d koordinátára vonatkozó $O(d)$-szimmetriára utal. Ennek a hiperfelületnek minden $d \geq 0$ esetén két összefüggő komponense van, amelyeket az origóra vonatkozó középpontos szimmetria egymásba képez. Válasszuk ki tetszőlegesen az egyik komponenst és jelöljük Z-vel. Állapodjunk meg abban, hogy valahányszor standard koordináták bevezetése mellett dolgozunk, Z-nek azt a félhiperboloidot választjuk, amelyik a fölső féltérbe esik, azaz amelynek a pontjaira $x_{d+1} > 0$ teljesül.

A d-dimenziós hiperbolikus geometria hiperboloidmodelljének alaphalmaza a Z halmaz, ennek elemei a modell pontjai. Ha $V \leq W$ időszerű lineáris altér, $\dim W = k + 1$, akkor a $V \cap Z \subseteq Z$ részhalmazt k-dimenziós hiperbolikus altérnek tekintjük a modellben. A 0-dimenziós alterek egypontúak, az 1-dimenziós altereket hiperbolikus egyeneseknek, a 2-dimenziósakat hiperbolikus síkoknak, a $(d-1)$-dimenziósakat hiperbolikus hipersíkoknak nevezzük Z-ben.

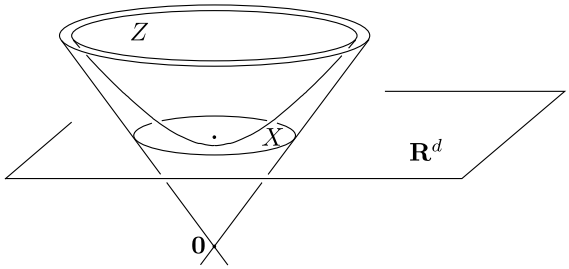


Világos, hogy miért kell W időszerű altereire szorítkozni, amikor Z-ből hiperbolikus altereket akarunk kimetszeni: az altér időszerű volta annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a Z-vel vett metszet ne legyen üres. Másrészt ha $V \subseteq W$ időszerű, akkor $(V, q|_V)$ maga is $(k+1)$-dimenziós Minkowski-tér, és benne a $V \cap Z$ halmaz a k-dimenziós hiperboloidmodell alaphalmaza. Tehát az alterek a hiperboloidmodell megfelelő alacsonyabb dimenziós példányai.

Megjegyzés. Ugyanúgy, mint a Poincaré-féle gömbmodell esetében, ahelyett, hogy a hiperboloidmodell illeszkedési és rendezési tulajdonságaival közvetlenül foglalkoznánk (ami egyébként egyáltalán nem vona nehéz), inkább megadunk egy izomorfizmust a hiperboloidmodell és a projektív modell között. Ebben a pillanatban ez a leképezés csak az illeszkedés tekintetében izomorfizmus, de a hiperboloidmodell további struktúráját majd úgy definiáljuk, hogy arra nézve is izomorfizmus legyen.

10.3.7. Definíció (A Ψ leképezés). A projektív modell alaphalmazának, X-nek a pontjait a 10.1.1. Definíció szerint a W Minkowski-térnek azok az $\mathbf{x}$ vektorai reprezentálják, amelyekre $q(\mathbf{x}) < 0$. A Z hiperboloidmodell elemei ilyenek, és W-ben bármely egydimenziós időszerű altér pontosan egy elemet tartalmaz Z-ből. Tehát a $\Psi : Z \to X$ „projektivizáló" leképezés, vagyis amelynél $\mathbf{x} \in Z$-re $\Psi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]$, bijektív.

Az alterek projektív modellbeli, illetve hiperboloidmodellbeli definícióját összevetve nyilvánvaló, hogy Ψ az illeszkedési struktúrát megtartja.



Megjegyzések. (1) A Ψ leképezést a következő szemléletes módon interpretálhatjuk. Legyen $W = \mathbf{R}^{d,1}$ a standard Minkowski-tér, és 8.4.3. mintájára ágyazzuk be $\mathbf{R}^d$-t mint az $\mathbf{R}^d \times \{1\}$ affin hipersíkot $\mathbf{R}^{d,1}$-be, a $P(W)$ projektív teret ezáltal azonosítva ennek a hipersíknak a projektív lezárásával. Az $\mathbf{R}^d$-beli koordinátákkal kifejezve a K másodrendű hiperfelület az origó körüli egységgömb ebben a hipersíkban. Tehát X a Cayley–Klein-modell, amely most a standard Minkowski-tér $x_{d+1} = 1$ egyenletű affin hipersíkjában fekszik, és egyenlő ennek a hipersíknak a fénykúp belsejébe eső részével. A

$\Psi : Z \to X$ leképezés pedig minden Z-beli vektorhoz a vele azonos ekvivalenciaosztályban levő X-beli vektort rendeli. Ez azt jelenti, hogy Ψ középpontos vetítés Z-ről X-re az origóval mint vetítési középponttal.

(2) Ugyanúgy, mint a Poincaré-féle gömbmodell esetében Φ-vel, most a Ψ izomorfizmus inverzének segítségével az alterekkel és a rendezéssel kapcsolatos fogalmakat (szakasz, félegyenes, félsík, féltér, szögtartomány, háromszög, stb.) átvihetjük a projektív modellről a hiperboloidmodellre.

10.3.8. Definíció (A hiperboloidmodell kongruenciái). Nyilvánvaló, hogy a pozitív Lorentz-transzformációk megőrzik a hiperboloidmodell eddig definiált struktúráját. Ezért kézenfekvő a hiperboloidmodell kongruenciáinak az $f = \varphi|_Z : Z \to Z$ leképezéseket nevezni, ahol $\varphi \in O^+(q)$. A $\varphi \mapsto f$ megszorító hozzárendelés nyilván injektív, hiszen Z-ből kiválasztható a W vektortér egy bázisa. Ezért a kongruenciák csoportja az $O^+(q)$ pozitív Lorentz-csoport.

10.3.9. Tétel. *A Ψ leképezés a hiperboloidmodell kongruenciáinak pontosan a projektív modell kongruenciáit felelteti meg, azaz a*

$$\varphi \mapsto [\varphi]\big|_X \qquad \big(\varphi \in O^+(q)\big)$$

hozzárendelés izomorfizmus $O^+(q)$ és $G(X)$ között.

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy ez a hozzárendelés csoporthomomorfizmust definiál. Az is könnyen meggondolható, hogy ez a homomorfizmus injektív, hiszen az identikus projektív transzformációt csak olyan lineáris leképezés indukálhatja, amely ugyanazzal a skalárral szoroz minden vektort, és a pozitív Lorentz-transzformációk között csak az identitás ilyen.

Jóval kevésbé magától értetődő ennek a homomorfizmusnak a szürjektivitása. Ez pontosan annyit jelent, hogy bármely, X-et önmagába vivő projektív transzformáció indukálható Lorentz-transzformációval, azaz a q kvadratikus alakot megőrző lineáris transzformációval.

Tegyük föl, hogy $f \in G(X)$ és $f = [\varphi]\big|_X$ valamely $\varphi \in GL(W)$-vel. Ekkor $[\varphi](K) = K$, és a $q' = q \circ \varphi$ kvadratikus alak ugyanazt a K másodrendű hiperfelületet állítja elő, mint q. Az alábbi 10.3.10. Lemma szerint (amelyben felismerhetjük a Hilbert-féle nullhelytételnek bizonyos valós másodfokú polinomokra vonatkozó változatát) ekkor $q' = \lambda q$ alkalmas λ valós skalárral. Miután q is és q' is negatív az X halmazon, λ csak pozitív lehet. Tekintsük a $\varphi' = \big(1/\sqrt{\lambda}\big)\varphi \in GL(W)$ transzformációt, ekkor továbbra is $f = [\varphi']$, és

$$q \circ \varphi' = q \circ \big((1/\sqrt{\lambda})\varphi\big) = (1/\lambda)\, q \circ \varphi = q$$

mutatja, hogy φ' Lorentz-transzformáció. $\square$

10.3.10. Lemma. *Ha egy W valós vektortéren adott két indefinit kvadratikus alak a $P(W)$ projektív térben ugyanazt a másodrendű hiperfelületet állítja elő, akkor a kvadratikus alakok egymás skalárszorosai.*

Bizonyítás: Nézzük először a kétdimenziós esetet. Ilyenkor egy indefinit kvadratikus alak mindig Minkowski-teret definiál, és a hozzá tartozó fénykúp két izotróp egyenesből áll. Ha úgy választunk bázist W számára, hogy a bázisvektorok ezt a két egyenest generálják, akkor a kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ valamilyen $a \neq 0$ konstanssal. Miután ez a mátrix skalártényező erejéig egyértelmű, bármely két olyan kvadratikus alak, amelyekhez ugyanez a fénykúp tartozik, arányos.

Az általános esetben legyen q_1 és q_2 a szóban forgó két kvadratikus alak. A feltétel szerint W-ben ugyanazok az izotróp vektorok q_2-re nézve, mint q_1-re nézve. A kétdimenziós eset alapján tudjuk, hogy bármely $V \leq W$ olyan kétdimenziós altérhez, amelyen mindkét kvadratikus alak indefinit, található olyan (esetleg V-től függő) λ_V skalár, hogy $q_2|_V = \lambda_V \cdot q_1|_V$.

Válasszunk ki egy tetszőleges nem izotróp $\mathbf{x} \in W$ vektort, és jelöljük λ-val a $q_2(\mathbf{x})/q_1(\mathbf{x})$ hányadost. Bebizonyítjuk, hogy minden $\mathbf{y} \in W$-re $q_2(\mathbf{y}) = \lambda \cdot q_1(\mathbf{y})$.

Ha $\mathbf{y}$ izotróp vektor, akkor $q_2(\mathbf{y}) = q_1(\mathbf{y}) = 0$ miatt nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $\mathbf{y}$ nem izotróp. Ha $q_1(\mathbf{y})$ előjele ellentétes $q_1(\mathbf{x})$ előjelével, akkor az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ által generált V kétdimenziós altéren q_1 indefinit, így V két izotróp egyenest tartalmaz, és ezért q_2 is indefinit V-n. A kétdimenziós esetből tudjuk, hogy $q_2|_V = \lambda_V \cdot q_1|_V$, ezért ezt $\mathbf{y}$-ra és $\mathbf{x}$-re alkalmazva

$$q_2(\mathbf{y}) = \lambda_V \cdot q_1(\mathbf{y}) = \frac{q_2(\mathbf{x})}{q_1(\mathbf{x})} \cdot q_1(\mathbf{y}) = \lambda \cdot q_1(\mathbf{y})\,.$$

Ha végül $q_1(\mathbf{z})$ ugyanolyan előjelű, mint $q_1(\mathbf{x})$, akkor választhatunk olyan $\mathbf{y} \in W$ vektort, amelyre $q_1(\mathbf{y})$ előjele mindkettővel ellentétes, és az ellentétes előjel esetére vonatkozó okoskodást két lépésben, először $\mathbf{x}$-re és $\mathbf{y}$-ra, majd $\mathbf{y}$-ra és $\mathbf{z}$-re alkalmazva kapjuk, hogy $q_2(\mathbf{z}) = \lambda \cdot q_1(\mathbf{z})$. □

10.3.11. Példa (Tükrözés a hiperboloidmodellben). Legyen $H \subset Z$ hipersík a hiperboloidmodellben, tehát $H = V \cap Z$, ahol $V \leq W$ időszerű lineáris hipersík. Miután $q|_V$ nemelfajuló, tekinthetjük W-ben a V-re vonatkozó q-ortogonális szimmetriát, vagyis azt a $\sigma_V \in GL(W)$ lineáris transzformációt, amely a $V \oplus V^\perp$ ortogonális direkt felbontásban a V-komponenst változatlanul hagyja és az egydimenziós $V^\perp$-komponensben előjelet vált. Ha $\mathbf{u}$ a V normálvektora (azaz a $V^\perp$ alteret generálja) és $q(\mathbf{u}) = 1$, akkor $\mathbf{x} \in W$-re

$$\sigma_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle\, \mathbf{u}\,.$$

Vegyük észre az analógiát az euklideszi tükrözés 4.3.10-beli formulájával. Közvetlen számolással (amely formálisan azonos az euklideszi esetre vonatkozó számolással) ellenőrizhető, hogy σ_V Lorentz-transzformáció:

$$\begin{aligned} q\big(\sigma_V(\mathbf{x})\big) &= \langle \mathbf{x} - 2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle\,\mathbf{u}\,,\ \mathbf{x} - 2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle\,\mathbf{u}\rangle \ = \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \ = \\ &= q(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

Miután σ_V-nek van fixpontja a fénykúpon belül (nevezetesen a modellbeli H hipersík pontjai a fixpontok), σ_V pozitív Lorentz-transzformáció. Tekinthetjük tehát a $\sigma_H = \sigma_V|_Z$ kongruenciát, amelyet H-ra vonatkozó tükrözésnek nevezünk.

A 8.6.14. Állítás bizonyítása szerint a σ_V leképezés a $P(V)$ hipersíkhoz és az $[\mathbf{u}]$ ponthoz tartozó harmonikus involúciót indukálja a $P(W)$ projektív térben. Miután a $P(V)$ hipersíknak a $[q]$-ra vonatkozó pólusa az $[\mathbf{u}]$ pont, 10.1.5 alapján a $[\sigma_V]$ harmonikus involúciónak az X-re történő leszűkítése éppen a projektív modellbeli tükrözés a $P(V) \cap X = \Psi(H)$ hipersíkra. Tehát a Ψ leképezés a σ_H tükrözésnek a projektív modellbeli $\sigma_{\Psi(H)}$ hiperbolikus tükrözést felelteti meg, azaz minden $\mathbf{x} \in Z$-re

$$\sigma_{\Psi(H)}\big(\Psi(\mathbf{x})\big) = \Psi\big(\sigma_H(\mathbf{x})\big)\,.$$

Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a hiperboloidmodell két különböző pontja, akkor az őket felcserélő tükrözés hipersíkját az $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ vektorral mint normálvektorral lehet előállítani. Valóban, ha már tudjuk, hogy $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ térszerű vektor, akkor az $(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\perp \leq W$ hipersíkot V-vel jelölve

$$\begin{aligned} \sigma_V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \frac{2\,\langle\, \mathbf{y} - \mathbf{x}\,, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, \mathbf{y} - \mathbf{x}\,, \mathbf{y} - \mathbf{x}\,\rangle}\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ = \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\,\langle\, \mathbf{y}\,, \mathbf{x}\,\rangle + 2}{-2 - 2\,\langle\, \mathbf{x}\,, \mathbf{y}\,\rangle}\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ = \ \mathbf{y}\,. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ vektor térszerű voltához a nevező pozitivitása, azaz $\langle\, \mathbf{x}\,, \mathbf{y}\,\rangle < -1$ szükséges. Ugyanezt használja a hiperboloidmodell alább következő távolságformulája is; az egyenlőtlenséget ott magyarázzuk meg.

10.3.12. Definíció (Távolság a hiperboloidmodellben). Legyen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in$ $\in Z$. E két pont modellbeli távolságán a

$$\rho_h\,(\,\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\,) = \mathrm{ch}^{-1}\big(-\langle\,\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\,\rangle\big)$$

számot értjük. Megindokoljuk, hogy a jobb oldalon álló kifejezésnek miért van értelme, azaz hogy $-\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle$ miért legalább 1. Vegyük észre, hogy időszerű $\mathbf{x} \in$ $\in W$ mellett az $\mathbf{x}^\perp$ hipersík térszerű volta miatt az időszerű vektorok halmazának az egész $\mathbf{x}$-et tartalmazó komponense ennek a hipersíknak ugyanarra

az oldalára esik, mint maga $\mathbf{x}$. Emiatt bármely két $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in Z$ pontra $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < < 0$. A fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség (l. 10.3.4) felhasználásával ezért valóban $-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \sqrt{q(\mathbf{x})q(\mathbf{y})} = 1$.

Látszik, hogy ρ_h invariáns a pozitív Lorentz-transzformációkra nézve, valamint hogy szimmetrikus és értéke nemnegatív. A fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségnek az egyenlőség esetére vonatkozó kiegészítéséből következik, hogy a 0 értéket csak $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ esetén veszi föl. Tehát ahhoz, hogy metrikát kapjunk, csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell bebizonyítani. Ezt – ugyanúgy, mint a projektív modell esetében – a hiperbolikus koszinusztétel következményeként kapjuk majd (l. 10.1.16, 10.1.17.(1), illetve 10.3.21).

10.3.13. Tétel. *A $\Psi : Z \to X$ leképezés távolságtartó módon képezi a ρ_h metrikával ellátott hiperboloidmodellt a projektív modellre, azaz tetszőleges $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in Z$-re*

$$\rho_p\big([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]\big) = \rho_h\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,.$$

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, és szorítkozhatunk az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ által generált $V \leq W$ altérre. Állítjuk, hogy ebben az altérben választhatunk olyan $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ izotróp vektorokból álló bázist, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Valóban, a $P(V)$ projektív egyenesen a két izotróp egyenes repezentálta két pont és $[\mathbf{x}]$ projektív bázist alkot, és az $[\mathbf{x}]$ pontot egységpontnak választva megkapjuk a kívánt bázist.

Állítsuk elő $\mathbf{y}$-t is a bázisvektorokkal: $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. Ekkor $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in Z$ miatt

$$-1 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{és} \quad -1 = \langle \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \rangle = 2\lambda\mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,.$$

Ezekből $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1/2$ és $\lambda\mu = 1$ következik. Jelöljük t-vel a $\rho_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ távolságot a hiperboloidmodellben, ekkor

$$\operatorname{ch} t = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \rangle = -(\lambda + \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}\,,$$

ahonnan $\lambda = e^t$ vagy $\lambda = e^{-t}$ következik. Másrészt a projektív modellben alkalmazhatjuk a kettősviszony 8.6.6.(1)-beli kiszámítási módszerét:

$$\rho_p\big([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]\big) = \frac{1}{2}\,\big|\ln\big([\mathbf{u}]\,[\mathbf{v}]\,[\mathbf{x}]\,[\mathbf{y}]\big)\big| = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{1}{1} : \frac{\mu}{\lambda}\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\,|\ln(\lambda^2)| = |\ln\lambda| = t\,. \qquad \square$$

10.3.14. Definíció (Érintővektor, érintőtér). Legyen $\mathbf{x} \in Z$ a hiperboloidmodell pontja. Egy $\mathbf{v} \in W$ vektort a hiperboloidmodell $\mathbf{x}$ pontbeli érintővektorának nevezünk, ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Az $\mathbf{x}$ pontbeli érintővektorok az $\mathbf{x}^\perp$ lineáris hipersíkot alkotják W-ben. Ezt a d-dimenziós vektorteret a hiperboloidmodell $\mathbf{x}$-beli érintőterének nevezzük, és $T_{\mathbf{x}}Z$-vel jelöljük.

Az érintőterek térszerű hipersíkok W-ben, tehát a q kvadratikus alak megszorítása euklideszi vektortérré teszi őket. Ezért valamely rögzített pontbeli érintővektorokra szorítkozva használhatjuk mindazokat a fogalmakat, amelyek egy euklideszi vektortérben bevezethetők. Beszélhetünk tehát a $T_{\mathbf{x}}Z$-beli vektorok normájáról, szögéről, és ezeket a szokásos, euklideszi geometriában megszokott módon származtathatjuk a $\langle\,,\,\rangle$ skaláris szorzatból.

Ha a $V \leq W$ időszerű lineáris altér az $S = V \cap Z$ hiperbolikus alteret állítja elő, akkor $\mathbf{x} \in S$ esetén a $T_{\mathbf{x}}S$ érintőteret a V Minkowski-térre vonatkoztatva állítjuk elő mint az $\mathbf{x}$ vektor ortogonális kiegészítő hipersíkját, ezáltal ilyenkor $T_{\mathbf{x}}S \leq T_{\mathbf{x}}Z$ lineáris altér.

Megjegyzés. A gömbi geometriában tapasztaltakhoz hasonlóan az érintőtér nem a Z félhiperboloidot ténylegesen érintő affin altér, hanem az origón áthaladó lineáris altér. Könnyű meggondolni, hogy Z-t a $T_{\mathbf{x}}Z$ altérnek az $\mathbf{x}$ vektorral vett eltoltja érinti: a fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség következtében minden $\mathbf{y} \in Z$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ vektorral $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < -1$, míg $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1$, emiatt a Z halmaz az $\mathbf{x}$ pontja kivételével az $\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \{\, \mathbf{y} \in W : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = -1 \,\}$ affin hipersíknak az origóhoz képest szigorúan a túlsó oldalán van.

10.3.15. Definíció (Egyenes irányvektora és paraméteres megadása) Tekintsünk egy $L \subseteq Z$ hiperbolikus egyenest a hiperboloidmodellben, és legyen $\mathbf{x} \in L$. Az L egyenes $\mathbf{x}$ pontbeli irányvektorainak a zérustól különböző $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}L$ érintővektorokat nevezzük. Ilyenkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{u}$ azt a $V \leq W$ kétdimenziós időszerű alteret generálják, amellyel $L = V \cap Z$. Miután $T_{\mathbf{x}}L$ egydimenziós vektortér, a $\mathbf{u}$ vektort az L egyenes és az $\mathbf{x}$ pontja nemzérus skalártényező erejéig egyértelműen meghatározzák.

Megfordítva, ha teszőlegesen adott az $\mathbf{x} \in Z$ pont és az $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}Z$ nemnulla érintővektor, akkor egy és csak egy olyan L hiperbolikus egyenes létezik S-ben, amely áthalad $\mathbf{x}$-en és amelynek $\mathbf{u}$ irányvektora, mégpedig az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{u}$ generálta V lineáris altér metszete Z-vel. Tegyük fel most, hogy $\mathbf{u}$ is egységvektor. Ekkor az

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{ch} t\ \mathbf{x} + \operatorname{sh} t\ \mathbf{u}$$

képlet paraméteresen állítja elő az L egyenest. Valóban, egyrészt $\mathbf{r}(t)$ az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{u}$ kombinációja lévén hozzátartozik V-hez, másrészt

$$\begin{aligned} q\big(\mathbf{r}(t)\big) &= \langle \operatorname{ch} t\,\mathbf{x} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{u}\,, \operatorname{ch} t\,\mathbf{x} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{u} \rangle = \operatorname{ch}^2 t\,\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x} \rangle + \operatorname{sh}^2 t\,\langle \mathbf{u}\,, \mathbf{u} \rangle = \\ &= -\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = -1\,. \end{aligned}$$

Ezért az $\mathbf{r}(t)$ görbe azon a V-beli, $q(\mathbf{y}) = 1$ egyenletű hiperbolán mozog, amelynek L az egyik ága. Miután az $\mathbf{x} = \mathbf{r}(0)$ pontja L-ben van, a paraméterezés folytonos volta miatt $\mathbf{r}(t)$ mindvégig L-ben marad. Befutja a teljes L halmazt, mert az sh függvény minden valós értéket felvesz.

10.3.16. Állítás. *A hiperbolikus egyenesek 10.3.15 szerinti paraméterezésénél tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ esetén*

$$\rho_h\big(\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\big) = |t_1 - t_2|\,,$$

azaz a paraméterértékek különbsége a megfelelő pontok hiperbolikus távolságát adja meg.

Bizonyítás: Azt kell ellenőrizni, hogy a $\operatorname{ch}(t_1 - t_2) = -\langle \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\rangle$ formula érvényes. Valóban,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\rangle &= \langle \operatorname{ch} t_1\, \mathbf{x} + \operatorname{sh} t_1\, \mathbf{u}\,,\, \operatorname{ch} t_2\, \mathbf{x} + \operatorname{sh} t_2\, \mathbf{u}\rangle = \\
&= \operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \,\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \,\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \\
&= -\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 + \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 = -\operatorname{ch}(t_1 - t_2)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az 10.3.16. Állítás azt mutatja, hogy (differenciálgeometriai szóhasználattal élve) az egyenesek fenti paraméteres előállítása ívhossz szerinti paraméterezés. Differenciálható paraméteres görbék esetében az ívhossz szerinti paraméterezést könnyen látható módon az a tulajdonság jellemzi, hogy a paraméterező vektorértékű függvény deriváltja minden pillanatban egységvektor. Ez is rögtön látható az egyenesek paraméterezéséről:

$$\begin{aligned}
q\big(\mathbf{r}'(t)\big) &= \langle \operatorname{sh} t\, \mathbf{x} + \operatorname{ch} t\, \mathbf{u}\,, \operatorname{sh} t\, \mathbf{x} + \operatorname{ch} t\, \mathbf{u}\rangle = \operatorname{sh}^2 t\,\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x}\rangle + \operatorname{ch}^2 t\,\langle \mathbf{u}\,, \mathbf{u}\rangle = \\
&= -\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t = 1\,.
\end{aligned}$$

Ebből az észrevételből könnyen adódik a 10.3.12-beli távolságformula alábbi változata.

10.3.17. Következmény. *Egy Z-beli egyenes két különböző, egymástól a távolságra levő pontjában válasszunk $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egységnyi irányvektorokat az egyenes számára úgy, hogy azok mindkét pontban a másik felé mutassanak. Ekkor*

$$\operatorname{ch} a = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

Bizonyítás: Paraméterezzük a két pont közti szakaszt az $\mathbf{u}$ irányvektorral ellátott $\mathbf{x}$ kezdőponttal: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{ch} t\ \mathbf{x} + \operatorname{sh} t\ \mathbf{u}$ $(0 \le t \le a)$. Az előző megjegyzés alapján ekkor $\mathbf{v} = -\mathbf{r}'(a) = -\operatorname{sh} a\, \mathbf{x} - \operatorname{ch} a\, \mathbf{u}$. Innen valóban $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = -\operatorname{ch} a$ adódik. $\square$

Bár az egyenesek paraméteres előállításában közvetlenül csak a modellbeli pontok számára kapunk képletet, a következő állítás szerint az egyenes végtelen távoli pontjai (l. 10.1.19) is könnyen meghatározhatók belĂl'le.

10.3.18. Állítás. *Legyen 10.3.15 szerint*

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{ch} t\ \mathbf{x} + \operatorname{sh} t\ \mathbf{u}$$

az $\mathbf{x} \in Z$ ponttal és az $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}Z$ egységvektorral mint irányvektorral adott L egyenes paraméterezése. Vigyük át ezt az egyenest az $X \subset P(W)$ projektív modellbe a Ψ leképezéssel. Ekkor a $\Psi(L) \subset X$ egyenes végtelen távoli pontjai a modell $\overline{X}$ lezárásában az $A = [\mathbf{x} - \mathbf{u}]$ és $B = [\mathbf{x} + \mathbf{u}]$ pontok. Ha $t \to -\infty$, akkor az $[\mathbf{r}(t)]$ pont A-hoz, ha $t \to +\infty$, akkor B-hez konvergál $P(W)$-ben.

Bizonyítás: A $q(\mathbf{x} \pm \mathbf{u}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{u}) = -1 + 1 = 0$ számolás alapján $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ és $\mathbf{x} + \mathbf{u}$ valóban az L egyenes két végtelen távoli pontját reprezentálja.

A projektív modellben $[\mathbf{r}(t)] = [(1/\operatorname{ch} t)\mathbf{r}(t)] = [\mathbf{x} + (\operatorname{sh} t/\operatorname{ch} t)\mathbf{u}]$. Az $\mathbf{u}$ vektor együtthatójára $\lim_{t\to\pm\infty}(\operatorname{sh} t/\operatorname{ch} t) = \pm 1$ érvényes, ezért $\lim_{t\to\pm\infty}[\mathbf{r}(t)] = [\mathbf{x} \pm \mathbf{u}]$. □

10.3.19. Definíció (Szög a hiperboloidmodellben). Legyen M és N két félegyenes Z-ben, amelyek közös kezdőpontja az $\mathbf{x} \in Z$ pont. Válasszunk irányvektorokat M-hez és N-hez a kezdőpontjukban: olyan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}Z$ vektorokat, amelyekkel egyirányú egységvektorokkal és az $\mathbf{x}$ kezdőponttal a 10.3.15 szerint felírt paraméterezés nemnegatív paraméterértékekre az M-et, illetve N-et futja be. Ekkor M és N szögén az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor szögét értjük, azaz azt a 0 és π közötti φ szöget, amelyre $\cos\varphi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle / \sqrt{q(\mathbf{u})q(\mathbf{v})}$.

A hiperboloidmodell kongruenciái szögtartók, hiszen a szög a skaláris szorzat segítségével van definiálva, amit a Lorentz-transzformációk megtartanak.

10.3.20. Állítás. *A Ψ leképezés szögtartó, azaz ha a hiperboloidmodellben az M és N félegyenesek szöge φ, akkor a projektív modellben a $\Psi(M)$ és $\Psi(N)$ félegyenesek szöge szintén φ.*

Bizonyítás: Használjuk a standard koordinátákat, amelyekre vonatkozóan egyrészt Z a 10.3.6-beli egyenlettel adott félhiperboloid az $\mathbf{R}^{d,1}$ Minkowski-tér $x_{d+1} > 0$ felső félterében, másrészt az X Cayley–Klein-modell az $x_{d+1} = 1$ hipersíkban fekvő, $C = (0, \ldots, 0, 1)$ pont körüli nyílt egységgömb. Ez a hipersík érinti a félhiperboloidot a C pontban.

Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor az M és N közös kezdőpontja éppen a C pont. Ekkor a $\Psi(M)$ és $\Psi(N)$ intervallumok is a C pontból indulnak ki, és irányvektoraik azonosak M és N irányvektoraival. A szög projektív modellbeli definíciója (10.1.15) szerint $\Psi(M)$ és $\Psi(N)$ szöge is ennek a két irányvektornak a szögével egyenlő, tehát a speciális esetben igazoltuk az állítást.

Az általános esetben a hiperboloidmodell alkalmas f kongruenciájával vigyük át a félegyenesek kezdőpontját C-be. Ekkor a $\Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$ leképezés $\Psi(M)$ és $\Psi(N)$ kezdőpontját viszi a $\Psi(C) = C$ pontba, és a 10.3.9. Tétel szerint

a projektív modell kongruenciája. Mivel a kongruenciák mindkét modellben szögtartók, a speciális esetből következik az állítás. □

Rátérünk hiperbolikus háromszögek vizsgálatára. A Z hiperboloidmodellben három pont, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, pontosan akkor nem kollineáris, ha a három vektor lineárisan független. Ilyenkor hiperbolikus háromszöget feszítenek ki, amely a három vektor által W-ben generált konvex poliéderkúp (triéder) metszete Z-vel. A háromszög csúcsai maguk az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok, oldalai az őket páronként összekötő modellbeli szakaszok, szögei a csúcsokból induló oldalpárokra illeszkedő félegyenespárok által alkotott szögek. A hiperbolikus háromszög adatainak szokásos jelölésével $a = \rho_h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, $b = \rho_h(\mathbf{c}, \mathbf{a})$, $c = \rho_h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, α az $\mathbf{a}$ csúcsnál, β a $\mathbf{b}$ csúcsnál, γ a $\mathbf{c}$ csúcsnál keletkező szög. A 10.1.16-ban már kimondott, de eddig még be nem bizonyított hiperbolikus koszinusztételt most újra kimondjuk és bebizonyítjuk.

10.3.21. Tétel (Hiperbolikus koszinusztétel). *Bármely hiperbolikus háromszögben az oldalak és a szögek szokásos jelölése mellett*

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha \,.$$

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in Z$ rendre az a, b, c oldalakkal szemközti csúcsok. Ekkor a hiperbolikus távolság 10.3.12-beli definíciója alapján $\operatorname{ch} a = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Válasszunk egységnyi irányvektorokat az $\mathbf{a}$ végpontban az $\mathbf{a}$-ból kiinduló két oldalszakasz irányában, mégpedig $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{a}}Z$ mutasson $\mathbf{b}$ felé, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}Z$ pedig $\mathbf{c}$ felé. Ekkor a szög 10.3.19-beli definíciója szerint $\cos \alpha = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Paraméterezzük 10.3.15 szerint a háromszög $\mathbf{a}$-ból induló oldalait az $\mathbf{a}$ kezdőpontot és az $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ irányvektort használva. A 10.3.16. Állítás miatt ezek a paraméterezések a $t = c$, illetve $t = b$ helyettesítéssel éppen a $\mathbf{b}$, illetve a $\mathbf{c}$ csúcsot állítják elő:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \operatorname{ch} c \, \mathbf{a} + \operatorname{sh} c \, \mathbf{u} \\ \mathbf{c} &= \operatorname{ch} b \, \mathbf{a} + \operatorname{sh} b \, \mathbf{v} \,. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a Minkowski-tér $\langle \, , \, \rangle$ bilineáris függvényét a két bal oldalra, illetve a két jobb oldalra, ebből, felhasználva, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$, a

$$\langle \mathbf{b} \, , \mathbf{c} \rangle = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c \, \langle \mathbf{a} \, , \mathbf{a} \rangle \, + \, \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \, \langle \mathbf{u} \, , \mathbf{v} \rangle$$

formulát kapjuk, ami $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\operatorname{ch} a$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$, és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos \alpha$ alapján a tétel állításával egyenértékű. □

Mivel a modellek közti Φ és Ψ izomorfizmusok minden releváns struktúraelemet (altereket, távolságot, szöget) megőriznek, a koszinusztétel mindegyik

modellben érvényes. Ezzel beláttuk a 10.1.16-ban kimondott projektív modellbeli változatot is, és annak legfontosabb következményét, a 10.1.17.(1) háromszög-egyenlőtlenséget.

10.3.22. Következmény. *A 10.1.13-ban, 10.2.9-ben és 10.3.12-ben definiált ρ_p, ρ_k, illetve ρ_h távolságfüggvények (egymással izometrikus) metrikus térré teszik a d-dimenziós hiperbolikus geometria modelljeit.* □

Megjegyzés. A hiperbolikus koszinusztétel csak akkor érvényes a 10.3.21-beli alakban, ha a háromszög oldalainak hosszát a természetes távolságmérés szerint adjuk meg. Ha rögzítünk egy pozitív λ arányossági tényezőt, és a tér természetes metrikája helyett annak λ-szorosát használjuk (azaz a természetes távolságegység helyett annak $(1/\lambda)$-szorosát választjuk a távolságmérés egységének), akkor a koszinusztétel alakja az új távolságmérés értelmében a, b, c oldalhosszakkal megadott háromszög esetében nyilván

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\lambda} = \operatorname{ch}\frac{b}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{c}{\lambda} - \operatorname{sh}\frac{b}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{c}{\lambda}\cos\alpha$$

lesz. Hasonló jelenséget tapasztaltunk a gömbi trigonometria formuláival kapcsolatban is. A 0.3. szakasz végén tett megjegyzések alapján ez a λ konstans olyasféle szerepet játszik a hiperbolikus geometriában, mint az alapgömb sugara a gömbi geometriában. A gömbi és a hiperbolikus trigonometriai formulák közti szorosabb kapcsolatra később még visszatérünk (l. 11.3).

10.4. A hiperbolikus tér

10.4.1. Definíció ($\mathbf{H}^d$). A d-dimenziós hiperbolikus geometria alaptere számára bevezetjük a modell választásától független $\mathbf{H}^d$ jelölést. $\mathbf{H}^d$ tehát azt a metrikus teret jelöli, amelyről a 10.3.21. Következmény szól, vagyis a természetes távolságméréssel ellátott hiperbolikus teret.

A $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus tér (ellentétben az euklideszi, illetve gömbi geometriában használatos $\mathbf{R}^d$, S^d jelölésekkel) nem konkrét halmazt, hanem csupán egy izometria erejéig meghatározott metrikus teret jelent.

A $\mathbf{H}^d$ metrikus tér egyértelműen meghatározza a hiperbolikus geometria teljes struktúráját: egyrészt a 10.1.17.(1) szigorú háromszög-egyenlőtlenség alapján a metrikából kikövetkeztethető, hogy mely ponthármasok kollineárisak, és ezen keresztül az alterek meghatározhatók, másrészt a 10.1.18. Tétel szerint a tér kongruenciáit az izometriák szolgáltatják. Ha $k \leq d$ és $M \subseteq \mathbf{H}^d$ tetszőleges k-dimenziós hiperbolikus altér, akkor M az örökölt metrikával $\mathbf{H}^k$ egy izometrikus példánya.

Amikor a hiperbolikus tér tulajdonságait vizsgáljuk, az általánosság csorbítása nélkül bármelyik modell választásával konkréttá tehetjük a $\mathbf{H}^d$ teret.

A $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus tér $I(\mathbf{H}^d)$ izometriacsoportját is valamely konkrét modell kiválasztása azonosítja az előző szakaszokban tárgyalt transzformációcsoportok valamelyikével. A 10.1.18. Tétel alapján a „kongruencia", „izometria", „egybevágóság" kifejezések $\mathbf{H}^d$ esetében ugyanazokat a transzformációkat jelentik, úgyhogy a továbbiakban ezeket általában egységesen izometriának nevezzük. Ez alól kivétel a két-, illetve háromdimenziós eset, ahol a klasszikus geometria szóhasználatához igazodva inkább az egybevágóság kifejezést használjuk.

A projektív és a konform modellek konstrukciójában döntő szerepet játszottak a modell végtelen távoli pontjai, és a modell ideális határa, amelyet a végtelen távoli pontok alkotnak. A 10.1.19. Definíció mintájára a $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus tér ideális határát $\partial\mathbf{H}^d$-vel, a tér $\mathbf{H}^d \cup \partial\mathbf{H}^d$ lezárását pedig $\overline{\mathbf{H}^d}$-sal jelöljük. A $\partial\mathbf{H}^d$ ideális határ természetes struktúrája a $(d-1)$-dimenziós inverzív geometria, amelyben Möbius-transzformációkat indukálnak a tér izometriái. A struktúra természetessége itt azt jelenti, hogy nem függ attól, hogyan azonosítjuk a $\mathbf{H}^d$ teret egy konkrét modellel.

10.4.2. Definíció (Irányítástartás és -váltás). A hiperbolikus tér izometriáinak irányítástartó, illetve irányításváltó voltát értelmezzük. Az egydimenziós esetben a hiperbolikus egyenes az euklideszi egyenessel izometrikus, ezért itt az euklideszi egyenesre vonatkozó definíciót alkalmazzuk. Ha pedig $d \geq 2$, akkor a konform modellekre és az $I(\mathbf{H}^d) \cong \mathcal{M}^{d-1}$ izomorfiára hivatkozunk. A Möbius-transzformációk körében 5.3.12–5.3.14-ben értelmeztük az irányítástartás és -váltás fogalmát. Ennek alapján azt mondjuk, hogy $\mathbf{H}^d$ egy izometriája irányítástartó, illetve irányításváltó, ha a tér ideális határán általa indukált Möbius-transzformáció az.

Az irányítástartó izometriák 2 indexű részcsoportot alkotnak az $I(\mathbf{H}^d)$ csoportban, ezt a részcsoportot $I^+(\mathbf{H}^d)$-vel jelöljük. Az euklideszi szóhasználathoz hasonlóan az irányítástartó izometriákat a hiperbolikus geometriában is mozgásoknak nevezzük. $I^+(\mathbf{H}^d)$ a tér mozgáscsoportja.

A hipersíkra vonatkozó tükrözések irányításváltók, hiszen az ideális határon inverziót létesítenek. Tudjuk 10.1.10.(1)-ből, hogy a tükrözések generálják az $I(\mathbf{H}^d)$ izometriacsoportot, ezért egy izometria pontosan akkor irányítástartó, ha páros sok tükrözés szorzataként állítható elő.

A hiperboloidmodell tükrözéseit 10.3.11 szerint származtató q-ortogonális lineáris szimmetriák -1 determinánsúak. A paritással kapcsolatos fenti észrevétel alapján tehát a hiperboloidmodell valamely izometriája pontosan akkor irányítástartó, ha az azt reprezentáló pozitív Lorentz-transzformáció determinánsa 1. Ezek a transzformációk a 2 indexű $SO^+(q)$ részcsoportot al-

kotják a pozitív Lorentz-transzformációk $O^+(q)$ csoportjában. Így tehát I^+ $+(\mathbf{H}^d) \cong SO^+(d,1)$.

A hiperbolikus terek között történeti szempontból a $d = 3$ esetnek, azaz a $\mathbf{H}^3$ térnek azért van kiemelkedő jelentősége, mert ez olyan geometriai rendszer, amelyben a klasszikus euklideszi tér alapfogalmai értelmezve vannak, és ezekre az euklideszi tér axiómái a párhuzamossági axióma híján mind érvényesek, maga a párhuzamossági axióma pedig nem. A tizenkilencedik század második felében Felix Klein ennek a modellnek a (projektív geometrián alapuló) konstrukciójával bizonyította be, hogy a párhuzamossági axiómát nem lehet levezetni a többi axiómából. Ezzel lezárta a „parallelák problémájának" évezredes történetét, amelyben Klein munkáját évtizedekkel megelőzve Bolyai és Lobacsevszkij már megtették a hiperbolikus geometria axiomatikus kiépítésének döntő lépéseit, és az elmélet sok alapvető tételét kidolgozták. Ennek a szakasznak a hátralevő részében vázlatosan átgondoljuk az axiómák teljesülését a $\mathbf{H}^3$ térben.

Vegyük sorra először a klasszikus euklideszi geometria alapfogalmait úgy, ahogyan azokat a 0.1. szakaszban tárgyalt felépítésben bevezettük. Használjuk a háromdimenziós hiperbolikus térgeometria projektív modelljét, és rendre tisztázzuk, miféle természetes jelentéssel bírnak az alapfogalmak ebben a modellben.

Az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{S}$ halmazrendszereket, azaz az egyenesek és a síkok rendszerét a 10.1.1. Definíció adja meg mint hiperbolikus egyeneseket és síkokat.

Az $\mathcal{R}$ elválasztási relációnak a valós egyenes geometriájából származó természetes jelentése van, hiszen a modellbeli hiperbolikus egyenesek valódi nyílt intervallumok a befoglaló valós projektív tér egyenesein.

A $\equiv$ egybevágósági relációt a projektív modell 10.1.3-ban definiált kongruenciái természetes módon származtatják: két szakasz, illetve két szögtartomány egybevágó, ha a modell alkalmas kongruenciája az egyiket a másikra képezi.

Tekintsük most a klasszikus euklideszi geometria axiómáit. Ezek túlnyomó részéről, nevezetesen az $(I1)$–$(I7)$ illeszkedési axiómákról, az $(R1)$–$(R4)$ rendezési axiómákról és az (F) folytonossági axiómáról magától értetődő, hogy érvényesek a projektív modellben. A modell alaphalmaza ugyanis (a koordináták alkalmas megválasztásával) az $\mathbf{R}^3$ koordinátatér konvex nyílt részhalmaza, és könnyen ellenőrizhető módon ez már elegendő ahhoz, hogy az ezekben az axiómákban megfogalmazott tulajdonságok $\mathbf{R}^3$-ból átöröklődjenek az alaphalmazra.

Az egybevágósági axiómák közül $(E1)$, $(E3)$ és $(E4)$ rögtön következik a kongruenciák csoportjának erős tranzitivitási tulajdonságaiból (10.1.9, 10.1.10.(2)), $(E2)$ pedig a távolságmérés tulajdonságaiból (10.1.12).

Végül nyilvánvaló, hogy a (P) párhuzamossági axióma nem érvényes a modellben, ahogyan azt már rögtön a 10.1.1. Definíció után megjegyeztük.

Ezekből az észrevételekből az is következik, hogy a hiperbolikus sík- és térgeometriában mindazok a fogalmak értelemmel bírnak, és mindazok a tételek érvényesek, amelyeket a klasszikus euklideszi geometria axiómáiból a párhuzamossági axióma felhasználása nélkül lehet levezetni. Az elemi sík- és térgeometria jelentős része ilyen. Bolyai nyomán ezeket „abszolút" fogalmaknak és tételeknek nevezzük. Például az abszolút geometria körébe tartozó tény, hogy a háromszög belső szögfelezői egy ponton haladnak át, vagy hogy körhöz külső pontból egyenlő hosszú érintőket lehet húzni. Az abszolút geometriai fogalmak és tételek nem csupán a $\mathbf{H}^2$ és $\mathbf{H}^3$ terekre vonatkozóan, hanem nyilván a magasabb dimenziós hiperbolikus tér két-, illetve háromdimenziós altereiben is ugyanúgy érvényesek.

Megjegyzés. Mindaz, amit a hiperbolikus térről ebben a szakaszban megállapítottunk, érvényes volna akkor is, ha $\mathbf{H}^d$-t nem a természetes metrikával, hanem annak valamilyen pozitív konstansszorosával látnánk el. Ennek a konstansnak a megválasztása csak a konkrét számolásokat, nevezetesen a hiperbolikus geometria bizonyos képleteinek alakját befolyásolja (l. 11.3).

11. A hiperbolikus sík

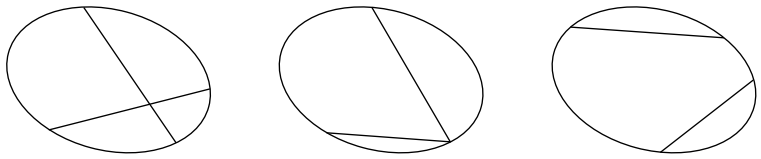
A hiperbolikus geometria különös vonásai, az euklideszi geometriától eltérő jellegzetességei már a kétdimenziós esetben markánsan megmutatkoznak. Ezért először a hiperbolikus síkgeometriával, azaz a $\mathbf{H}^2$ metrikus tér tulajdonságaival foglalkozunk.

11.1. Párhuzamosság, sugársorok, ciklusok

A hiperbolikus sík illeszkedési struktúráját az egyenesek rendszere alkotja. Ebben a szakaszban az egyenesek kölcsönös helyzetével kapcsolatos fogalmakat tisztázzuk, ami elvezet bizonyos nevezetes síkgörbék, az úgynevezett ciklusok definíciójához.

11.1.1. Definíció (Metsző, párhuzamos, ultraparallel egyenesek). Legyen L és M két különböző egyenes a hiperbolikus síkon. A projektív modellt használva tekintsük a projektív sík $\langle L\rangle$ és $\langle M\rangle$ egyeneseit, ezek metszik

egymást a projektív sík valamely A pontjában. Aszerint, hogy az A pont a modell alaphalmazát határoló kúpszelet belső pontja, illeszkedik rá, vagy külső pontja, mondjuk L-et és M-et metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel egyeneseknek.



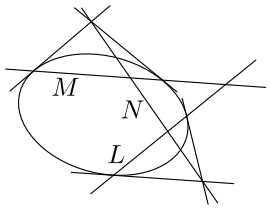
Bizonyos esetekben (például a tranzitivitás kérdésében, vagy később a sugársorok származtatásakor) kényelmi okokból tekinthetünk két egybeeső egyenest is akár metszőnek, akár párhuzamosnak, akár ultraparallelnek.

Ha két egyenesnek nincs közös pontja $\mathbf{H}^2$-ben, akkor vagy párhuzamos, vagy ultraparallel egyenesekről van szó. Akkor és csak akkor párhuzamosak, ha az egyik végtelen távoli pontjuk közös.

Könnyen látható, hogy az egyenesek párhuzamossága – az euklideszi geometriától eltérő módon – nem tranzitív reláció. Miután a párhuzamosság kérdésében a két szóban forgó egyenesnek csak egy-egy végtelen távoli pontja játszik szerepet, kézenfekvő módon lehet a párhuzamosság fogalmát akár irányított egyenesek, akár félegyenesek között értelmezni, hiszen az egyenes irányítása, illetve a félegyenes kiválasztása kijelöli az egyenes két végtelen távoli pontja közül az egyiket. Nyilvánvaló módon az irányított egyenesek, illetve a félegyenesek körében definiált párhuzamosság már ekvivalenciareláció lesz. Az ekvivalenciaosztályok bijektív kapcsolatban állnak $\partial\mathbf{H}^2$ elemeivel.

11.1.2. Állítás. *A hiperbolikus síkon két különböző egyenes akkor és csak akkor ultraparallel, ha létezik olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges. Ezt a harmadik egyenest az első kettő egyértelműen meghatározza.*

Bizonyítás: Használjuk a projektív modellt, és legyen L és M a két szóban forgó egyenes. A merőlegesség projektív modellbeli definíciója (10.1.6) alapján ahhoz, hogy egy további N egyenes merőleges legyen L-re is és M-re is, az $\langle N\rangle$ projektív egyenesnek át kell haladnia mind $\langle L\rangle$, mind $\langle M\rangle$ pólusán.



Mivel ez a két pont különböző, a keresett projektív egyenes egyértelműen létezik. Csak az kérdéses, hogy ez az egyenes hiperbolikus egyenest állít-e elő, azaz belemetsz-e a modellbe. Ez akkor és csak akkor van így, ha a pólusa a határoló kúpszelet külső pontja. Ez a pólus a polaritás illeszkedéstartása (9.2.4.(2)) miatt $\langle L\rangle \cap \langle M\rangle$, amely akkor és csak akkor külső pont, ha L és M definíció szerint ultraparallel. □

Megjegyzés. A 11.1.2-beli unicitási tulajdonság rögtön maga után vonja, hogy a hiperbolikus síkon nem létezik téglalap, azaz olyan négyszög, amelynek négy derékszöge van.

Két egyenes kölcsönös helyzetét a pontjaik közti távolságok segítségével is jellemezni lehet. Ennek tisztázásához a hiperboloidmodell apparátusát célszerű alkalmazni. A modell kétdimenziós változatát használjuk, amelynek alaphalmaza a Z félhiperboloid a háromdimenziós W Minkowski-térben. Az egyeneseket itt normálvektor segítségével is megadhatjuk: ha a $V \leq W$ időszerű altér állítja elő az $L = V \cap Z$ egyenest, akkor $\mathbf{v} \in W$, $V = \mathbf{v}^\perp$ esetén $\mathbf{v}$-t az L egyenes normálvektorának is tekinthetjük.

11.1.3. Lemma. *Legyen a $\mathbf{v}$ egységvektor az L egyenes normálvektora a hiperboloidmodellben. Ekkor bármely $\mathbf{x} \in Z$ pont távolsága az L egyenestől*

$$\rho_h\big(\mathbf{x}, L\big) = \operatorname{ch}^{-1}\big(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle^2\big)\,.$$

Bizonyítás: Tudjuk (l. 10.1.17.(2)), hogy az L egyenes pontjai közül az $\mathbf{x}$-ből L-re bocsátott merőleges egyenes döféspontja van $\mathbf{x}$-hez a lehető legközelebb. A hipersíkra vonatkozó tükrözés 10.3.11-beli formulájából következik, hogy ez a pont $\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$ alakban áll elő. A két pont távolsága $\operatorname{ch}^{-1}\big(- \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}\rangle\big) = \operatorname{ch}^{-1}\big(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle^2\big)$. □

11.1.4. Tétel

(1) *Legyen L és M két egyenes a hiperbolikus síkon. Távolodjon egy M-en mozgó pont minden határon túl az M egyenes egyik, A-val jelölt végtelen távoli pontja felé. Ekkor a mozgó pontnak az L egyenestől mért távolsága 0-hoz tart, ha A az L-nek is végtelen távoli pontja, egyébként pedig végtelenhez tart.*

(2) *A hiperbolikus síkon két párhuzamos egyenesnek mint a $\mathbf{H}^2$ metrikus térben fekvő ponthalmazoknak a távolsága zérus. Két különböző ultraparallel egyenes távolsága pozitív, és a közös merőlegesnek a két egyenes közé eső szakaszával egyenlő.*

Bizonyítás: (1) A hiperboloidmodellben legyen az L egyenes a $\mathbf{v}$ egységvektorral mint normálvektorral adva, az M egyenest pedig állítsuk elő paraméteresen a 10.3.15 szerinti

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \operatorname{ch} t\,\mathbf{x} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{u} \;=\; \frac{1}{2}\,e^{-t}(\mathbf{x}-\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\,e^{t}(\mathbf{x}+\mathbf{u})$$

képlettel, ahol $\mathbf{u}$ az A felé mutató egységnyi irányvektor az L egyenes számára egy tetszőlegesen választott $\mathbf{x} \in L$ pontban. Az $\mathbf{r}(t) \in M$ pont távolsága az L egyenestől 11.1.3 alapján

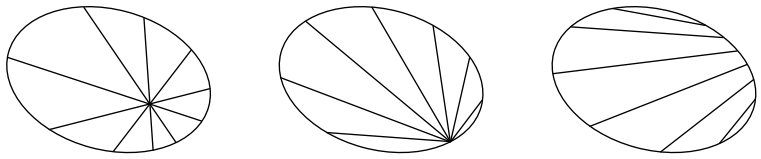
$$\begin{aligned}\rho_h\big(\mathbf{r}(t), L\big) \;&=\; \operatorname{ch}^{-1}\big(1 + \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{v}\rangle^2\big) \;= \\ &=\; \operatorname{ch}^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}\big(e^{-t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + e^{t}\langle \mathbf{x}+\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\big)^2\right).\end{aligned}$$

Ez a kifejezés $t \to +\infty$ esetén vagy 0-hoz, vagy $+\infty$-hez tart, mégpedig pontosan aszerint, hogy benne e^t együtthatója zérus-e vagy sem. A 10.3.18. Állítás szerint az A végtelen távoli pontot az $\mathbf{x}+\mathbf{u}$ vektor reprezentálja. Ha ez a pont az L-nek is végtelen távoli pontja, akkor $\langle \mathbf{x}+\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ és így $\rho_h\big(\mathbf{r}(t), L\big) \to 0$, más esetben pedig $\rho_h\big(\mathbf{r}(t), L\big) \to \infty$.

(2) A párhuzamos egyenesekre vonatkozó állítás azonnal következik (1)-ből. Ha L és M ultraparallel egyenesek, akkor az M-en futó pont L-től való távolsága (1) alapján mindkét irányban végtelenhez tart. Ezért folytonossági okokból ez a távolság valahol pozitív minimumértéket vesz fel. A derékszögű háromszögre vonatkozó egyenlőtlenség (l. 10.1.17.(2)) miatt ezt a minimális távolságot csak a mindkét egyenesre merőleges szakasz reprezentálhatja. □

Megjegyzés. A hiperbolikus síkon két különböző egyenes kölcsönös helyzetét a távolságok nyelvén tehát így lehet jellemezni: ha a két egyenes távolsága pozitív, akkor ultraparallel egyenesekről van szó, ha zérus, akkor az egyenesek aszerint metszők, illetve párhuzamosak, hogy van-e közös pontjuk vagy sem.

11.1.5. Definíció (Sugársor). A hiperbolikus sík egyeneseinek egy halmazát sugársornak nevezzük, ha előáll mint a projektív sík valamely sugársorának a nyoma a hiperbolikus sík projektív modelljében. (A sor nyoma itt és a későbbiekben azt jelenti, hogy a sor azon tagjainak a metszetét tekintjük a modell alaphalmazával, amelyekre ez a metszet nem üres.)

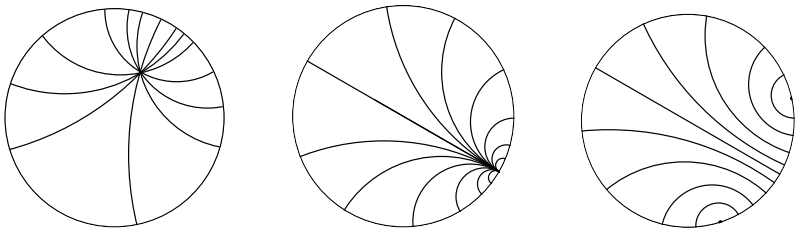


A projektív sugársor tartópontjának elhelyezkedése szerint beszélhetünk metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel sugársorokról. Világos, hogy a hiperbolikus sík bármely két különböző egyeneséhez egyértelműen létezik olyan sugársor, amelynek a két egyenes tagja. Ez a sugársor a két adott egyenes kölcsönös helyzete szerint lesz metsző, párhuzamos, vagy ultraparallel típusú.

A metsző sugársort úgy is definiálhatnánk, mint a hiperbolikus sík valamely pontján áthaladó összes egyenesből álló rendszert, a párhuzamos sugársort mint az összes olyan egyenest, amelyhez a sík valamely rögzített végtelen távoli pontja hozzátartozik, és végül az ultraparallel sugársort mint valamely rögzített egyenesre (a tartópont polárisára) merőleges összes egyenesből álló sereget. Nyilvánvaló, hogy bármely két metsző sugársor egybevágó, bármely két párhuzamos sugársor egybevágó, és bármely két ultraparallel sugársor egybevágó.

A sugársor definíciójában csak a projektív modellre támaszkodtunk. Most jellemezzük a sugársorokat a konform modellekben és a hiperboloidmodellben is.

11.1.6. Állítás. *A Poincaré-féle körmodellben a sugársorok pontosan azoknak a körsoroknak (és sugársornak) a nyomai, amelyek minden tagját a modell alapköre merőlegesen metszi.*



Részletezve: az euklideszi sík egy $\mathcal{K}$ körsorának (vagy sugársorának) a nyoma a K alapkörrel adott Poincaré-modellben

- *metsző sugársor, ha $\mathcal{K}$ metsző körsor, amelynek a tartópontjai egymás inverzei K-ra nézve, vagy pedig ha $\mathcal{K}$ metsző sugársor, amelynek a tartópontja K középpontja,*
- *párhuzamos sugársor, ha $\mathcal{K}$ érintkező körsor, amelynek a tartópontja K-ra illeszkedik, és hatványvonala K-nak átmérője, valamint*
- *ultraparallel sugársor, ha $\mathcal{K}$ Apollóniosz-féle körsor, amelynek mindkét alappontja K-ra illeszkedik.*

Bizonyítás: A projektív modellt a Poincaré-féle körmodellel összekapcsoló Φ leképezés (l. 10.2.3) első lépésénél az euklideszi sík sugársoraiból félkörök seregei keletkeznek, amelyeket olyan térbeli síksorok metszenek ki a felső félgömbből, amelyek csak a modell síkjára merőleges síkokból állnak. A második lépésben végrehajtott sztereografikus vetítésnél az ilyen síksorok által kimetszett gömbi körsorok pontosan az állításban felsorolt síkbeli körsorokba képeződnek. □

Megjegyzés. Könnyen meghatározhatjuk a sugársorokat a konform modellek másik két változatában is. A félgömbmodell esetében ezt már tulajdonképpen megtettük 11.1.6 bizonyítása során. A félsíkmodellben K kör helyett egyenest jelent, és ez a sugársorok áttekintését csak kis mértékben módosítja: például párhuzamos sugársort kapunk a K-ra merőleges irányú euklideszi párhuzamos sugársor nyomaként is, valamint ultraparallel sugársort eredményeznek a K-ra illeszkedő középpontú koncentrikus körsorok is.

11.1.7. Állítás. *A hiperboloidmodellben a sugársorokat pontosan azok a W térbeli síksorok metszik ki Z-ből, amelyeknek a tartóegyenese áthalad W origóján. A síksor által kimetszett sugársor pontosan aszerint lesz metsző, párhuzamos, vagy ultraparallel, hogy a tartóegyenes időszerű, fényszerű, illetve térszerű altér.*

Bizonyítás: A hiperboloidmodell és a projektív modell közötti izomorfizmust létrehozó Ψ projektivizáló leképezés nem csak Z-n, hanem az egész $W - \{\mathbf{0}\}$ halmazon értelmezve van. A $P(W)$-beli sugársorok ősképei W-beli kétdimenziós alterek lineáris rendszerei, azaz az origón áthaladó síkokbl álló síksorok. A síksor tartóegyenese a sugársor tartópontját reprezentálja, ezért tehát időszerű, ha a tartópont a modellhez tartozik, fényszerű, ha végtelen távoli, és térszerű, ha a határkúpszelet külső pontja. □

11.1.8. Lemma. *Ha a hiperbolikus sík három tetszőleges, különböző pontjához előállítjuk a páronkénti szakaszfelező merőleges egyeneseket, akkor ez a három egyenes egy sugársorhoz tartozik.*

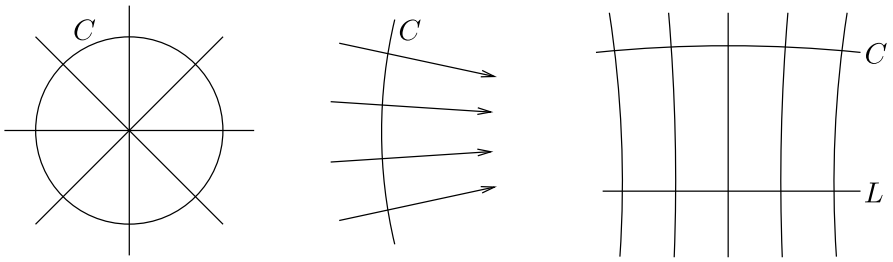
Bizonyítás: Dolgozzunk a hiperboloidmodellben. Ha a három pont $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$, akkor a három felező merőlegest hordozó kétdimenziós alterek számára 10.3.11 szerint normálvektorként szolgál $\mathbf{z}-\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ és $\mathbf{y}-\mathbf{x}$. Ezek lineárisan összefüggő vektorok, tehát a három altér egy síksorhoz tartozik W-ben. □

11.1.9. Definíció (Sugársorra vonatkozó korrespondencia). Rögzítsünk egy $\mathcal{S}$ sugársort $\mathbf{H}^2$-ben. Azt mondjuk, hogy az $A, B \in \mathbf{H}^2$ pontok korrespondeáló pontok $\mathcal{S}$-re nézve (jelben $A \mathrel{\hat{=}}_{\mathcal{S}} B$), ha alkalmas $L \in \mathcal{S}$ egyenessel $B = \sigma_L(A)$. Egyenértékű módon úgy is fogalmazhatunk, hogy $A \mathrel{\hat{=}}_{\mathcal{S}} B$ akkor áll fenn, ha vagy A és B egybeesnek, vagy különbözők és a felező merőlegesük $\mathcal{S}$-hez tartozik.

A $\simeq_{\mathcal{S}}$ reláció nyilvánvaló módon reflexív és szimmetrikus, továbbá a 11.1.8. Lemma következtében tranzitív is, tehát ekvivalenciareláció. Ha az $\mathcal{S}$ sugársor metsző, akkor a tartópont egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot, de minden más esetben az ekvivalenciaosztályok végtelenek, hiszen tartóponttól különböző pontot $\mathcal{S}$ más és más tagjaira tükrözve csupa különböző pontot kapunk.

11.1.10. Definíció (Ciklus, tengely, paraciklus, hiperciklus). A hiperbolikus síkon ciklusoknak nevezzük a $\simeq_{\mathcal{S}}$ szerinti ekvivalenciaosztályként előálló ponthalmazokat, ahol $\mathcal{S}$ valamilyen sugársor $\mathbf{H}^2$-ben. Az egyelemű ponthalmazok is ciklusok, ezeket elfajuló ciklusoknak nevezzük.

Elfajuló ciklus nyilván csak a rá mint tartópontra illesztett metsző sugársorból származhat, de bármely nemelfajuló C ciklus is az őt származtató $\mathcal{S}$ sugársort egyértelműen meghatározza, hiszen az a C-ből választható pontpárok felező merőlegeseiből áll. Az $\mathcal{S}$-hez tartozó egyeneseket a C ciklus tengelyeinek nevezzük. Ezek nyilvánvalóan mind szimmetriatengelyei C-nek.



Ha $\mathcal{S}$ metsző sugársor, akkor az általa létesített ciklusok körök (köztük egy pontkörrel), mégpedig pontosan azok, amelyeknek $\mathcal{S}$ tartópontja a középpontja.

Ha a C ciklust párhuzamos sugársor származtatja, akkor C-t paraciklusnak nevezzük. Az ugyanazon $\mathcal{S}$ párhuzamos sugársorhoz tartozó paraciklusokat koncentrikusnak mondjuk, és $\mathcal{S}$ végtelen távoli tartópontját tekintjük közös középpontjuknak.

Az ultraparallel sugársorok által származtatott ciklusokat hiperciklusoknak nevezzük. Legyen $\mathcal{S}$ ultraparallel sugársor, és L az az egyenes, amely $\mathcal{S}$ minden tagjára merőleges. Ekkor az $\mathcal{S}$ tagjaira vonatkozó tükrözések L-et önmagában mozgatják. Ha C egy $\mathcal{S}$ által származtatott hiperciklus, akkor C pontjainak az L-től mért távolságát az $\mathcal{S}$-hez tartozó egyenesek mentén mérjük. Emiatt C vagy magával az L egyenessel azonos, vagy pedig L egyik félsíkjában az L-től valamilyen rögzített pozitív távolságra levő pontokból áll. Ezért a hiperciklusokat gyakran távolságvonalaknak is nevezik. Az L egyenest a hiperciklus alapegyenesének, pontjainak L-től való távolságát a hiperciklus sugarának hívjuk.

11.1.11. Állítás. *Bármely két paraciklus egybevágó. Két kör, illetve két hiperciklus akkor és csak akkor egybevágó, ha sugaruk egyenlő.*

Bizonyítás: A körökre és a hiperciklusokra vonatkozó állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy a ciklus a tengelyei alkotta sugársort egyértelműen meghatározza, és azonos típusú sugársorok egybevágók. A paraciklusokra vonatkozó állítás indoklásául hasonló okból elég azt meggondolni, hogy ugyanazon párhuzamos sugársorhoz tartozó (azaz koncentrikus) paraciklusok egybevágók. Ha kiszemeljük ennek a sugársornak egy tetszőleges L egyenesét, akkor az L mentén történő eltolások (l. 10.1.11) a sugársor végtelen távoli tartópontját fixen tartják. Ezért a sugársort ezek az egybevágóságok önmagába képezik, miközben a hozzá tartozó paraciklusokat egymásba viszik. Az L mentén történő eltolások tranzitívan hatnak L-en, ezért a szóban forgó paraciklusok közül bármelyik átvihető bármelyik másikba alkalmas eltolással. □

Az euklideszi síkgeometriában megszoktuk, hogy három nem kollineáris pont mindig egy körön van. A hiperbolikus síkon ennek az alábbi módosított változata érvényes.

11.1.12. Állítás. *A hiperbolikus sík bármely három különböző pontjához egy és csak egy olyan ciklus található, amelyre mindhárom pont illeszkedik.*

Bizonyítás: A 11.1.8. Lemmából rögtön következik a ciklus létezése. Az egyértelműség is nyilvánvaló, hiszen a páronkénti felező merőlegeseknek hozzá kell tartozniuk a ciklust származtató sugársorhoz. □

Érdekes kérdés, hogy a különféle modellekben a ciklusokat miféle görbék reprezentálják. Szép választ a hiperboloidmodell és a konform modellek esetében tudunk adni.

11.1.13. Állítás

(1) *A hiperbolikus sík hiperboloidmodelljében a ciklusok pontosan a modell alaphalmazául szolgáló Z félhiperboloid nemüres síkmetszetei a befoglaló W Minkowski-tér affin síkjaival.*

(2) *Két ciklus tengelyei akkor és csak akkor alkotják ugyanazt a sugársort, ha az őket kimetsző affin síkok párhuzamosak.*

(3) *Legyen valamely $S \subset W$ affin síkra $S \cap Z \neq \emptyset$. Ha S állása térszerű, akkor az $S \cap Z$ ciklus kör (amely esetleg egyetlen pont is lehet), ha fényszerű, akkor paraciklus, ha időszerű, akkor hiperciklus.*

Bizonyítás: Tekintsünk a hiperbolikus síkon egy $\mathcal{S}$ sugársort, ezt a hiperboloidmodellben 11.1.7 alapján egy W-beli lineáris alterekből álló síksor állítja

elő, legyen V a síksor tartóegyenese. Nyilván V és $\mathcal{S}$ kölcsönösen meghatározzák egymást. Az $\mathcal{S}$-hez tartozó egyenesekre vonatkozó tükrözéseket a síksor tagjaira vett W-beli q-ortogonális lineáris tükrözések állítják elő (l. 10.3.11), amelyek így V-t pontonként fixen hagyják. Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z$ tetszőleges különböző pontok, akkor $\mathbf{x} \doteq_{\mathcal{S}} \mathbf{y}$ azzal egyenértékű, hogy az őket felcserélő q-ortogonális tükrözés síkja V-t tartalmazza. Ennek a síknak 10.3.11 alapján $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ normálvektora, ezért $\mathbf{x} \doteq_{\mathcal{S}} \mathbf{y}$ pontosan akkor áll, ha $\mathbf{y} - \mathbf{x} \perp V$. A Z-beli $\doteq_{\mathcal{S}}$-osztályokat tehát a $V^{\perp}$ kétdimenziós altérrel párhuzamos W-beli affin síkok metszik ki Z-ből. Ezzel bebizonyítottuk az (1) és (2) állításokat.

Ezeknek az affin síkoknak az állása aszerint térszerű, fényszerű, illetve időszerű, hogy V időszerű, fényszerű, illetve térszerű. Ez 11.1.7-re hivatkozva azzal egyenértékű, hogy a V-re illesztett síksor metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel sugársort definiál, azaz a síkmetszetek körök, paraciklusok, illetve hiperciklusok. Ez a (3) állítást igazolja. □

Megjegyzés. A hiperboloidmodellben a ciklusokat tehát affin másodrendű görbék (illetve azok részei) reprezentálják: a köröket ellipszisek, a paraciklusokat parabolák, a hiperciklusokat félhiperbolák.

11.1.14. Állítás. *A Poincaré-féle körmodellben a ciklusok pontosan a befoglaló euklideszi sík köreinek és egyeneseinek a modellbe eső részei. Részletezve:*

- *a modell geometriája értelmében vett körök pontosan az alapkör belsejében fekvő euklideszi körök,*
- *a paraciklusok pontosan az alapkört belülről érintő euklideszi körök az érintkezési ponttól megfosztva, valamint*
- *a hiperciklusok pontosan az alapkört metsző euklideszi köröknek a modellbe eső ívei és az alapkör nyílt húrjai.*

Bizonyítás: A modellbeli tükrözéseket 10.2.6 alapján a befoglaló euklideszi sík inverziói származtatják. Tekintsük azt a C ciklust, amelyet valamely adott $\mathcal{S}$ sugársor származtat, és amely a modell valamely adott A pontján halad át. A C ciklust úgy állíthatjuk elő, hogy A inverzét tekintjük az $\mathcal{S}$-et reprezentáló $\mathcal{K}$ körsor tagjaira vonatkozóan. Ezzel pontosan a $\mathcal{K}$-ra merőleges körsor A-n áthaladó tagjának a pontjaihoz jutunk, hiszen merőlegesen metsző kör inverze saját maga. A C ciklus tehát mindig körnek vagy egyenesnek a modellbe eső része. A 11.1.6-beli esetek számba vételével pontosan az állításban fölsorolt lehetőségek adódnak. □

Megjegyzések. (1) 11.1.14 bizonyításából az is kiolvasható, hogy a Poincaré-féle körmodellben valamely rögzített sugársorhoz tartozó ciklusok rendszere szintén egy euklideszi körsornak, mégpedig a sugársort reprezentáló euklideszi

körsorra vagy sugársorra merőleges körsornak a nyoma. Például a hiperbolikus sík valamely pontja körüli koncentrikus körök rendszerét a körmodellben annak az elliptikus körsornak a modellbe eső tagjai reprezentálják, amelyet a középpont mint pontkör és az alapkör generál.

(2) Az (1) megjegyzés alapján a ciklusok számára azt az analitikus jellegű definíciót is használhatnánk, hogy a ciklusok a sugársorok ortogonális trajektóriái (azaz valamely sugársor minden tagját merőlegesen metsző görbék).

(3) Hasonló jellegű áttekintést kaphatunk a ciklusokról a félgömbmodell és a félsíkmodell esetében is, ennek részletezésétől eltekintünk. A félsíkmodellben a határegyenessel párhuzamos egyenesek is megjelennek mint paraciklusok, és ez a tény lényeges szerepet játszik majd a területszámítás képleteiben (l. 11.5.6).

(4) A projektív modellben a ciklusokat másodrendű görbék vagy azok ívei reprezentálják, speciálisan a Cayley–Klein-modellben az egyenestől különböző ciklusokat mindig ellipszisek vagy ellipszisívek. Pontos meghatározásuk legegyszerűbben a Poincaré-féle félgömbmodell merőleges vetítésével történhet.

11.2. A hiperbolikus sík egybevágóságai

A hiperbolikus tér izometriáiról bőséges információt nyertünk tetszőleges dimenzióban a modellek bevezetése során. Célunk most az, hogy a kétdimenziós esetben geometriai természetű áttekintést nyerjünk az egybevágóságokról, és osztályozzuk azokat ahhoz hasonló módon, ahogyan az euklideszi sík esetében 4.4.9-ben tettük. Ehhez már minden szükséges előismeret a birtokunkban van (részben inverzív geometriai, részben projektív geometriai tanulmányainkból), most csupán felidézni és alkalmazni kell ezeket.

A hiperbolikus sík izometriáinak analitikus tárgyalásához 2×2-es mátrixokat lehet használni. Tudjuk, hogy a $\partial\mathbf{H}^2$ ideális határt a valós projektív egyenessel, az $I(\mathbf{H}^2)$ izometriacsoportot a $PGL(2, \mathbf{R})$ projektív csoporttal tekinthetjük azonosnak. Érdemes az U komplex felső félsíkkal koordinátázott Poincaré-féle félsíkmodellt használnunk, amelyen 10.2.16 szerint a $PGL(2, \mathbf{R})$ csoport a mátrixok által indukált törtlineáris, illetve tört-szemilineáris függvények útján hat. Az izometriák irányítástartó, illetve -váltó voltát 8.7.3.(4) alapján a transzformációt reprezentáló 2×2-es mátrix determinánsának előjele dönti el.

11.2.1. Emlékeztető. Két konkrét izometriatípust már bevezettünk 10.1.5-ben, 10.2.6-ban és 10.3.11-ban, illetve 10.1.11-ben:

- Tengelyes tükrözések: a projektív modellben harmonikus involúciók, a konform modellekben inverziók, a hiperboloidmodellben q-ortogonális szimmetriák segítségével definiáltuk őket. Ha $L \subset \mathbf{H}^2$ egyenes, akkor σ_L jelöli az L-re vonatkozó tengelyes tükrözést.
- Eltolások: a síkban olyan izometriák, amelyek egy egyenesre merőleges két másik egyenesre vonatkozó egy-egy tengelyes tükrözés szorzataként állnak elő. Vegyük észre, hogy a két tükörtengely ilyenkor ultraparallel, és az általuk meghatározott ultraparallel sugársort a szóban forgó eltolás önmagára képezi. Ezért ezt a sugársort az eltolás invariáns sugársorának nevezzük. Az eltolás önmagában tolja el az invariáns sugársor tagjaira merőleges egyenest, amelyet az eltolás tengelyének nevezünk. A tengellyel együtt az eltolás az invariáns sugársor által előállított hiperciklusokat is önmagukban mozgatja.

A sík mozgásainak két további típusát is kaphatjuk két tükrözés szorzataként.

11.2.2. Definíció (Forgatás). A hiperbolikus síkon forgatásnak nevezzük azokat az izometriákat, amelyek két metsző egyenesre vonatkozó egy-egy tükrözés szorzataként állnak elő. Ha a két tengely különböző (azaz a forgatás nem identikus), akkor a forgatás középpontjának nevezzük a tengelyek metszéspontját; ilyenkor a forgatásnak ez az egyetlen fixpontja.

Bármely forgatás a középpontja mint tartópont által meghatározott metsző sugársort önmagába képezi. Szintén önmagukban mozgatja a forgatási középpont körüli köröket (összhangban azzal, hogy ezek a körök az invariáns sugársorhoz tartozó ciklusok).

A hiperbolikus sík izometriacsoportjában a pontok stabilizátorai 10.1.9 szerint az $O(2)$ ortogonális csoporttal izomorfak. A forgatások pontosan az $SO(2)$ részcsoportokhoz tartozó transzformációk.

11.2.3. Definíció (Paraciklikus eltolás). Paraciklikus eltolásnak nevezzük a hiperbolikus síknak azokat az izometriáit, amelyek párhuzamos egyenesekre vonatkozó két tükrözés szorzataként állnak elő. Ha a két egyenes különböző, tehát a transzformáció nem identikus, akkor nincs fixpontja, hiszen egy A pont csak úgy lehetne fix, ha mindkét tükrözés ugyanabba a B képpontba vinné, a két egyenes diszjunkt volta miatt $A \neq B$, viszont ekkor mindkét egyenesnek az A és B szakaszfelező merőlegesével kellene megegyeznie.

Ha a paraciklikus eltolás nem identikus, akkor a két egyenes által meghatározott párhuzamos sugársor invariáns. Emiatt a transzformáció önmagukban mozgatja azokat a paraciklusokat, amelyeket ez a sugársor állít elő. Ebből a tulajdonságából ered a transzformációtípus elnevezése.

Idézzük föl, hogy az egyenes valamely nem-identikus projektív transzformációját aszerint nevezzük elliptikusnak, parabolikusnak, illetve hiperbolikusnak,

hogy 0, 1, vagy 2 fixpontja van (l. 8.7.6–8.7.9). Ez a kategorizálás alkalmas a hiperbolikus sík mozgásainak az osztályozására is.

11.2.4. Tétel. *A hiperbolikus sík bármely nem-identikus mozgása vagy forgatás, vagy eltolás, vagy paraciklikus eltolás, mégpedig aszerint, hogy a sík ideális határán általa indukált projektív transzformáció elliptikus, hiperbolikus, illetve parabolikus.*

Bizonyítás: A hiperbolikus sík bármely izometriája 10.1.10.(1) szerint előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként. Ha mozgásról van szó, ebben a szorzatban csak páros számú tényező szerepelhet. Ezért bármely mozgás legfeljebb két (és így pontosan két) tükrözés szorzata, tehát a 11.2.1–3-beli példák valamelyike: eltolás, forgatás, vagy paraciklikus eltolás. Az ideális határon a fixpontok számát az adja meg, hogy az invariáns sugársor tartópontja a modellhez, az ideális határhoz, vagy a külsejéhez tartozik: forgatás esetében 0, paraciklikus eltolás esetében 1, eltolás esetében 2. □

11.2.5. Példák. Idézzük fel újra a már 8.7.9-ben és 10.2.16-ban tárgyalt

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad C(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

mátrixokat, illetve az általuk létesített izometriákat. A t valós paramétertől való függést tekintetbe véve ezek egyparaméteres mozgáscsoportok (azaz folytonos $\mathbf{R} \to I^+(\mathbf{H}^2)$ homomorfizmusok) a hiperbolikus síkon: $A(t)$ az $i \in U$ pont körüli forgatásokból, $B(t)$ a $0 \in \partial U$ végtelen távoli pontot fixen hagyó paraciklikus eltolásokból, $C(t)$ pedig a -1 és $1 \in \partial U$ végtelen távoli pontokat összekötő egyenes mentén történő eltolásokból áll.

Miután a koordinátázás alkalmas elmozgatásával bármely pont átvihető az i pontba, bármely végtelen távoli pont átvihető 0-ba, illetve bármely végtelen távoli pontpár átvihető a $\{-1,1\}$ párba, a hiperbolikus sík bármely mozgása az $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ transzformációk valamelyikével konjugált. Ebből következően bármely mozgás belefoglalható egy alkalmas egyparaméteres mozgáscsoportba. Alább (l. 11.2.7) belátjuk, hogy a hiperbolikus síkon lényegében csak ez a három fajta egyparaméteres mozgáscsoport létezik.

11.2.6. Lemma. *Tekintsük az $I^+(\mathbf{H}^2)$ mozgáscsoport hatását a hiperbolikus sík $\overline{\mathbf{H}^2}$ lezárásán.*

(1) *Ennél a csoporthatásnál bármely $\mathbf{H}^2$-beli pont stabilizátora az $\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$ körvonalcsoporttal topologikusan izomorf.*

(2) *Ha $L \subset \mathbf{H}^2$ egyenes, akkor az L-et önmagára képező eltolások alkotta részcsoport az $\mathbf{R}$ csoporttal topologikusan izomorf.*

(3) *Ha $P \in \partial\mathbf{H}^2$ tetszőleges végtelen távoli pont, akkor a kizárólag P-t fixen tartó mozgások az identitással együtt részcsoportot alkotnak I^+ $+(\mathbf{H}^2)$-ben, amely szintén $\mathbf{R}$-rel topologikusan izomorf.*

Bizonyítás: (1): A $\mathbf{H}^2$-beli pontok stabilizátora az $SO(2) \cong \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$ forgatáscsoport, ahol a valós paraméter a forgásszög.

(2): A sík nemtriviális eltolásai között csak az L tengelyű eltolások képezik L-et önmagára, hiszen a két végtelen távoli fixpont és az invariáns egyenes kölcsönösen meghatározzák egymást. Az L mentén történő eltolások csoportja és $\mathbf{R}$ között a folytonos izomorfizmust az egyenes mentén mért előjeles eltolási távolság adja.

(3): Ha $P \in \partial\mathbf{H}^2$, akkor az 5.3.6. Állítás szerint P stabilizátora az $I(\mathbf{H}^2) \cong \mathcal{M}^1$ Möbius-csoportban a $\partial\mathbf{H}^2 - \{P\}$ egyenes hasonlósági csoportja. Az egyenes hasonlóságai közül kizárólag az eltolásoknak nincs fixpontja, tehát a szóban forgó mozgások halmaza ennek az egyenesnek az eltolásaiból áll, és így valóban $\mathbf{R}$-rel izomorf részcsoport. □

11.2.7. Tétel. *A hiperbolikus síkon bármely nemtriviális egyparaméteres mozgáscsoport konjugáltság és átparaméterezés erejéig a 11.2.5-beli három példa valamelyike.*

Bizonyítás: A fő tisztázandó kérdés az, hogy egy egyparaméteres részcsoportban miért nem keveredhetnek a különböző típusú egybevágóságok. Ehhez a fixpontok vizsgálata ad támpontot az alábbi, általános csoporthatások körében érvényes egyszerű, de mégis hatékony lemma segítségével:

Ha az $f, g : X \to X$ bijekciók felcserélhetők, akkor f fixpontjainak a halmaza g-invariáns.

Valóban, ha $x \in X$ az f fixpontja, akkor $g(x) = g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ miatt $g(x)$ is fixpontja f-nek.

Egy egyparaméteres mozgáscsoport csupa felcserélhető transzformációból áll. Ezért a lemmát alkalmazhatjuk a $\overline{\mathbf{H}^2}$ lezáráson keletkező fixpontokra. Ha egy adott egyparaméteres mozgáscsoport $G \leq I^+(\mathbf{H}^2)$ képéhez legalább egy nemtriviális forgatás hozzátartozik, akkor G csupa forgatásból áll ugyanezen középpont körül. Hasonlóképpen, ha egy nemtriviális paraciklikus eltolás hozzátartozik G-hez, akkor az összes G-beli transzformáció paraciklikus eltolás, amelynek ugyanaz a végtelen távoli pont a fixpontja. Végül ha G valamely $f \neq id_{\mathbf{H}^2}$ elemének két végtelen távoli fixpontja van, P és Q, azaz f nemtriviális eltolás a P-t és Q-t összekötő $L \subset \mathbf{H}^2$ egyenes mentén, akkor G bármely $g \neq id_{\mathbf{H}^2}$ elemének ugyancsak P és Q a fixpontjai, tehát g is önmagában mozgatja az L egyenest. Miután g-nek $\mathbf{H}^2$-ben nem lehet fixpontja, g csak eltolás lehet L mentén.

A G részcsoport tehát hozzátartozik a 11.2.6 Lemmában tárgyalt háromféle részcsoport valamelyikéhez. Miután az $\mathbf{R}$ csoportnak akár a körvonalcso-

portba, akár saját magába képező folytonos homomorfizmusai csak lineárisak lehetnek, a tétel állítása ebből már következik. □

11.2.8. Következmények

(1) *A hiperbolikus sík bármely egyparaméteres mozgáscsoportjához egyértelműen található invariáns sugársor.*

(2) *A ciklusok pontosan az egyparaméteres mozgáscsoportok orbitjai a hiperbolikus síkon.* □

Rátérünk a hiperbolikus sík irányításváltó egybevágóságaira. A már korábban definiált tengelyes tükrözéseken kívül az euklideszi síkgeometria mintájára csúsztatva tükrözéseket is értelmezhetünk.

11.2.9. Definíció (Csúsztatva tükrözés). A hiperbolikus síkon csúsztatva tükrözésnek nevezzük azokat az izometriákat, amelyek előállnak egy tengelyes tükrözésnek és egy a tengely mentén történő nem-identikus eltolásnak a kompozíciójaként.

Könnyen látható, hogy a két komponálandó transzformáció felcserélhető. A tengely végtelen távoli pontjait a csúsztatva tükrözés fixen tartja, ezért ez a transzformáció a tengelyt, és ezen keresztül a tükrözésre és eltolásra való felbontását is egyértelműen meghatározza.

11.2.10. Tétel. *A hiperbolikus sík bármely izometriája forgatás, eltolás, paraciklikus eltolás, tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés.*

Bizonyítás: Az irányítástartó esetet a 11.2.4. Tételben tárgyaltuk. Ha $f \in \in I(\mathbf{H}^2)$ irányításváltó, akkor a $\partial\mathbf{H}^2$ projektív egyenesen f által indukált transzformáció mátrixának negatív a determinánsa, ezért 8.7.8 szerint két végtelen távoli fixpontja van. Legyen L az ezeket összekötő egyenes $\mathbf{H}^2$-ben, és komponáljuk f-et a σ_L tükrözéssel. Ha $\sigma_L \circ f$ identikus, akkor $f = \sigma_L$ tükrözés. Ha nem, akkor a $\sigma_L \circ f$ transzformáció irányítástartó és ugyanaz a két végtelen távoli fixpontja van, mint f-nek, tehát csak eltolás lehet L mentén. Ezért f előáll ennek az eltolásnak és σ_L-nek a kompozíciójaként, azaz csúsztatva tükrözés. □

A következő tételt a 4.5.6. Tétel hiperbolikus geometriára vonatkozó megfelelőjének tekinthetjük. Érdekes módon a bizonyításához is hasonló szerkezetű okoskodás vezet.

11.2.11. Tétel. *Az $I^+(\mathbf{H}^2)$ csoport egyszerű.*

Bizonyítás: Akárcsak 4.5.6 esetében, a bizonyításában kulcsszerepet játszanak a szóban forgó csoport bizonyos elemei, mégpedig most a paraciklikus eltolások. Előrebocsátunk két észrevételt a paraciklikus eltolásokkal kapcsolatban.

1. A paraciklikus eltolások generátorrendszert alkotnak $I^+(\mathbf{H}^2)$-ben. Bármely síkmozgás ugyanis 11.2.4 alapján felírható $\sigma_M\sigma_L$ szorzatként, ahol L és M egyenesek. Válasszunk egy-egy végtelen távoli pontot L-ről, illetve M-ről úgy, hogy azok egymástól különbözzenek. Jelölje N azt az egyenest, amely e két végtelen távoli pontot köti össze, ekkor N párhuzamos L-lel is és M-mel is. Ekkor $\sigma_M\sigma_L = (\sigma_M\sigma_N)(\sigma_N\sigma_M)$ az adott síkmozgás felírása két paraciklikus eltolás szorzataként.

2. Bármely két nem-identikus paraciklikus eltolás konjugált az $I^+(\mathbf{H}^2)$ csoportban. Ez a 8.7.7-beli második példában tett észrevételből következik. Ha a $P \in \partial\mathbf{H}^2$ végtelen távoli pont egy ilyen transzformációnak a fixpontja, akkor a $\partial\mathbf{H}^2 - \{P\}$ affin egyenesen a koordinátázást lehet úgy választani, hogy a transzformációt az $x \mapsto x + 1$ képlet adja meg. Ezért az U komplex félsíkmodellben bármely nem-identikus paraciklikus eltolás a $z \mapsto z + 1$ képlettel adott törtlineáris leképezéssel konjugált.

Rátérünk $I^+(\mathbf{H}^2)$ egyszerű voltának igazolására. Legyen adott egy $G \trianglelefteq I^+$ $+(\mathbf{H}^2)$ normálosztó. Tegyük föl, hogy $G \neq 1$, azt kell belátnunk, hogy $G =$ $= I^+(\mathbf{H}^2)$. Ehhez elég egyetlen nem-identikus paraciklikus eltolást találni G-ben, mert akkor a második észrevétel miatt az összes paraciklikus eltolás G-ben van, és így az első észrevétel miatt $G = I^+(\mathbf{H}^2)$.

Válasszunk egy $f \in G$ nemtriviális elemet. Ha f paraciklikus eltolás, akkor nincs mit bizonyítani.

Ha f eltolás, akkor legyen az L egyenes az f tengelye. Válasszunk olyan $M \subset$ $\subset \mathbf{H}^2$ egyenest, amelyre az $f(M)$ egyenes párhuzamos M-mel és különbözik tőle. (Ilyen M-et kapunk például úgy, hogy egy L-hez nem tartozó végtelen távoli pontot összekötünk az f-nél származó képével.) Legyen $g = \sigma_M\sigma_L$, és képezzük a $h = gfg^{-1}f^{-1}$ szorzatot. Ekkor G normálosztó volta miatt $gfg^{-1} \in G$, ezért $h \in G$. Továbbá $f(L) = L$ felhasználásával a

$$\begin{aligned} h = gfg^{-1}f^{-1} &= \sigma_M\sigma_L f\sigma_L\sigma_M f^{-1} = \\ &= \sigma_M\sigma_L(f\sigma_L f^{-1})(f\sigma_M f^{-1}) = \\ &= \sigma_M\sigma_L\sigma_{f(L)}\sigma_{f(M)} = \\ &= \sigma_M\sigma_{f(M)} \end{aligned}$$

számolás mutatja, hogy h az identitástól különböző paraciklikus eltolás.

Ha végül f forgatás, akkor egy $f = \sigma_M \sigma_L$ szorzatelőállításban L és M egymást metsző egyenesek. Legyen g tetszőleges nemtriviális eltolás az L egyenes mentén, ekkor M és $g(M)$ ultraparallel egyenesek, mert g az M egyenes mindkét végtelen távoli pontját elmozdítja az ideális határnak ugyanazon ívére. A most $h = fgf^{-1}g^{-1}$ formulával adott transzformáció az előbbihez hasonló indokok miatt G-hez tartozik. A fenti számolást f és g szerepcseréjével végrehajtva azt kapjuk, hogy $h = \sigma_M \sigma_{g(M)}$ nemtriviális eltolás. Ezzel a bizonyítást visszavezettük az előző esetre. □

Megjegyzések. (1) A háromféle klasszikus kétdimenziós geometria (euklideszi, gömbi, illetve hiperbolikus sík) mozgáscsoportja tehát egyszerű csoport a gömbi és a hiperbolikus esetben (4.5.6, illetve 11.2.11), nem az viszont az euklideszi esetben, hiszen ott az eltolások valódi normálosztót alkotnak (4.2.12).

(2) A 11.2.11. Tétel bizonyításához hasonló módszerrel minden $d \geq 2$-re bebizonyítható, hogy $I^+(\mathbf{H}^d)$ egyszerű csoport.

(3) Algebrai formában a 11.2.11. Tétel azt állítja, hogy $PSL(2, \mathbf{R})$ egyszerű. Ismeretes tetszőleges $\mathbf{F}$ test és $n \geq 2$ esetén, hogy a $PSL(n, \mathbf{F})$ csoportok általában egyszerűek, ez alól kivétel csupán az $n = 2$ esetben van, amikor $\mathbf{F}$ a kételemű vagy a háromelemű test. (A csoport ezekben az esetekben S_3, illetve A_4.)

11.3. Trigonometriai tételek

A hiperbolikus geometriának az euklideszitől való lényegi eltérésérét a trigonometriai képletekben mutatkozó gyökeres különbségek is érzékeltetik. Érdekes módon ezek a képletek nagyobb hasonlóságot mutatnak a gömbi geometria formuláival, mint az euklideszi síkra vonatkozókkal. Ennek a hátterében olyan fajta rokonság húzódik meg a gömbi és a hiperbolikus geometria között, amelyre a hiperboloidmodell használatával tudunk rávilágítani a képletek tisztázását követő megjegyzésekben.

Először a hiperbolikus trigonometria legalapvetőbb formuláját, a koszinusztételt idézzük fel, amelyet már 10.3.21-ben bebizonyítottunk. Helyesebb ezt a tételt az oldalakra vonatkozó koszinusztételnek nevezni, ugyanis a gömbi geometriához hasonlóan használatban van a szögekre vonatkozó duális változata is, l. 11.3.3. Az alább következő tételek a természetes távolságegység használata mellett értendők, és bennük a háromszög oldalaira és szögeire a szokásos jelöléseket alkalmazzuk, tehát a háromszögben az a, b, c oldallal szemben rendre az α, β, γ szög áll.

11.3.1. Tétel (Az oldalakra vonatkozó hiperbolikus koszinusztétel)

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha \qquad \square$$

11.3.2. Tétel (Hiperbolikus szinusztétel)

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}$$

Bizonyítás: Az oldalakra vonatkozó koszinusztételből fejezzük ki $\cos\alpha$-t:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}$$

Négyzetre emelés után innen $\sin^2\alpha$-ra kapunk képletet. Ebből $\operatorname{sh}^2 a$-val osztás, majd a $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ azonosság többszöri alkalmazása után a

$$\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{sh}^2 a} = \frac{2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b \operatorname{sh}^2 c}$$

kifejezés adódik, amelynek jobb oldala invariáns az a, b, c jelek permutációira nézve. Ezért ugyanezzel a kifejezéssel egyenlő $\sin^2\beta/\operatorname{sh}^2 b$ és $\sin^2\gamma/\operatorname{sh}^2 c$ is. Innen a szinusztétel négyzetgyökvonással közvetlenül adódik. $\square$

11.3.3. Tétel (A szögekre vonatkozó hiperbolikus koszinusztétel)

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \operatorname{ch} a$$

Bizonyítás: Az előző bizonyításhoz hasonlóan ez a formula is levezethető volna a korábbiakból pusztán a formulák algebrai átalakításai útján. Ehelyett inkább közvetlen bizonyítást választunk a 10.3.21-beli gondolatmenet dualizálásával.

A $Z \subset W$ hiperboloidmodellt használjuk, ahol most W háromdimenziós Minkowski-tér. Jelölje $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in Z$ a háromszög csúcsaiba mutató vektorokat. A háromszög oldalai (azaz pontosabban az oldalegyeneseket tartó kétdimenziós időszerű alterek) számára egyértelműen tudunk befelé mutató egységnyi normálvektorokat választani. Legyenek ezek rendre $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in W$. Ezekre a vektorokra tehát $q(\mathbf{u}) = q(\mathbf{v}) = q(\mathbf{w}) = 1$, valamint

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{b}, \mathbf{c}, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle > 0, \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{c}, \mathbf{a}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle > 0, \quad \mathbf{w} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{c} \rangle > 0$$

teljesül.

Válasszunk most a háromszög $\mathbf{b}$-t és $\mathbf{c}$-t összekötő oldalszakaszához a végpontokban a másik végpont felé mutató egységnyi irányvektorokat, legyenek ezek $\mathbf{s} \in T_{\mathbf{b}}Z$ és $\mathbf{t} \in T_{\mathbf{c}}Z$. Ekkor a 10.3.17. Következmény miatt $\operatorname{ch} a = -\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle$.

A $T_{\mathbf{b}}Z$ érintősíkban az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{s}$ egységvektorok ortonormált bázist alkotnak. Miután a $\mathbf{b}$ csúcsnál a háromszög szöge β, a $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{b}}Z$ vektort az $\mathbf{u}$ vektornak $\mathbf{s}$ irányában történő $\pi-\beta$ szögű forgatása állítja elő: $\mathbf{w} = \cos(\pi-\beta)\mathbf{u}+\sin(\pi-\beta)\mathbf{s}$. Hasonló módon kapjuk a $\mathbf{c}$ csúcsnál a $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{c}}Z$ vektor $\mathbf{v} = \cos(\pi-\gamma)\mathbf{u} + \sin(\pi-\gamma)\mathbf{t}$ előállítását. Így tehát

$$\mathbf{v} = -\cos\gamma\mathbf{u} + \sin\gamma\mathbf{t} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{w} = -\cos\beta\mathbf{u} + \sin\beta\mathbf{s}\,.$$

A $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok egyúttal $T_{\mathbf{a}}Z$-beli érintővektorok, és szögük $(\pi-\alpha)$-val egyenlő. Ezért skaláris szorzatukat képezve a

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\alpha) = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle &= \cos\gamma\cos\beta\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \sin\gamma\sin\beta\langle\mathbf{t},\mathbf{s}\rangle = \\ &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma(-\operatorname{ch} a)\end{aligned}$$

képletet nyerjük, amelyből a tétel (-1)-gyel történő szorzással következik. □

11.3.4. Következmény. *A hiperbolikus geometriában a háromszög szögei egyértelműen meghatározzák az oldalai hosszát, és ezen keresztül egybevágóság erejéig magát a háromszöget.* □

Ha a 11.3.1–11.3.3-beli formulákat derékszögű háromszögre alkalmazzuk, akkor olyan képleteket nyerünk, amelyek segítségével a derékszögű háromszög öt adata (a három oldal és a két szög) közül bármelyik kettő ismeretében a többi meghatározható. Ezek közül a képletek közül négyet emelünk ki érdekességük miatt.

11.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a háromszög c oldalával szemközti szög derékszög. Ekkor:*

(1) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$;

(2) $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}$;

(3) $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$;

(4) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{ch} c = 1$.

Bizonyítás: A $\gamma = \pi/2$ helyettesítés a c oldalra felírt 11.3.1. koszinusztételből az (1) formulát, a 11.3.2. szinusztételből a (2) formulát, végül az α, illetve $\gamma = \pi/2$ szögre felírt 11.3.3. koszinusztételből a (3), illetve (4) formulát eredményezi. □

Megjegyzések. (1) A 11.3.5-beli (1) képletet a Pitagorasz-tétel hiperbolikus változatának tekinthetjük (ahogyan a gömbi trigonometriában hasonló módon kapható $\cos c = \cos a \cos b$ képlet a Pitagorasz-tétel gömbi változata). A

(2) képlet emlékeztet a hegyesszög szinuszának „(szemközti befogó)/(átfogó)” definíciójára. A (3) képlet a 11.3.7. Tétel, a (4) képlet a 11.5.11. Tétel bizonyításában játszik majd szerepet.

(2) A 10.3. szakasz végén tett megjegyzéshez hasonló módon a hiperbolikus trigonometriai formulák érvényét könnyen kiterjeszthetjük arra az esetre, amikor a távolságmérés céljára nem a természetes metrikát, hanem annak λ-szorosát használjuk. Az általános szabály nyilván az, hogy a képletekben szereplő távolságadatokat az $(1/\lambda)$-szorosukkal kell helyettesíteni. Ezzel tehát a két koszinusztétel és a szinusztétel általános alakja rendre

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\frac{a}{\lambda} &= \operatorname{ch}\frac{b}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{c}{\lambda} - \operatorname{sh}\frac{b}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{c}{\lambda}\cos\alpha\,,\\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\operatorname{ch}\frac{a}{\lambda}\,, \quad \text{illetve}\\
\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh}\frac{a}{\lambda}} &= \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh}\frac{b}{\lambda}} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh}\frac{c}{\lambda}}\,.
\end{aligned}$$

Ugyanez érvényes természetesen a derékszögű háromszög 11.3.5-beli képleteire, továbbá az alább, 11.3.7-ben tárgyalandó formulára is.

(3) Az előző megjegyzésben szereplő λ konstans érdekes geometriai vonatkozására világít rá, ha alkalmazzuk a trigonometriai és a hiperbolikus függvények közötti jól ismert $\cos x = \operatorname{ch}(ix)$, $\sin x = -i\operatorname{sh}(ix)$, illetve az ezekkel egyenértékű

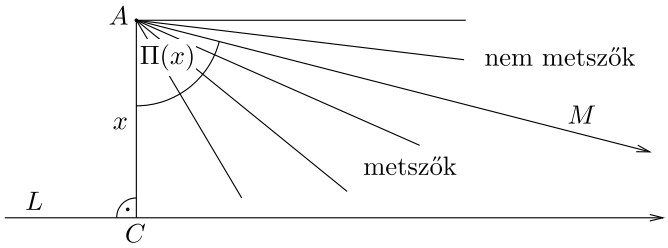
$$\cos\frac{x}{i} = \operatorname{ch} x, \qquad \sin\frac{x}{i} = -i\operatorname{sh} x$$

áttérési formulákat. Tekintsük az r sugarú gömbre felírt 10.3-beli gömbi trigonometriai képleteket, és (formálisan) végezzük el az $r = \lambda i$ helyettesítést. Az áttérési formulák használatával a gömbi képletek pontosan a fenti hiperbolikus trigonometriai képletekké alakulnak át. Ez azt az intuitív elképzelést támasztja alá, amely szerint a hiperbolikus geometria valamiféle képzetes sugarú gömbre vonatkozó gömbi geometria volna. Erre utal az is, hogy a hiperboloidmodell $q(\mathbf{x}) = -1$ egyenletét is egyfajta „$\sqrt{-1}$ sugarú gömb” egyenleteként foghatjuk fel.

Tovább erősíti ezt az analógiát, ha felidézzük, hogy az r sugarú gömb Gauss-féle görbülete $K = 1/r^2$, és emiatt a gömbi formulákban az $1/r$ szorzó $\sqrt{K}$-val egyenlő. Ez azt sugallja, hogy a hiperbolikus formulák esetében $K = 1/(\lambda i)^2 = -1/\lambda^2$, azaz negatív szám kell, hogy a görbület szerepét játssza. Speciálisan, természetes távolságegység választása esetén a hiperbolikus sík görbülete -1 kell, hogy legyen. Léteznek olyan felületek az $\mathbf{R}$ euklideszi térben, amelyek lokálisan izometrikusak a hiperbolikus síkkal (a legnevezetesebb példa ilyen felületre az ún. Beltrami-féle pszeudoszféra), és ezek Gauss-görbülete valóban -1.

A geometriai tér Riemann-féle modern felfogásában a tér görbülete pontról pontra változó (sőt kettőnél magasabb dimenzióban az irány függvényében is változó) mennyiség lehet. A Riemann-geometriában fontos szerepet játszanak az állandó görbületű terek, amelyekre (tetszőleges dimenzióban) a három klasszikus geometriai rendszer, az euklideszi, a gömbi, és a hiperbolikus geometria ad példát. Ha a dimenzió legalább 2, akkor tetszőleges K valós szám felléphet a klasszikus geometriai tér görbületeként: $K = 0$ érvényes az euklideszi geometriában, míg $K > 0$ esetén az $1/\sqrt{K}$ sugarú gömbi térnek, $K < 0$ esetén a természetes metrika $\left(1/\sqrt{-K}\right)$-szorosával (azaz a természetes távolságegység $\sqrt{-K}$-szorosával mint a távolságmérés egységével) ellátott hiperbolikus térnek a görbülete egyenlő K-val.

11.3.6. Definíció (Párhuzamossági szög). Legyen x adott pozitív szám. Vegyünk fel egy L egyenest és tőle x távolságra egy A pontot a hiperbolikus síkon. Bocsássunk merőlegest A-ból L-re, a talppontja legyen C. Vegyünk föl egy A kezdőpontú M félegyenest, amely párhuzamos L-lel annak valamelyik irányában. Az AC és M félegyenesek által bezárt szög nagysága csak x-től függ, hiszen egyrészt az L-ből és A-ból álló konfigurációt az x távolság egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza, másrészt ez a konfiguráció tengelyesen szimmetrikus az AC egyenesre, és ezért mindegy, hogy L-en melyik irányt választjuk. Ezt a szöget $\Pi(x)$-szel jelöljük, és az x-hez tartozó párhuzamossági szögnek nevezzük.



A párhuzamossági szög jelentését a következő szemléletes eljárás világítja meg. Egy A kezdőpontú félegyenest forgassunk A körül úgy, hogy az AC-vel bezárt α szöge 0 és $\pi/2$ között változzon. Amíg $\alpha < \Pi(x)$, a félegyenes metszi az L egyenest, majd $\alpha \geq \Pi(x)$ esetén már diszjunkt tőle. A $\Pi(x)$-hez tartozó félegyenes tehát elválasztja a nem metszőket a metszőktől (miközben ő maga nem metsző).

11.3.7. Tétel

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Bizonyítás: Használjuk a 11.3.6-beli jelöléseket. Legyen U az L egyenes és az M félegyenes közös végtelen távoli pontja. Ha B tetszőleges pont az L egyenesen C és U között, akkor az ABC derékszögű háromszögben (ahol $b = x$) a β szögre vonatkozóan felírhatjuk a 11.3.5.(3)-beli

$$\cos\beta = \operatorname{ch} x \, \sin\alpha$$

formulát. Ha a B pont C-től távolodva minden határon túl U-hoz tart, akkor nyilvánvalóan $\alpha \to \Pi(x)$. Másrészt egy konform modellt választva az L és M párhuzamossága az őket reprezentáló körívek érintkezését jelenti az U pontban, ezért a modell szögtartó volta miatt $\beta \to 0$. A formula határértékét képezve $1 = \operatorname{ch} x \, \sin\Pi(x)$ adódik. □

Megjegyzések. (1) A trigonometrikus és hiperbolikus függvények szokásos azonosságait fölhasználva a tételbeli képletet az egyenértékű $\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{sh} x$ alakban is írhatjuk.

(2) Már a párhuzamossági szög definíciója alapján intuitíve világos, hogy nagyobb távolsághoz kisebb párhuzamossági szög kell, hogy tartozzon. A tétel ezt megerősíti: rögtön következik belőle, hogy a Π függény bijektíven és szigorúan monoton fogyó módon képezi a pozitív számok halmazát a $(0, \pi/2)$ intervallumra.

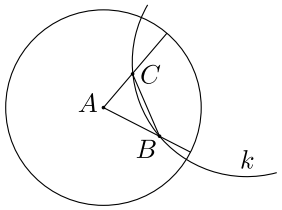
(3) A $\Pi : (0, +\infty) \to (0, \pi/2)$ függvény szürjektív volta azt jelenti, hogy a hiperbolikus geometriában egy egyenestől kellő mértékben eltávolodva elérhető, hogy a teljes egyenes tetszőlegesen kis látószögben látsszon. Ez a látószög 11.3.7 miatt a távolság függvényében lényegében exponenciális ütemben csökken. Például az egyenestől (természetes távolságegységben mérve) egységnyi távolságból a látószög körülbelül 80 fok, öt egységnyi távolból már kisebb, mint 1,5 fok, míg ha tíz egységnyire távolodunk el, akkor onnan az egyenes csak nagyjából 0,01 fokos látószög alatt látszik.

11.3.8. Definíció (Párhuzamossági távolság). A Π függvény inverze hegyesszögekhez a hozzájuk tartozó párhuzamossági távolságot rendeli. Ez tehát az a távolság, amelyet a szög egyik szárára fölmérve az ott állított merőleges egyenes párhuzamos a másik szögszárral. Az α-hoz tartozó párhuzamossági távolságot $\Delta(\alpha)$-val jelöljük, tehát $\Delta(\alpha) = \operatorname{ch}^{-1}(1/\sin\alpha)$.

A következő tétel – bár szigorú értelemben véve nem tartozik a trigonometria tárgykörébe – talán a legalapvetőbb információ a hiperbolikus háromszögek szögeiről.

11.3.9. Tétel. *A hiperbolikus síkon bármely háromszög szögeinek az összege kisebb π-nél.*

Bizonyítás: Helyezzük el az ABC háromszöget a Poincaré-féle körmodellben úgy, hogy az A csúcs a határkör középpontjába kerüljön. Hasonlítsuk össze a modellbeli ABC háromszög α, β, γ szögeit a modellt magában foglaló euklideszi sík ABC háromszögének α', β', γ' szögeivel.



Az AB és AC oldalszakaszok a modellben is egyenes szakaszok (melyek a határkör egy-egy sugárszakaszán fekszenek), ezért $\alpha' = \alpha$. A BC oldal egy a határkörre merőleges k euklideszi kör íve. Az euklideszi síkon az A pont hatványa k-ra nézve 5.1.17 alapján pozitív szám, ezért A a k kör külső pontja. Emiatt $\beta' > \beta$ és $\gamma' > \gamma$. Tehát $\alpha + \beta + \gamma < \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$. □

Megjegyzések. (1) A háromszögek szögösszege a geometria axiomatikus megalapozása során is döntő szerepet játszik. A 0.1. szakaszban vázolt axiómarendszerben dolgozva a párhuzamossági axióma felhasználása nélkül is (tehát már az úgynevezett abszolút geometria keretei között) bebizonyítható egyrészt, hogy bármely háromszögben a szögek összege legfeljebb π lehet, másrészt az is, hogy ha akár csak egyetlen háromszögben a szögösszeg π-vel egyenlő, akkor ugyanez bármely háromszögre vonatkozóan érvényes. Ezek Legendre nevezetes szögtételei. A párhuzamossági axióma azzal a feltevéssel egyenértékű, hogy legalább egy háromszög szögösszege π.

(2) A tételből az is következik, hogy bármely n-oldalú egyszerű (azaz egyetlen, önmagát nem metsző zárt töröttvonallal határolt) sokszögben a szögek összege kisebb $(n-2)\pi$-nél (azaz az euklideszi geometriában érvényes szögösszegnél). Ehhez csak azt kell meggondolni, hogy bármely egyszerű sokszöget alkalmasan választott átlókkal háromszögekre lehet vágni, és a háromszögek száma ilyen szétvágásnál mindig a sokszög oldalszámánál 2-vel kisebb.

11.4. Ciklusok ívhossza

A hiperbolikus síkban fekvő, egyenestől különböző görbék ívhosszát a hiperboloidmodell apparátusával lehet a leghatékonyabban kezelni, ezért az ívhossz definícióját is a hiperboloidmodellben adjuk meg. A hiperbolikus sík ciklusaival kapcsolatos ívhosszformulák a trigonometriai képletekhez hasonló módon rokonságot mutatnak a gömbi geometria megfelelő képleteivel.

11.4.1. Definíció (Térszerű görbe). Legyen W tetszőleges dimenziójú Minkowski-tér. Egy $\mathbf{r} : I \to W$ differenciálható paraméteres görbét (ahol $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallum) térszerű görbének nevezünk, ha minden $t \in I$ paraméterértékre az $\mathbf{r}'(t)$ deriváltvektor térszerű.

A $Z \subset W$ hiperboloidmodellben futó differenciálható görbék például mindig térszerűek, hiszen az $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle = -1$ konstans függvény t szerinti deriválásával azonnal adódik, hogy $\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle = 0$, azaz $\mathbf{r}'(t) \in T_{\mathbf{r}(t)}Z$.

11.4.2. Definíció (Térszerű görbe ívhossza). Ha $\mathbf{r} : I \to W$ folytonosan differenciálható térszerű görbe és $a, b \in I$, $a < b$, akkor az $\mathbf{r}$ görbe a és b paraméterértékek közti ívhosszán az

$$\int_a^b \sqrt{q\big(\mathbf{r}'(t)\big)}\ \mathrm{d}t$$

számot értjük. A helyettesítéses integrálás elvéből azonnal következik, hogy az ívhossz értéke változatlan marad a görbe tetszőleges szigorúan monoton, folytonosan differenciálható átparaméterezése esetén.

Ha például a hiperbolikus tér egy egyenesét 10.3.15 szerint az $\mathbf{r}(t) = \operatorname{ch} t\ \mathbf{x} + \operatorname{sh} t\ \mathbf{u}$ képlet segítségével paraméterezzük, akkor – ahogyan azt természetesen elvárjuk – bármely két pontja között az ívhossz a két pont távolságával egyenlő, hiszen az ívhosszformulában az integrandus a konstans 1 függvény (l. a 10.3.16. Állítást és az azt követő megjegyzést).

Megjegyzés. Az euklideszi térbeli ívhosszfogalom szokásos bevezetéséhez hasonlóan a Minkowski-tér térszerű görbéi esetében is természetes út kínálkozik a rektifikálhatóság és az ívhossz értelmezése számára a minden határon túl finomodó töröttvonalakkal történő közelítés módszerével. Az eljárás technikai részleteit (amelyek az euklideszi térben alkalmazottaktól kis mértékben eltérnek a háromszög-egyenlőtlenség hiánya miatt) itt nem részletezzük. Ha a térszerű görbét folytonosan differenciálható paraméterezés adja meg, akkor – az euklideszi esettel megegyező módon – a közelítő töröttvonalak hossza a 11.4.2-beli integrál értékéhez konvergál.

A soron következő tételek bizonyításában a hiperbolikus sík hiperboloidmodelljét használjuk. A számolásokat a $W = \mathbf{R}^{2,1}$ standard Minkowski-térben végezzük el, amelyben a modell Z alaphalmazát az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ egyenlet és az $x_3 > 0$ egyenlőtlenség definiálja.

11.4.3. Tétel

(1) *Az r sugarú kör kerülete $2\pi \operatorname{sh} r$, valamint az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív hossza $\alpha \operatorname{sh} r$.*

(2) *Az r sugarú körben x hosszúságú húrhoz* $2\operatorname{sh} r\,\sin^{-1}\dfrac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{sh} r}$ *ívhosszú (rövidebb) ív tartozik.*

Bizonyítás: (1): Legyen $O = (0,0,1)$, ekkor az O középpontú köröket $x_3 = \text{konstans}$ egyenletű síkok metszik ki a modellből. Miután az $(\operatorname{sh} r, 0, \operatorname{ch} r) \in Z$ pont modellbeli távolsága az O ponttól r-rel egyenlő, az O körüli r rugarú kört az $x_3 = \operatorname{ch} r$ egyenlet adja meg. Ezt a kört egyszer futja körül az

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sh} r \cos t\,,\ \operatorname{sh} r \sin t\,,\ \operatorname{ch} r\,) \quad (0 \le t \le 2\pi\,)$$

képlettel adott paraméterezés. Itt $\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sh} r\,\sin t, \operatorname{sh} r\,\cos t, 0)$, ahonnan $q\big(\mathbf{r}'(t)\big) = \operatorname{sh}^2(r)$ következik. Ezért a kör kerülete $\int_0^{2\pi} \operatorname{sh} r\,\mathrm{d}t = 2\pi \operatorname{sh} r$. A kör forgásszimmetriája miatt a kör egy ívének hossza a hozzá tartozó középponti szöggel arányos. Innen az ívhosszra vonatkozó állítás nyilvánvalóan következik.

(2): Az ívhez tartozó α középponti szög meghatározható 11.3.5.(2) segítségével abból a derékszögÅt' háromszögből, amelynek átfogója r, és $\alpha/2$ szögével szemben $x/2$ befogó áll: $\alpha = 2\sin^{-1}\big(\operatorname{sh}(x/2)\,/\operatorname{sh} r\big)$. Innen a formula (1)-ből adódik. □

Megjegyzés. A kör kerülete tehát a sugár növelésével exponenciális ütemben növekedik. Ez arra utal, hogy a hiperbolikus sík az euklideszinél jóval gyorsabban tágul, benne nagy méretekben „sokkal több a hely", mint az euklideszi síkon. Ezt a jelenséget az is érzékelteti, hogy amikor a síkot egy pontja körül forgatjuk, akkor a sík pontjai 11.4.3.(1) alapján a szögelfordulással arányos hosszúságú utat söpörnek, de ez az arányossági tényező exponenciális nagyságrendben függ a pont távolságától.

11.4.4. Definíció ($\bigcirc r$). Az r sugarú kör kerületére bevezetjük a Bolyaitól származó $\bigcirc r$ jelölést, mégpedig egységesen mindhárom klasszikus geometriára vonatkozóan. A hiperbolikus geometriában tehát $\bigcirc r = 2\pi \operatorname{sh} r$, az euklidesziben $\bigcirc r = 2\pi r$, a gömbi geometriában pedig (ahol a kör sugarát a belső geometria értelmében, a gömbfelületen mérjük az $r < \pi$ korlátozás mellett) $\bigcirc r = 2\pi \sin r$.

11.4.5. Következmény (Bolyai-féle abszolút szinusztétel). *Akár az euklideszi, akár a gömbi, akár a hiperbolikus geometriában bármely háromszög oldalaira és szögeire érvényes a*

$$\frac{\sin\alpha}{\bigcirc a} = \frac{\sin\beta}{\bigcirc b} = \frac{\sin\gamma}{\bigcirc c}$$

összefüggés. □

11.4.6. Tétel

(1) *Legyen egy r sugarú hiperciklus valamely ívének a hiperciklus alapegyenesére eső merőleges vetülete a hosszúságú. Ekkor a hiperciklusív hossza* $a \operatorname{ch} r$.

(2) *Az r sugarú hipercikluson x hosszúságú húrhoz* $2 \operatorname{ch} r \operatorname{sh}^{-1} \dfrac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{ch} r}$ *hosszúságú ív tartozik.*

Bizonyítás: (1): Tekintsük a hiperboloidmodellben azt az L egyenest, amelyet az $x_2 = 0$ egyenletű $\mathbf{R}^{2,1}$-beli időszerű sík állít elő. Az L alapegyenesű hiperciklusokat a 11.1.13. Állítás alapján az $x_2 =$konstans egyenletű síkok metszik ki Z-ből. Ha ennek a konstansnak az értéke $\operatorname{sh} r$ (ahol $r \in \mathbf{R}$ tetszőleges), akkor az ezzel megadott hiperciklus áthalad a $(0, \operatorname{sh} r, \operatorname{ch} r)$ ponton, amely a modellben $|r|$ távolságra van az L egyenestől. Az $x_2 = \operatorname{sh} r$ egyenlet tehát $|r|$ sugarú hiperciklust származtat.

Rögzítsük r értékét, és ezáltal az L alapegyenesű hiperciklusok egyikét. Az L egyenesre történő merőleges vetítés a hiperciklus pontjait az őt származtató, L-re merőleges ultraparallel sugársor tagjai mentén mozdítja el. Ezt a sugársort az $\mathbf{R}^{2,1}$-beli x_2-tengellyel mint tartóegyenessel megadott síksor metszi ki Z-ből. Ennek a síksornak az L egyenes egy tetszőleges $(\operatorname{sh} t, 0, \operatorname{ch} t)$ koordinátájú pontját tartalmazó tagját a

$$\operatorname{ch} t\, x_1 - \operatorname{sh} t\, x_3 = 0$$

egyenlet adja meg. Ezt a síkot az $x_2 = \operatorname{sh} r$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ egyenletrendszerrel adott hiperciklus az $(\operatorname{ch} r \operatorname{sh} t, \operatorname{sh} r, \operatorname{ch} r \operatorname{ch} t)$ pontban döfi. Ezért az

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} r \operatorname{sh} t\,,\ \operatorname{sh} r\,,\ \operatorname{ch} r \operatorname{ch} t\,) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

képlet a szóban forgó hiperciklust úgy paraméterezi, hogy minden t-re az $\mathbf{r}(t)$ pontnak az L-re eső merőleges vetülete $(\operatorname{sh} t, 0, \operatorname{ch} t)$. Ha t egy a hosszúságú intervallumot, például a $[0, a] \subset \mathbf{R}$ szakaszt futja be, akkor a vetületi pontok az L egyenesen egymástól szintén a hosszúságú szakaszon, konkrétan $t \in [0, a]$ esetén az egymástól a távolságra fekvő $O = (0,0,1)$ és $A = (\operatorname{sh} a, 0, \operatorname{ch} a)$ pontok közti $[O, A]$ szakaszon futnak végig. Rögtön látható, hogy $q\big(\mathbf{r}'(t)\big) = \operatorname{ch}^2 r$, és így a kérdéses hiperciklusív hossza valóban $\int_0^a \operatorname{ch} r \,\mathrm{d}t = a \operatorname{ch} r$.

(2): Először meghatározzuk az a vetülethosszt x és r függvényében. Legyen a húr egyik végpontja P, felezĂľpontja F, ezek vetülete az alapegyenesen P', illetve F'. Jelöljük a $P'F'P$ szöget ξ-vel, és az $F'P$ távolságot d-vel. Az $F'PP'$, illetve $F'PF$ derékszögű háromszögekből 11.3.5.(2) alkalmazásával

$$\sin \xi = \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{sh} d}\,, \quad \text{illetve} \quad \cos \xi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \frac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{sh} d}$$

adódik. Négyzetre emelve és összeadva, majd az $F'PP'$ háromszögben a 11.3.5.(1) szerinti $\operatorname{ch} d = \operatorname{ch}(a/2)\operatorname{ch} r$ formulát alkalmazva, közben az $\operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2 - 1$ azonosságot többször használva az $\operatorname{sh}(a/2)\operatorname{ch} r = \operatorname{sh}(x/2)$ képlethez jutunk. Ebből a-t kifejezve és az (1)-beli ívhosszformulába helyettesítve megkapjuk az eredményt. □

Megjegyzések. (1) Az r sugár függvényében a hiperciklusív hossza is exponenciális ütemben növekszik. Itt is elmondhatjuk ennek a jelenségnek azt a „dinamikai" interpretációját, hogy amikor a hiperbolikus síkot valamely egyenes mentén eltoljuk, akkor a sík pontjai által söpört út hossza exponenciális mértékben növekszik a pontnak az egyenestől mért távolsága függvényében.

(2) A gömbi geometriában is beszélhetünk „hiperciklusokról", azaz távolságvonalakról, mint valamely főkörtől adott r ($\pi/2$-nél kisebb) gömbi távolságra fekvő pontok mértani helyéről az egyik félgömbön. Nyilván ez a halmaz is kör, amelynek a síkja párhuzamos a főkör síkjával. Elemi számolás mutatja, hogy ha ennek a körnek egy íve a főkör α hosszúságú ívére vetül merőlegesen, akkor az ív hossza $\alpha \cos r$. Ez a 11.4.6.(1) Tétel gömbi analogonja.

A körre vonatkozó 11.4.3.(1) és a hiperciklusra vonatkozó 11.4.6.(1) Tétel az ívhosszt a szögelfordulás, illetve az egyenes mentén történő előrehaladás mértékével való összehasonlításban fejezi ki. A paraciklus esetében sem szögmérték, sem olyan távolságmérték nem kínálkozik, amelyet használva az ívhosszt ezekkel a tételekkel analóg formában kifejezhetnénk. Az alábbi tétel első állítása viszont a paraciklussal kapcsolatban is megfogalmazza a hiperbolikus sík exponenciális mértékű tágulását, mégpedig ezúttal nem csupán nagyságrendi, hanem pontos értelemben.

11.4.7. Tétel

(1) *Ha két koncentrikus paraciklus távolsága a tengelyek mentén mérve r, akkor a tengelyek által egymásnak megfeleltetett íveik ívhosszának aránya e^r.*

(2) *A paraciklus x hosszúságú húrjához tartozó ívének ívhossza* $2\operatorname{sh}(x/2)$.

Bizonyítás: Szemeljük ki a hiperboloidmodellben a (0,1,1) izotróp vektorral adott végtelen távoli pontot. Előállítjuk paraméteresen azokat a paraciklusokat, amelyeknek ez a pont a középpontja. Ezeket a paraciklusokat 11.1.13 alapján a $(0,1,1)^\perp$ kétdimenziós fényszerű altérrel párhuzamos síkok, azaz $x_2 - x_3 =$ konstans egyenletű síkok metszik ki Z-ből. Nemüres metszetet csak a konstans negatív értéke esetén kapunk, ezért a konstanst $-e^r$ alakban írjuk. Az $x_2 - x_3 = -e^r$ egyenletet a modellt definiáló $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ egyenlettel összevetve és a $t = e^{-r}x_1$ mennyiséget paraméternek választva a paraciklus

számára az

$$\mathbf{r}(t) = \left(e^r t\,,\, \frac{e^r t^2}{2} - \operatorname{sh} r\,,\, \frac{e^r t^2}{2} + \operatorname{ch} r \right) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

paraméteres előállítás adódik. Itt $\mathbf{r}'(t) = (e^r, e^r t, e^r t)$ és $q\big(\mathbf{r}'(t)\big) = e^{2r}$, ezért a paraciklus ívhossza tetszőlegesen választott t_1 és t_2 paraméterértékek között $\int_{t_1}^{t_2} e^r \,\mathrm{d}t = e^r|t_2 - t_1|$.

Rögzített t és változó r mellett az $\big(e^r t\,,\,(e^r t^2/2) - \operatorname{sh} r\,,\,(e^r t^2/2) + \operatorname{ch} r\big)$ pontok azon az egyenesen sorakoznak, amelyet az $x_1 + tx_2 - tx_3 = 0$ sík metsz ki Z-ből, és ehhez az egyeneshez hozzátartozik az előre kiszemelt végtelen távoli pont is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy ez az egyenes a paraciklus tengelye. A tengelyek mentén történő vetítés tehát a koncentrikus paraciklusok azonos paraméterhez tartozó pontjait felelteti meg egymásnak. Ezért az ívhosszra kapott $e^r|t_2 - t_1|$ formulából a tétel (1) állítása azonnal következik.

Az $r = 0$-hoz tartozó paraciklus számára speciálisan ívhossz szerinti paraméterezést kaptunk. A (2) állítás bizonyítása céljából számoljuk ki ezen az

$$\mathbf{r}(t) = \left(t\,,\, \frac{t^2}{2}\,,\, \frac{t^2}{2} + 1 \right)$$

paracikluson a $t_1 = 0$ és $t_2 = l$ paraméterértékek közötti l hosszúságú ívhez tartozó húr hosszát is, vagyis az $x = \rho_h\big(\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(l)\big)$ távolságot:

$$\operatorname{ch} x = -\langle \mathbf{r}(0), \mathbf{r}(l)\rangle = \frac{l^2}{2} + 1\,.$$

Innen

$$l = \sqrt{2(\operatorname{ch} x - 1)} = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2}$$

következik, az utolsó lépésben felhasználva a $\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2(x/2)$ azonosságot. □

Megjegyzések. (1) Az ívhossz kiszámolásához mindhárom ciklusfajta esetében ívhosszal arányos paraméterezést találtunk, hiszen mindegyik $q\,(\mathbf{r}'(t))$ függvény konstans volt a t változó függvényében.

(2) Figyeljük meg, hogy a ciklus ívhosszát a rögzített x húrhossz függvényeként előállító 11.4.3.(2)-beli, 11.4.6.(2)-beli és 11.4.7.(2)-beli képletek hogyan viszonyulnak egymáshoz a különféle ciklusok esetében. A legkisebb értéket, x-et természetesen a zérus sugarú hiperciklusív, vagyis az egyenes szakasz hossza adja, innen r-et növelve a hiperciklusív hossza is szigorúan monoton növekszik, és $r \to +\infty$ esetén a paraciklus ívhosszához, $2\operatorname{sh}(x/2)$-hez tart. Bármilyen $r \geq x/2$ mellett az r sugarú körben az x húrhoz tartozó rövidebbik ív hossza ennél nagyobb, és r függvényében szigorúan monoton

csökken, továbbá határértéke $r \to +\infty$ esetén ismét $2\,\mathrm{sh}(x/2)$, a paraciklus ívhossza. Emögött a jelenség mögött az ún. „geodetikus görbület” fogalma áll, amely azt méri, hogy valamely görbe milyen gyorsan fordul el az egyenes vonaltól. A ciklusok állandó geodetikus görbületű görbék, a körök erősebben, a hiperciklusok kevésbé görbülnek a paraciklusoknál. Differenciálgeometriai eszközökkel megállapítható, hogy az r sugarú kör geodetikus görbülete $\mathrm{cth}\, r$, az r sugarú hiperciklusé $\mathrm{th}\, r$, a paraciklusé 1.

(3) A 11.4.7.(2) Tétel újabb érdekes rokonságra világít rá az euklideszi térben fekvő gömb és a Minkowski-térben fekvő hiperboloidmodell között. Ha a gömb két pontja x gömbi távolságra van egymástól, akkor a $2\sin(x/2)$ formula a két pontot összekötő, a befoglaló euklideszi térben fekvő húr hosszát adja meg. Érdekes módon az analóg hiperbolikus formula, $2\,\mathrm{sh}(x/2)$, a hiperboloidmodellre vonatkozóan ugyanezt fejezi ki: könnyen ellenőrizhető, hogy a modell két, egymástól x hiperbolikus távolságra fekvő pontja között a Minkowski-térben „légvonalban” futó egyenes szakasz (amelynek iránya mindig térszerű, l. 10.3.11) hosszát ez a képlet adja meg. A 11.4.7.(2)-beli állítást tehát geometriailag úgy interpretálhatjuk, hogy a modell bármely két pontja között a légvonalban mért távolság egyenlő a két pontot összekötő paraciklusív hosszával. Nem meglepő, hogy a térbeli egyenes vonalban mért távolság nagyobb, mint a modellbeli, hiszen a fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség (10.3.4) következtében az időszerű síkokban fellépő térszerű távolságok között a háromszög-egyenlőtlenség is megfordul.

11.4.8. Definíció (Polár-, hiperciklikus és paraciklikus koordináták). Ha a ciklusok ívhosszát megadó tételek bizonyításában használt paraméterező függvényeket r-től és t-től egyaránt függő $\mathbf{s}(r,t)$ kétváltozós függvénynek tekintjük, akkor a hiperbolikus sík nevezetes (görbevonalú) koordinátázásaihoz jutunk. Az r és t mennyiségeket az

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(r,t) &= (\,\mathrm{sh}\, r\cos t\,,\ \mathrm{sh}\, r\sin t\,,\ \mathrm{ch}\, r\,)\,,\\
\mathbf{s}(r,t) &= (\,\mathrm{ch}\, r\,\mathrm{sh}\, t\,,\ \mathrm{sh}\, r\,,\ \mathrm{ch}\, r\,\mathrm{ch}\, t\,)\,,\\
\text{illetve}\quad \mathbf{s}(r,t) &= \left(e^r t\,,\ \frac{e^r t^2}{2} - \mathrm{sh}\, r\,,\ \frac{e^r t^2}{2} + \mathrm{ch}\, r\right)
\end{aligned}$$

esetben rendre a hiperbolikus sík polárkoordinátáinak, hiperciklikus koordinátáinak, illetve paraciklikus koordinátáinak nevezzük. Az r változóhoz tartozó koordinátavonalak metsző, ultraparallel, illetve párhuzamos sugársort alkotnak, míg a t-hez tartozó koordinátavonalak a sugársor által származtatott ciklusok. Láttuk, hogy az $\mathbf{s}(r,t)$ képlet rögzített r mellett t függvényében a ciklusok számára az ívhosszal arányos paraméterezést ad. Könnyű ellenőrizni, hogy rögzített t mellett r függvényében a sugársor egyenesei számára ívhossz szerinti paraméterezést kapunk mindhárom esetben.

A polárkoordinátáktól eltérően mind a hiperciklikus, mind a paraciklikus koordináták bijektív megfeleltetést létesítenek az $\mathbf{R}^2$ koordinátasík és a hiperbolikus sík között. A paraciklikus koordináták esetében ez a megfeleltetés különösen jól illeszthető a Poincaré-féle félsíkmodellhez.

11.4.9. Definíció (A Θ leképezés). Konkrét megfeleltetést létesítünk a kétdimenziós hiperboloidmodell és a félsíkmodell között. A félsíkmodellt most az $\mathbf{R}^{2,1}$ Minkowski-tér x_1x_3-síkjának a felső félsíkjába helyezzük, tehát annak U' alaphalmazát $x_2 = 0$ és $x_3 > 0$ definiálja $\mathbf{R}^{2,1}$-ben.

A $\Theta : Z \to U'$ leképezést három, a különféle modellek között már korábban értelmezett leképezés kompozíciójaként adjuk meg. Az első lépésben a 10.3.7-beli $\Psi : Z \to X$ leképezést alkalmazzuk, amelyet (a 10.3.7-et követő első megjegyzés szellemében) úgy fogunk fel, hogy Ψ a hiperboloidmodellt az origóból középpontosan vetíti az $x_3 = 1$ síkban fekvő X Cayley–Klein-modellre. A második lépésben az x_3-tengellyel párhuzamosan vetítjük az X körlemezt az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ egyenletű G egységgömb Y-nal jelölt felső félgömbjére, tehát lényegében a 10.2.14-beli $(p|_Y)^{-1} : X \to Y$ izomorfizmust alkalmazzuk a Cayley–Klein-modell és a Poincaré-féle félgömbmodell között. Végül a harmadik lépésben a (0,1,0) pontból az $x_2 = 0$ egyenletű S síkra történő $v : G - (0,1,0) \to S$ sztereografikus vetítést alkalmazzuk; ez a leképezés 10.2.15 alapján Y-ból az U' félsíkmodellt állítja elő.

Mindhárom lépésben izomorfizmusokat alkalmaztunk a modellek között, ezért a

$$\Theta = (v|_Y) \circ (p|_Y)^{-1} \circ \Psi \ : \ Z \to U'$$

leképezés izomorf megfeleltetés a hiperboloidmodell és a félsíkmodell között. Végül használjuk ismét az $U \subset \mathbf{C}$ komplex felső félsíkot, ahol x és y jelölik a szokásos koordinátákat (azaz a z komplex szám valós, illetve képzetes részét), és azonosítsuk az $\mathbf{R}^{2,1}$-beli U'-vel az $x = x_1$, $y = x_3$ megfeleltetés révén. Ezáltal a Θ izomorfizmust mint $Z \to U$ leképezést foghatjuk fel.

11.4.10. Állítás. *A Θ leképezés az r és t paraciklikus koordinátákat az U félsíkmodellben $(-\ln y)$-ba, illetve x-be viszi. Más szavakkal kifejezve, a $\Theta \circ \circ \mathbf{s} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ leképezés koordinátafüggvényei $x = t$ és $y = e^{-r}$.*

Bizonyítás: Az $\mathbf{s}(r,t)$-re 11.4.8-ban adott formulából θ definícióját követve lépésről lépésre történő számolással előállítható

$$\begin{aligned}
\Psi\big(\mathbf{s}(r,t)\big) &= \left(\frac{e^r t}{\frac{e^r t^2}{2} + \operatorname{ch} r} \,,\, \frac{\frac{e^r t^2}{2} - \operatorname{sh} r}{\frac{e^r t^2}{2} + \operatorname{ch} r} \,,\, 1 \right), \\
(p|_Y)^{-1}\big(\Psi\big(\mathbf{s}(r,t)\big)\big) &= \frac{\left(e^r t \,,\, \frac{e^r t^2}{2} - \operatorname{sh} r \,,\, 1 \right)}{\frac{e^r t^2}{2} + \operatorname{ch} r}, \\
\Theta\big(\mathbf{s}(r,t)\big) &= (\, t \,,\, 0 \,,\, e^{-r} \,). \qquad \square
\end{aligned}$$

11.4.11. Következmény. *A hiperbolikus sík $U \subset \mathbf{C}$ félsíkmodelljében a (standard $\mathbf{R}^2$-beli) koordinátavonalak a ∞ végtelen távoli ponthoz tartozó paraciklikus koordinátarendszer koordinátavonalai. A paraciklikus koordinátákkal való paraméterezés szerint a $z = x + iy \in U$ ponton áthaladó, x-tengellyel párhuzamos koordinátavonal az ívhossz $(1/y)$-szorosával paraméterezett paraciklus, míg az ugyanezen a ponton áthaladó, y-tengellyel párhuzamos koordinátavonal ívhossz szerint paraméterezett egyenes.* □

11.5. Terület

A hiperbolikus síkgeometriában a terület (és tetszőleges dimenziójú hiperbolikus térben a térfogat) értelmezése nem intézhető el az euklideszi geometria mintáját (l. 7.1.1–7.1.2) követve az $\mathbf{R}^d$-beli Jordan-mértékre és integrálásra való közvetlen hivatkozással. Ami a mérhető halmazok fogalmát illeti, a hiperbolikus térben fekvő ponthalmazok Jordan-mérhetőségének fogalma akár a Cayley–Klein-modell, akár a Poincaré-féle gömbmodell vagy féltérmodell használatával minden további nélkül értelmezhető az $\mathbf{R}^d$-beli Jordan-mérhetőség átvitelével. Magának a mértéknek, azaz a Jordan-mérhető halmazok térfogatának a definíciója azonban nehezebb. A térfogatfogalom kiépítését a differenciálformák elmélete ennél jóval tágabb körülmények között, általános Riemann-terek esetére elvégzi. A hiperbolikus térbeli térfogat ennek speciális esete.

A két- és háromdimenziós esetben a hiperbolikus geometriában tisztán axiomatikus alapokon is kiépíthető a terület-, illetve a térfogatfogalom. Ennek az útnak a végigjárása nem igényelne magasabb matematikai eszközöket, viszont körülményes és hosszadalmas volta miatt ennek részletezésétől is eltekintünk.

Arra az álláspontra helyezkedünk, hogy most precíz indoklás nélkül elfogadjuk, hogy a hiperbolikus síkon létezik terület, és érvényesek rá szokásos pozitivitási, végességi, additivitási, invariancia-, és unicitási tulajdonságok:

- A területmérés a $\mathbf{H}^2$-beli Jordan-mérhető halmazokhoz nemnegatív valós számokat, esetleg $+\infty$-t rendel.
- Valamely Jordan-mérhető halmaz területe akkor és csak akkor pozitív, ha a belseje nem üres.
- Bármely korlátos Jordan-mérhető halmaz területe véges.
- Ha két Jordan-mérhető halmaznak nincs közös belső pontja, akkor az egyesítésük területe egyenlő a területeik összegével.
- Egybevágó Jordan-mérhető halmazok területe egyenlő.

– Bármely két területmérő függvény csak skalárszorzóban tér el egymástól, tehát a területmérés a mértékegység megválasztása erejéig egyértelmű.

Ebben a szakaszban azt tűzzük ki célul, hogy technikát találjunk a terület kiszámítására (l. 11.5.6), és meghatározzuk egy-két konkrét idom területét.

11.5.1. Definíció (Paraciklus-téglalap). Paraciklus-téglalapnak nevezzük a hiperbolikus síkon azokat a zárt részhalmazokat, amelyeket egyfelől két párhuzamos egyenes, másfelől pedig két olyan koncentrikus paraciklus fog közre, amelyeknek ez a két egyenes tengelye.

A paraciklus-téglalap korlátos, nem konvex idom. Határából a két párhuzamos egyenes egyenlő hosszúságú szakaszokat tartalmaz, ezeket hívjuk a paraciklus-téglalap alapjainak. A paraciklus-téglalap határához a két paraciklusból egy-egy ív tartozik, amelyek közül a hosszabbik a paraciklus-téglalap külső íve, a rövidebbik a belső íve. Ha az alap a hosszúságú, akkor 11.4.7.(1) alapján a külső ív hossza a belső e^a-szorosa. A paraciklus-téglalapot az alap hossza és a külső ív hossza egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza.

11.5.2. Definíció (Paracikluscikk). Tekintsünk két párhuzamos félegyenest, amelyek A és B kezdőpontjai korrespondeáló pontok, és kössük össze A-t és B-t a hozzájuk tartozó paraciklusnak az őket összekötő ívével. A síknak azt a zárt tartományát, amelyet a két félegyenes és ez az AB paraciklusív fog közre, paracikluscikknek nevezzük. Az A és B pont a paracikluscikk közönséges csúcsai, a két határoló félegyenes közös végtelen távoli pontja a paracikluscikk ideális csúcsa.

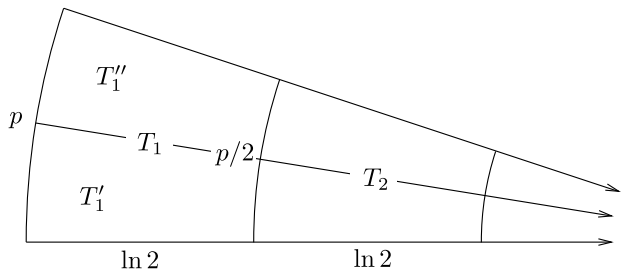
A paracikluscikk konvex, nem korlátos idom. A határoló paraciklusívvel koncentrikus paraciklusok (ha belemetszenek) egy paraciklus-téglalapra és egy kisebb paracikluscikkre bontják ketté. A paracikluscikket az ívének a hossza egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza.

11.5.3. Állítás. *A paracikluscikk területe véges, és a határoló paraciklusív hosszával arányos.*

Bizonyítás: Legyen A és B a P paracikluscikk két közönséges csúcsa, és p az AB paraciklusív hossza. Az $[A, B]$ szakasz felező merőlegese P-nek szimmetriatengelye, és P-t két egybevágó paracikluscikkre bontja, legyenek ezek P' és P''.

Vágjuk el P-t most egy olyan paraciklussal, amely koncentrikus az ívével, és attól (tengelyirányban mérve) $\ln 2$ távolságban halad. A kettévágással egy $\ln 2$ alapú T_1 paraciklus-téglalap és egy P_1 paracikluscikk keletkezik. A T_1 paraciklus-téglalap belső íve a külső ív 1/2-szerese, ezért P_1 íve $p/2$ hosszúságú, tehát P_1 egybevágó P'-vel és P''-vel. A $T_1' = T_1 \cap P'$ és $T_1'' = T_1 \cap P''$

paraciklus-téglalapok egybevágók és együtt kitöltik T_1-et, mindkettőjük területe tehát T_1 területének a fele. Ugyancsak félbevágással keletkeznek a $P_1' = P_1 \cap P'$ és $P_1'' = P_1 \cap P''$ egybevágó paracikluscikkek.



Vágjuk el most P_1-et is egy az eddigiekkel koncentrikus, és az előzőtől ismét $\ln 2$ távolságban haladó paraciklussal. Ezáltal egy újabb T_2 paraciklus-téglalap és egy újabb P_2 paracikluscikk keletkezik. A (T_2, P_2) pár a (T_1', P_1') párból a közös határoló egyenesük mentén $\ln 2$ távolsággal történő eltolással kapható, ezért a T_2 paraciklus-téglalap területe a T_1 területének a fele, a P_2 paracikluscikk íve pedig $p/4$.

Az eljárást rekurzív módon minden határon túl folytatva egy T_1, T_2, ..., T_n, ... végtelen sorozatot állítunk elő $\ln 2$ alapú paraciklus-téglalapokból, amelyek együttesen lefedik P-t, és amelyek területei $1/2$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak. Ezért P területe véges.

Ezt a területet tekinthetjük a p ívhossz függvényének, hiszen egybevágóság erejéig maga P is csak p-től függ. Ez a függvény pozitív, és nyilvánvalóan additív, ezért csak lineáris lehet, azaz P területe p-vel arányos. □

11.5.4. Állítás. *Az a alapú, p külső ívű paraciklus-téglalap területe $p(1 - e^{-a})$-val arányos.*

Bizonyítás: Jelölje c a 11.5.3 szerinti arányossági tényezőt, azaz tegyük föl, hogy a p ívű paracikluscikk területe $c \cdot p$-vel egyenlő. A p ívű paracikluscikket az a távolságra haladó koncentrikus paraciklus a szóban forgó paraciklus-téglalapra és egy $e^{-a}p$ ívű paracikluscikkre vágja föl. Miután a paracikluscikkek területe véges, a paraciklus-téglalap területét kivonással kapjuk: $c \cdot p - c \cdot e^{-a}p = c \cdot p(1 - e^{-a})$. □

11.5.5. Definíció (Természetes területegység). A hiperbolikus síkon a területmérés mérőszáma eddig csak arányosság erejéig volt meghatározva, összhangban azzal, hogy a területegység tetszőlegesen kijelölhető. Azt mondjuk, hogy a területmérés a természetes területegységre vonatkozóan történik, ha a 11.5.3-ban és 11.5.4-ben fellépő c arányossági tényező 1-gyel egyenlő.

Tekintsük az a alapú, p külső ívű paraciklus-téglalap területének és az euklideszi síkon felvett a, p oldalú téglalap területének az arányát. Szemléletünk szerint a hiperbolikus sík geometriája infinitezimális méretekben nem különbözik az euklideszi síkétól, ezért a hiperbolikus területegység akkor van helyesen, a távolságméréssel összhangban megválasztva, ha $a, p \to 0$ esetén ez az arány 1-hez tart. Miután

$$\lim_{a,p\to 0} \frac{c \cdot p(1-e^{-a})}{ap} = c\,,$$

ez a szemlélet szintén azt támasztja alá, hogy a $c = 1$-hez tartozó területmérést tekinthetjük természetesnek.

Mostantól $c = 1$ előírásával rögzítjük a területmérést a hiperbolikus síkon, és a továbbiakban a terület mérőszámán mindig a természetes területegységre vonatkoztatott területet értjük. Például a p ívű paracikluscikk területe p-vel egyenlő. A területmérés természetes mértékegysége tehát az egységnyi ívű paracikluscikk területe.

Tekintsük a hiperbolikus sík $U \subset \mathbf{C}$ félsíkmodelljét, és ahogy eddig is, jelölje x és y az U-beli koordinátákat. A következő tétel a modellbeli területet x és y segítségével állítja elő.

11.5.6. Tétel. *Bármely $M \subseteq U$ Jordan-mérhető halmaz modellbeli területe az*

$$\iint\limits_M \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

integrállal egyenlő.

Bizonyítás: A tétel állítását elegendő arra az esetre ellenőrizni, amikor M koordinátavonalakkal határolt téglalap, hiszen mind a szóban forgó integrál, mind a modellbeli terület ezek összegeinek a határértéke.

Legyen tehát M az $x_1 \le x \le x_2$ és $y_1 \le y \le y_2$ egyenlőtlenségekkel adott téglalap, ekkor

$$\iint\limits_M \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right).$$

Másrészt 11.4.10 alapján az $r = -\ln y$, $t = x$ helyettesítésekkel paraciklikus koordinátákra áttérve az M halmaz az $r_2 \le r \le r_1$ és $t_1 \le t \le t_2$ egyenlőtlenségekkel adott paraciklus-téglalap, ahol $r_i = -\ln y_i$, $t_i = x_i$ $(i = 1{,}2)$. Ennek a paraciklus-téglalapnak az alapja $r_1 - r_2$, külső íve $e^{r_1}(t_2 - t_1)$, ezért

a területe 11.5.4 és 11.5.5 szerint

$$e^{r_1}(t_2-t_1)\big(1-e^{-(r_1-r_2)}\big) = (t_2-t_1)(e^{r_1}-e^{r_2}) = \\ = (x_2-x_1)\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right). \qquad \square$$

Mivel nem csak a $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus tér pontpárjait, hanem a $\overline{\mathbf{H}^d}$ lezárás bármely két pontját is egyértelműen meghatározott egyenes köti össze, a hiperbolikus geometriában minden további nélkül értelmezhetők olyan háromszögek, illetve magasabb dimenziós konvex poliéderek, amelyeknek egy vagy több csúcsa végtelen távoli pont. Az alábbi definícióban a kétdimenziós esetre szorítkozunk, és az egyszerűség kedvéért a Cayley–Klein-modellre hivatkozunk.

11.5.7. Definíció (Aszimptotikus háromszögek és sokszögek). Ha A, B, C három nem kollineáris pont $\overline{\mathbf{H}^2}$-ben, akkor a Cayley–Klein-modellt használva tekinthetjük e három pont H konvex burkát a befoglaló euklideszi síkra vonatkozóan. Ha mindhárom pont $\mathbf{H}^2$-höz tartozik, akkor H a szokásos értelemben vett ABC hiperbolikus háromszög. Ha nem, akkor aszerint, hogy A, B, C közül egy, kettő, vagy mindhárom tartozik a $\partial\mathbf{H}^2$ ideális határhoz, a $H \cap \mathbf{H}^2$ halmazt egyszeresen, kétszeresen, illetve háromszorosan aszimptotikus háromszögnek nevezzük. A háromszorosan aszimptotikus háromszögeket a rövidség kedvéért ideális háromszögnek is szokás hívni.

Általánosabban, $\overline{\mathbf{H}^2}$-ból véges sok nem kollineáris pontot kiválasztva azok konvex burkát (pontosabban, a konvex burok metszetét $\mathbf{H}^2$-vel) aszimptotikus konvex sokszögnek szokás nevezni, ha a pontok közül legalább egy $\partial\mathbf{H}^2$-höz tartozik. Miután ez a konstrukció a Cayley–Klein-modellt tekintve az euklideszi síkon van értelmezve, az aszimptotikus konvex sokszögek kombinatorikai tulajdonságai semmiben sem különböznek az euklideszi síkbeli konvex sokszögekéitől.

Aszimptotikus háromszög esetében is beszélhetünk valamely csúcsbeli szögről, illetve két csúcs közti oldalhosszról, ha a szóban forgó csúcs, illetve mindkét csúcs $\mathbf{H}^2$-ben fekszik. Kétszeresen aszimptotikus háromszögnek egy szöge van, és nyilvánvaló módon bármely adott 0 és π közötti szöghöz egybevágóság erejéig egyértelműen található ekkora szögű kétszeresen aszimptotikus háromszög.

Bármely H háromszöghöz, akár közönséges, akár aszimptotikus, található olyan ideális háromszög, amely H-t lefedi. Szemeljünk ki ugyanis a H háromszögben egy tetszőleges belső pontot, és indítsunk ebből a pontból félegyeneseket a csúcsokon át. Ennek a három félegyenesnek a végtelen távoli pontjai H-t lefedő ideális háromszöget feszítenek ki.

11.5.8. Tétel. *Bármely két ideális háromszög egybevágó. Az ideális háromszögek területe π-vel egyenlő.*

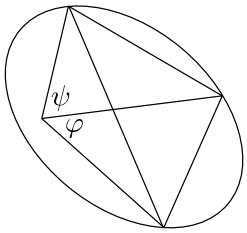
Bizonyítás: Az $I(\mathbf{H}^2) \cong PGL(2, \mathbf{R})$ izometriacsoport projektív transzformációkkal hat a valós projektív egyenessel azonosított $\partial\mathbf{H}^2$ ideális határon. Ez a hatás 8.3.9 szerint tranzitív $\partial\mathbf{H}^2$ ponthármasainak halmazán, ami éppen azt jelenti, hogy bármely két ideális háromszöghöz található olyan egybevágóság, amely az egyiket a másikba viszi.

Tekintsük az U félsíkmodellben a -1, 1 és ∞ végtelen távoli pontok által kifeszített H ideális háromszöget. Ennek az ideális háromszögnek az oldalait az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű félkör és az $x = -1$, $x = 1$ egyenletű félegyenesek reprezentálják U-ban. Ezért H területe a 11.5.6. Tétel alkalmazásával

$$\int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi\,. \qquad \square$$

11.5.9. Lemma. *Bármely kétszeresen aszimptotikus, φ szögű háromszög területe $\pi - \varphi$.*

Bizonyítás: A kérdéses terület véges (sőt kisebb π-nél), hiszen az aszimptotikus háromszögek is lefedhetők alkalmas ideális háromszöggel. Az ugyanakkora szögű kétszeresen aszimptotikus háromszögek egybevágók, ezért területük csak a szögüktől függ. Jelölje $\varphi \in (0, \pi)$-re $t(\varphi)$ a φ szögű kétszeresen aszimptotikus háromszögek területét.



Ha $\varphi, \psi > 0$ és $\varphi + \psi < \pi$, akkor egy φ szögű és egy ψ szögű kétszeresen aszimptotikus háromszöget az egyik határoló félegyenesük mentén összeillesztve olyan aszimptotikus konvex négyszöget kapunk, amelynek három végtelen távoli csúcsa van. Ezért ez a négyszög egy ideális háromszög és egy $\varphi + \psi$ szögű kétszeresen aszimptotikus háromszög összeillesztésével is előáll. Ebből a $t(\varphi) + t(\psi) = t(\varphi + \psi) + \pi$ egyenletet kapjuk, amelyet

$$\pi - t(\varphi + \psi) = \big(\pi - t(\varphi)\big) + \big(\pi - t(\psi)\big)$$

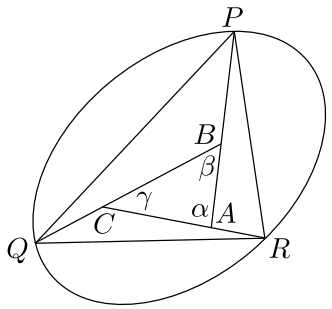
alakban is írhatunk. Ez az egyenlet azt jelenti, hogy a $\pi - t : (0, \pi) \to (0, \pi)$ függvény additív. Ezért ez a függvény lineáris, azaz alkalmas c pozitív konstanssal $t(\varphi) = \pi - c \cdot \varphi$ érvényes minden $\varphi \in (0, \pi)$-re. Végül két darab $\pi/2$

szögű kétszeresen aszimptotikus háromszöget összeillesztve ideális háromszöget kapunk, ezért $2t(\pi/2) = \pi$, amiből $c = 1$ következik. □

11.5.10. Tétel. *Ha a hiperbolikus síkon egy háromszög szögei α, β és γ, akkor a háromszög t területére*

$$t = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

érvényes.



Bizonyítás: Legyenek A, B és C a háromszög csúcsai, és jelölje P, Q és R rendre az A kezdőpontból B-n át, a B kezdőpontból C-n át, illetve a C kezdőpontból A-n át húzott félegyenes végtelen távoli pontját. Ezek a félegyenesek a PQR ideális háromszöget feldarabolják az ABC háromszögre és három darab kétszeresen aszimptotikus háromszögre: ARP-re, BPQ-ra és QCR-re, amelyek szögei rendre $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, illetve $\pi - \gamma$. Ebből 11.5.9. felhasználásával a $t + \alpha + \beta + \gamma = \pi$ egyenletet kapjuk. □

Megjegyzések. (1) A 11.5.10. Tétel szembeötlő párhuzamban áll a gömbháromszögek területére vonatkozó, 0.3.10-ben bebizonyított Girard-formulával. Ez nem véletlen: mindkettő egy nevezetes differenciálgeometriai tételnek, a görbült felületeken fekvő idomok felszínéről szóló ún. Gauss–Bonnet-féle tételnek a speciális esete. Ezért a matematikai irodalomban gyakran 0.3.10 és 11.5.10 is Gauss–Bonnet-tételként szerepel.

(2) Ha az aszimptotikus háromszögeknek a végtelen távoli csúcsokban zérus szöget tulajdonítunk, akkor, amint az könnyen belátható, a 11.5.10-beli formula aszimptotikus háromszögekre vonatkozóan is érvényes.

(3) A hiperbolikus síkon valamely α, β, γ szögű háromszög defektusán (vagy szöghiányán) a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ különbséget szokás érteni. A 11.5.10. Tétel azt fejezi ki, hogy természetes területegységre vonatkoztatva bármely háromszög területe a defektusával egyenlő. A defektus fogalmát kézenfekvő módon lehet kiterjeszteni magasabb oldalszámú sokszögek esetére (amelyeknek esetleg

végtelen távoli csúcsai is lehetnek). Könnyű ellenőrizni, hogy a defektus additív mennyiség: ha egy S sokszög két egymásba nem nyúló S_1 és S_2 sokszög egyesítése, akkor S defektusa egyenlő S_1 és S_2 defektusának az összegével. Innen már a területmérés általános elvei alapján is levezethető, hogy a sokszögek területe arányos a defektusukkal.

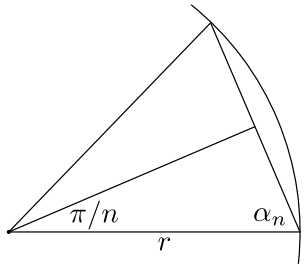
(4) Ha a hiperbolikus síkon a távolságot a természetes metrika λ-szorosával mérnénk, és a terület mértékegységét a 11.5.5. Definíció mintájára ezzel a távolságméréssel hoznánk összhangba, akkor a területegység a természetes területegység $(1/\lambda^2)$-szeresére változna, és a háromszögek területére vonatkozó képlet $t = \lambda^2\big(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)\big)$-ra módosulna. A 11.3.5. Tételt követő harmadik megjegyzés szerint $\lambda = 1/\sqrt{-K}$, ahol K a sík görbülete, ezért a terület képlete a görbületet használva

$$K \cdot t = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

alakban írható. Ebben a formájában a képlet nem csak a hiperbolikus geometriában érvényes, hanem az r sugarú gömb geometriájában is (ahol $K = 1/r^2$), és az euklideszi geometriában is (ahol $K = 0$).

11.5.11. Tétel. *A hiperbolikus síkon az r sugarú körlap területe* $2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$.

Bizonyítás: Osszuk fel egy r sugarú kör kerületét n (≥ 3) osztóponttal egyenlő részívekre. Az osztópontok S_n konvex burka n-oldalú szabályos sokszög. Először az S_n sokszög $t(S_n)$ területét határozzuk meg. Nyilván minden n-re $t(S_n)$ kisebb a keresett körterületnél.



Az S_n sokszög $2n$ darab egybevágó derékszögű háromszög egyesítéseként áll elő, amelyek átfogója r, és egyik hegyesszöge π/n. Az S_n területének kiszámításához a másik hegyesszögre van szükségünk, jelöljük azt α_n-nel. A derékszögű háromszögre vonatkozó 11.3.5.(4) formulából $\operatorname{tg}\alpha_n = 1/\big(\operatorname{ch} r \operatorname{tg}(\pi/n)\big)$. Az S_n sokszög szögeinek összege $2n\alpha_n$, ezért a területe

$$t(S_n) = (n-2)\pi - 2n \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\operatorname{ch} r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = n\left(\pi - 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\operatorname{ch} r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right) - 2\pi\,.$$

Az analízis eszközeivel könnyen ellenőrizhető, hogy a képlet első tagjának a határértéke $n \to \infty$ mellett $2\pi \operatorname{ch} r$. Így $\lim_{n\to\infty} t(S_n) = 2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$.

A fenti derékszögű háromszögben jelölje a_n az α_n szöggel szemközti befogót, amely az S_n-be beírható kör sugarával egyenlő. A másik befogó, amely az S_n sokszög oldalhosszának a fele, n növekedtével nyilván 0-hoz tart, ezért 11.3.5.(1)-ből $\operatorname{ch} a_n \to \operatorname{ch} r$, azaz $a_n \to r$ következik. Ez azt jelenti, hogy a körlap bármelyik belső pontját elég nagy n mellett az S_n sokszög tartalmazza. Ezért tehát a kör területe az imént kiszámított határértékkel egyenlő. □

Megjegyzések. (1) A gömbi geometria analóg képlete $2\pi(1 - \cos r)$, ami az egységgömbön az r $(< \pi)$ gömbi sugarú K gömbi körlemez területét adja meg. Miután K valójában $(1 - \cos r)$ magasságú gömbsüveg, a formulában ráismerhetünk a gömbsüveg felszínének elemi geometriából ismert képletére.

(2) A hiperbolikus függvények azonosságait használva a körlemez területképlete átírható az egyenértékű $4\pi \operatorname{sh}^2(r/2)$ alakba.

(3) Érdekes jelenség, hogy a hiperbolikus síkon az r sugár növekedtével a kör $2\pi \operatorname{sh} r$ kerülete és $2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$ területe azonos exponenciális ütemben nő. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy egy nagy körlemez területének zöme a határoló körvonal közelében helyezkedik el. A hiperbolikus sík ebben a tekintetben is lényegesen eltér az euklideszitől.

12. Magasabb dimenziós hiperbolikus terek

Ebben a fejezetben a legalább háromdimenziós hiperbolikus tér geometriájával foglalkozunk, ezért általánosságban feltesszük, hogy $d \geq 3$. Ennek ellenére bizonyos esetekben a definíciók értelemmel bírnak és a tételek érvényesek a 11. fejezetben már részletesen tárgyalt hiperbolikus síkra vonatkozóan is. Erre nem fogunk minden alkalommal kitérni, és az olvasóra hagyjuk annak tisztázását, hogy kizárólag térbeli jelenségekről, vagy síkbeli ismereteink általánosításáról van-e éppen szó.

12.1. Hipersíkok és szférák

Emlékeztetünk arra, hogy a projektív modellben a 10.1.19. Definíciót a $\mathbf{H}^d = X$ azonosítás mellett alkalmazva a hiperbolikus tér $\partial\mathbf{H}^d$ ideális határát, illetve $\overline{\mathbf{H}^d}$ lezárását kapjuk. A $\partial\mathbf{H}^d$ ideális határ természetes struktúrája a $(d-1)$-dimenziós inverzív geometria. Ha $M \subseteq \mathbf{H}^d$ hiperbolikus altér, $\dim M \geq 1$, akkor $\partial M = \overline{M} \cap \partial\mathbf{H}^d$ inverzív altér, azaz $(\dim M - 1)$-dimenziós gömb a $\partial\mathbf{H}^d$ inverzív térben.

12.1.1. Definíció (Alterek párhuzamossága). Legyenek M és N egyenlő (≥ 1) dimenziójú alterek $\mathbf{H}^d$-ben. Azt mondjuk, hogy M és N párhuzamos, ha vagy $M = N$, vagy pedig ∂M és ∂N érintkező gömbök $\partial\mathbf{H}^d$-ben.

A hiperbolikus párhuzamosság fogalmát leginkább az egyenesek, illetve a hipersíkok körében vizsgáljuk. Ilyenkor a definícióban szereplő érintkezés feltétele azzal egyenértékű, hogy $\partial M \cap \partial N$ egyelemű.

Vegyük észre, hogy két különböző párhuzamos altérnek $\mathbf{H}^d$-ben nem lehet közös pontja. Valóban, ha $P \in M \cap N$, akkor a P pontot $\partial M \cap \partial N$ közös elemével összekötő egyenes másik végtelen távoli pontja szintén közös pontja a ∂M és ∂N gömböknek, ami azok érintkező volta miatt lehetetlen.

12.1.2. Definíció (Két egyenes kölcsönös helyzete). Ha $\mathbf{H}^d$-ben két egyeneshez található olyan kétdimenziós altér, amely tartalmazza őket, akkor a két egyenest egysíkúnak mondjuk, ellenkező esetben kitérő egyeneseknek hívjuk. Az egysíkú esetben a 11.1-beli osztályozásra hivatkozva beszélhetünk metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel egyenesekről.

A párhuzamosság 12.1.1-beli definícióját egyenesek esetére vonatkoztatva nyilván ugyanezt a párhuzamosság-fogalmat kapjuk. Ahogyan azt a síkbeli esetben már meggondoltuk, irányított egyenesek vagy félegyenesek körében a $\mathbf{H}^d$-beli párhuzamosság is ekvivalenciareláció.

12.1.3. Definíció (Két hipersík kölcsönös helyzete). Két $\mathbf{H}^d$-beli különböző hipersíkot metszőnek, párhuzamosnak, vagy ultraparallelnek mondunk, van közös pontjuk, ha 12.1.1. értelmében párhuzamosak, illetve ha se nem metszők, se nem párhuzamosak.

Miután a hipersíkok ideális határa $d-2 \geq 1$-dimenziós gömb, a két különböző hipersík metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel volta azzal egyenértékű, hogy közös végtelen távoli pontjaik száma legalább 2, pontosan 1, illetve 0.

A párhuzamosság a hipersíkok körében sem tranzitív reláció. Ha valamely kitüntetett végtelen távoli pontjukkal ellátott hipersíkokra értelmeznénk a „megjelölt irányban való párhuzamosság” fogalmát, akkor kapnánk ekvivalenciarelációt.

12.1.4. Állítás. *Tekintsünk két különböző hipersíkot $\mathbf{H}^d$-ben, és legyenek $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a hiperboloidmodellben hozzájuk választott normálvektorok. A két hipersík pontosan aszerint metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ térszerű, fényszerű, illetve időszerű kétdimenziós alteret feszít ki a $(d+1)$-dimenziós Minkowski-térben.*

Bizonyítás: Legyen U és V a két hipersíkot előállító két időszerű lineáris hipersík a W Minkowski-térben, azaz $U = \mathbf{u}^\perp$ és $V = \mathbf{v}^\perp$. Ekkor az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ kifeszítette altér a $(d-2)$-dimenziós $U \cap V \leq W$ altér q-ortogonális kiegészítője.

A szóban forgó két hipersíknak akkor és csak akkor van közös pontja a modellben, ha $U \cap V$ időszerű, ami azzal egyenértékű, hogy az $(U \cap V)^\perp$ altér térszerű.

A két hipersík akkor és csak akkor párhuzamos, ha az $U \cap V$ altérhez skalárszorzó erejéig egyetlen fényszerű vektor tartozik. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $U \cap V$ altér elfajuló kvadratikus alakot örököl, azaz fényszerű altér. Ez pedig akkor és csak akkor áll, ha $(U \cap V)^\perp$ fényszerű.

Végül az ultraparallel hipersíkok számára csak az az eshetőség marad, hogy $(U \cap V)^\perp$ időszerű. □

12.1.5. Következmény. *Két hipersík akkor és csak akkor ultraparallel, ha létezik olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges. Ezt az egyenest a két hipersík egyértelműen meghatározza.*

Bizonyítás: Az előző bizonyítás jelöléseivel a két hipersíkra merőleges egyenest csakis az $(U \cap V)^\perp \leq W$ kétdimenziós altér állíthatja elő. Ez az altér pontosan akkor állít elő egyenest a modellben, ha időszerű, azaz 12.1.4 alapján ha a két hipersík ultraparallel. □

12.1.6. Definíció (Metsző alterek szöge). Két metsző hipersík szögét többféle módszerrel is értelmezhetjük. Vehetjük például valamelyik konform modellben az őket reprezentáló hipergömbök vagy hipersíkok szögét (l. 5.1.10), vagy az ideális határuknak mint hipergömböknek a szögét a $\partial\mathbf{H}^d$ inverzív térben, vagy az euklideszi tér mintájára a metszetaltér egy pontjában állíthatunk a metszetaltérre merőleges egyeneseket külön-külön midkét hipersíkon belül, és tekinthetjük 10.1.15 szerint e két egyenes szögét. A modellek tulajdonságainak ismeretében nyilvánvaló, hogy ezek a definíciók egyenértékűek.

A két metsző hipersík esetén kívül még azokban az esetekben tudjuk alterek szöget értelmezni, amikor azt a $\partial\mathbf{H}^d$ inverzív térre való hivatkozással megtehetjük. Így például definiálva van hipersík és azt egyenesben metsző kétdimenziós altér szöge is (l. 5.1.11).

12.1.7. Definíció (Ultraparallel hipersíkok távolsága). Két ultraparallel hipersík távolságán a 12.1.5 szerint egyértelműen létező közös merőleges egyenesen a két metszéspont közé eső szakasz hosszát értjük. Ha a két hipersíkból tetszőlegesen egy-egy pontot választunk, akkor a köztük föllépő távolságok között a merőlegesség miatt ennek a szakasznak a hossza a lehető legkisebb.

12.1.8. Tétel. *Válasszunk a $\mathbf{H}^d$-beli S és T hipersíkokhoz a hiperboloidmodellben egységnyi normálvektorokat, legyenek ezek $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$. Ekkor:*

(1) *ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| < 1$, akkor S és T metsző hipersíkok, és szögük $\cos^{-1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$,*

(2) *ha* $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = 1$, *akkor* S *és* T *párhuzamos hipersíkok,*

(3) *ha* $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| > 1$, *akkor* S *és* T *ultraparallel hipersíkok, és távolságuk* $\operatorname{ch}^{-1}|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|$.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggő, akkor $S = T$, és csak $\mathbf{v} = \pm\mathbf{u}$ lehetséges; ekkor a (2) eset áll fenn.

A továbbiakban feltesszük, hogy két különböző hipersíkról van szó. Ekkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek. Az általuk kifeszített $R \leq W$ altérben a q kvadratikus alak mátrixa az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ alkotta bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle & 1 \end{pmatrix},$$

ezért az $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|$-re vonatkozó < 1, $= 1$, illetve > 1 feltételek rendre azt jelentik, hogy q ezen az altéren pozitív definit, elfajuló, illetve negatív definit. Ez pedig 12.1.4 szerint a két hipersík kölcsönös helyzetét határozza meg a tételben állított módon.

(1): Válasszunk az $S \cap T$ metszetaltérben tetszőlegesen egy $\mathbf{x}$ pontot, és állítsunk $\mathbf{x}$-ben a metszetaltérre S-ben, illetve T-ben fekvő merőleges egyeneseket. Ezek számára az $\mathbf{x}$ pontban irányvektorokat kapunk, ha az R pozitív definit altérben $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t $\pi/2$ szöggel elforgatjuk. Emiatt a két hipersík szöge, ami definíció szerint a két egyenes szöge, egyenlő az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ irányú egyenesek szögével, $\cos^{-1}|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|$-vel.

(3): Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ generálta időszerű altér 12.1.5 bizonyítása szerint az S és T közös merőleges egyenesét metszi ki a hiperboloidmodellből. Feltehetjük, hogy $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle > 0$, hiszen $\mathbf{u}$ vagy $\mathbf{v}$ előjelének megváltoztatása sem a hipersíkokat, sem a bizonyítandó állítást nem befolyásolja. Jelöljük c-vel a $\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - 1}$ pozitív számot, és képezzük az

$$\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{c}\,\mathbf{u} - \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{c}\,\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{c}\,\mathbf{v}$$

vektorokat. Közvetlen számolás mutatja, hogy $q(\mathbf{a}) = q(\mathbf{b}) = -1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}\rangle = 0$, valamint $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Emiatt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ (vagy esetleg (-1)-szereseik, ha nem a Z félhiperboloidba, hanem annak ellentettjébe mutatnak) a közös merőleges egyenes metszéspontjai S-sel, illetve T-vel, továbbá e két pont távolsága 10.3.12 szerint valóban $\operatorname{ch}^{-1}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. □

Következő célunk a ciklusok magasabb dimenziós megfelelőinek, a szféráknak az értelmezése. Ehhez segédeszközként a síkbeli eset mintájára a sugársorok általánosítását, a sugárnyalábokat vezetjük be. A sugárnyalábok és a szférák legegyszerűbb tulajdonságait a 11.1. szakaszban tárgyaltakkal analóg módon lehet tisztázni.

12.1.9. Definíció (Sugárnyaláb). Projektív terekben sugárnyalábnak szokás nevezni a tér valamely pontján áthaladó összes egyenesből álló egyeneshalmazt. A közös pontot a sugárnyaláb tartópontjának hívjuk. A kétdimenziós esetben a sugársor és a sugárnyaláb fogalma egybeesik.

A d-dimenziós hiperbolikus tér egyeneseinek egy halmazát sugárnyalábnak nevezzük, ha előáll mint a projektív tér valamely sugárnyalábjának a nyoma a hiperbolikus tér projektív modelljében. A sugárnyaláb egyenesei nyilván páronként egysíkúak.

A projektív sugárnyaláb tartópontjának elhelyezkedése szerint a $\mathbf{H}^d$-beli sugárnyaláb tagjai páronként metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel egyenesek, ennek alapján beszélhetünk metsző, párhuzamos, illetve ultraparallel sugárnyalábokról. Világos, hogy a hiperbolikus tér bármely két különböző, egysíkú egyeneséhez egyértelműen létezik olyan sugárnyaláb, amelynek a két egyenes tagja.

A metsző sugárnyalábot úgy is definiálhatnánk, mint a hiperbolikus tér valamely pontján áthaladó összes egyenesből álló rendszert, a párhuzamos sugársort mint az összes olyan egyenest, amelyhez a tér valamely rögzített végtelen távoli pontja hozzátartozik, és végül az ultraparallel sugárnyalábot mint valamely rögzített hipersíkra (a projektív értelemben vett tartópont polárisára) merőleges összes egyenesből álló sereget. Nyilvánvaló, hogy bármely két metsző sugárnyaláb egybevágó, bármely két párhuzamos sugárnyaláb egybevágó, és bármely két ultraparallel sugárnyaláb egybevágó.

12.1.10. Definíció (Sugárnyalábra támaszkodó hipersíkok). Legyen $\mathcal{S}$ sugárnyaláb $\mathbf{H}^d$-ben. Egy $H \subset \mathbf{H}^d$ hipersíról azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$-re támaszkodik, ha létezik olyan $L \in \mathcal{S}$ egyenes, amelyre $L \subseteq H$.

Ha H az $\mathcal{S}$-re támaszkodik, akkor a projektív modellben a H-t tartó projektív hipersík áthalad az $\mathcal{S}$-et származtató projektív sugárnyaláb tartópontján. Emiatt a H-ra vonatkozó σ_H tükrözés $\mathcal{S}$-et önmagába viszi. Megfordítva, valamely σ_H tükrözés csak a H-ban fekvő és a H-ra merőleges egyeneseket viszi önmagukba, ezért ha $\sigma_H(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, akkor H vagy $\mathcal{S}$-re támaszkodik, vagy pedig $\mathcal{S}$-nek minden H-t metsző tagjára merőleges. Ez azt jelenti, hogy metsző vagy párhuzamos sugárnyaláboknak pontosan a rájuk támaszkodó hipersíkok a szimmetria-hipersíkjai, míg az ultraparallel sugárnyalábok esetében egyetlen további szimmetria-hipersík létezik, mégpedig a közös merőleges hipersík.

A hiperboloidmodellben az $\mathcal{S}$-re támaszkodó hipersíkok könnyen jellemezhetők azzal a feltétellel, hogy normálvektoruk q-ortogonális az $\mathcal{S}$ sugárnyaláb projektív tartópontját reprezentáló vektorra.

12.1.11. Definíció (Sugárnyalábra vonatkozó korrespondencia). Rögzítsünk egy $\mathcal{S}$ sugárnyalábot $\mathbf{H}^d$-ben. Azt mondjuk, hogy az $A, B \in \mathbf{H}^d$ pontok korrespondeáló pontok $\mathcal{S}$-re nézve (jelben $A \simeq_{\mathcal{S}} B$), ha alkalmas $\mathcal{S}$-re

támaszkodó $H \subset \mathbf{H}^d$ hipersíkkal $B = \sigma_H(A)$. Egyenértékű módon úgy is fogalmazhatunk, hogy $A \doteq_{\mathcal{S}} B$ akkor áll fenn, ha vagy A és B egybeesnek, vagy különbözők és a felező merőlegesük $\mathcal{S}$-re támaszkodik.

A $\doteq_{\mathcal{S}}$ reláció nyilvánvaló módon reflexív és szimmetrikus. A tranzitivitás könnyen következik az $\mathcal{S}$-re támaszkodó hipersíkok hiperboloidmodellbeli jellemzéséből, ugyanis $\mathbf{x} \doteq_{\mathcal{S}} \mathbf{y} \doteq_{\mathcal{S}} \mathbf{z}$ esetén mind $\mathbf{y}-\mathbf{x}$, mind $\mathbf{z}-\mathbf{y}$ q-ortogonális a tartópontot reprezentáló vektorra, így $\mathbf{z}-\mathbf{x}$ is az.

12.1.12. Definíció (Szféra, tengely, paraszféra, hiperszféra). A $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus térben szféráknak nevezzük a $\doteq_{\mathcal{S}}$ szerinti ekvivalenciaosztályként előálló ponthalmazokat, ahol $\mathcal{S}$ valamilyen sugárnyaláb $\mathbf{H}^d$-ben.

Az egyelemű ponthalmazok (amelyeket metsző sugárnyalábok származtatnak mint a metszéspont osztályát) is szférák, ezeket elfajuló szféráknak nevezzük. Ettől az esettől eltekintve a szférák végtelen ponthalmazok, sőt amint az pl. 12.1.15-ből kikövetkeztethető lesz, a szférák $(d-1)$-dimenziós alakzatok (differenciálható hiperfelületek) a $\mathbf{H}^d$ térben.

Elfajuló szféra nyilván csak a rá mint tartópontra illesztett metsző sugárnyalábból származhat, továbbá bármely nemelfajuló S szféra is az őt származtató $\mathcal{S}$ sugárnyalábot egyértelműen meghatározza, hiszen tartópontja az S-ből választható pontpárok felező merőleges hipersíkjait tartó projektív hipersíkok egyetlen közös pontja. Az $\mathcal{S}$-hez tartozó egyeneseket az S szféra tengelyeinek nevezzük.

Ha $\mathcal{S}$ metsző sugárnyaláb, akkor az általa létesített szférák nyilván gömbök, amelyeket a hiperbolikus térben az euklideszi geometria mintájára mint a tér valamely pontjától (a középponttól) rögzített (a gömb sugarával egyenlő) távolságra levő pontok halmazát definiáljuk. Esetünkben azokat a gömböket kapjuk, amelyeknek $\mathcal{S}$ tartópontja a középpontja. Az elfajuló szférát is tekinthetjük zérus sugarú gömbnek. (Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben nem használjuk a „hipergömb" elnevezést a $(d-1)$-dimenziós gömbök számára, mert alacsonyabb dimenziójú gömbökkel itt nem foglalkozunk, és ezért nincs szükség erre a megkülönböztetésre.)

Ha az S szférát párhuzamos sugárnyaláb származtatja, akkor S-et paraszférának nevezzük. Az ugyanazon $\mathcal{S}$ párhuzamos sugárnyalábhoz tartozó paraszférákat koncentrikusnak mondjuk, és $\mathcal{S}$ végtelen távoli tartópontját tekintjük közös középpontjuknak.

Az ultraparallel sugárnyalábok által származtatott szférákat hiperszféráknak nevezzük. Legyen $\mathcal{S}$ ultraparallel sugárnyaláb, és H az a hipersík, amely $\mathcal{S}$ minden tagjára merőleges. Ekkor az $\mathcal{S}$-re támaszkodó hipersíkok pontosan a H-ra merőleges hipersíkok, ezért a rájuk vonatkozó tükrözések H-t önmagára képezik. Ha S egy $\mathcal{S}$ által származtatott hiperszféra, akkor S pontjainak a H-től mért távolságát az $\mathcal{S}$-hez tartozó egyenesek mentén mérjük, és emiatt S

vagy magával a H hipersíkkal azonos, vagy pedig az egyik H szerinti féltérben a H-tól valamilyen rögzített pozitív távolságra levő pontokból áll. Ezért a hiperszférákat távolságfelületeknek is nevezik. A H hipersíkot a hiperszféra alaphipersíkjának, pontjainak H-tól való távolságát a hiperszféra sugarának hívjuk.

A $d = 2$ esetben a sugársorokat és a ciklusokat kapjuk a sugárnyalábok, illetve szférák speciális eseteként. A következő fogalom is a ciklusok és szférák közti kapcsolatot emeli ki.

12.1.13. Definíció (Főciklus). Legyen $S \subset \mathbf{H}^d$ szféra. Ha $P \subset \mathbf{H}^d$ tetszőleges kétdimenziós altér, amely tartalmazza S-nek legalább az egyik tengelyét, akkor a $C = P \cap S$ halmaz nyilván ciklus a P hiperbolikus síkban, mégpedig az, amelyet az S tengelyeiből álló sugárnyalábnak a P-be eső része mint sugársor származtat. Ha S gömb, akkor C kör (mégpedig S egy főköre, tehát S-sel egyenlő sugarú), ha S paraszféra, akkor C paraciklus, és ha S hiperszféra, akkor C ugyanakkora sugarú hiperciklus. Az ilyen módon előálló ciklusokat S főciklusainak nevezzük.

A főciklusok az egyenesek szerepét játsszák a szféra belső geometriájában (l. 12.3). Annyit már most megállapíthatunk, hogy a szféra bármely két különböző (és gömb esetében nem átellenes) pontjához egy és csak egy olyan főciklus található, amely a két pontot tartalmazza.

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy ha a P metsző sík nem tengelyirányú, és nem is merőlegesen metszi S valamelyik pontjában az ahhoz a ponthoz tartozó tengelyt, a $P \cap S$ halmaz akkor is ciklus: gömb esetében főkörnél kisebb kör, paraszféra esetében mindig kör, r sugarú hiperszféra esetén hiperciklus, paraciklus, vagy kör aszerint, hogy $P \cap S$ egy pontjában a tengely és P szöge a $\Pi(r)$ párhuzamossági szögnél kisebb, egyenlő $\Pi(r)$-rel, illetve nagyobb nála.

Az alábbi két állítás a ciklusokra vonatkozóan 11.1.11-ben és 11.1.13-ban tisztázott tulajdonságok magasabb dimenziós analogonjai; bizonyításuk is pontosan azok mintájára történhet.

12.1.14. Állítás. *Bármely két $\mathbf{H}^d$-beli paraszféra egybevágó. Két gömb, illetve két hiperszféra akkor és csak akkor egybevágó, ha sugaruk egyenlő.* □

12.1.15. Állítás. *Tekintsük a $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus tér $Z \subset W$ hiperboloidmodelljét a $(d+1)$-dimenziós W Minkowski-térben.*

(1) *A szférák pontosan a modell alaphalmazául szolgáló Z félhiperboloid nemüres metszetei a W tér affin hipersíkjaival.*

(2) *Két szféra tengelyei akkor és csak akkor alkotják ugyanazt a sugárnyalábot, ha az őket kimetsző affin hipersíkok párhuzamosak.*

(3) *Legyen valamely $T \subset W$ affin hipersíkra $T \cap Z \neq \emptyset$. Ha T állása térszerű, akkor a $T \cap Z$ szféra gömb (amely esetleg egyetlen pont is lehet), ha fényszerű, akkor paraszféra, ha időszerű, akkor hiperszféra.*

Bizonyítás: Csak annyiban kell eltérni 11.1.13 bizonyításától, hogy (a sugársor tagjai helyett) egy sugárnyalábra támaszkodó hipersíkok normálvektorairól állapítjuk meg, hogy ezek a tartópontot repezentáló vektorra q-ortogonális vektorok. □

A 12.1.15. Állítás megkönnyíti a szférák által határolt tartományok bevezetését.

12.1.16. Definíció (Szfératartományok). Legyen $S \subset \mathbf{H}^d$ nemelfajuló és hipersíktól különböző szféra. Állítsuk elő S-et 12.1.15 szerint $S = T \cap \cap Z$ alakban, és legyen F, illetve $\overline{F}$ a T affin hipersík által határolt, origót tartalmazó nyílt, illetve zárt féltér W-ben.

Ha S gömb, akkor $F \cap Z$ és $\overline{F} \cap Z$ az S határolta nyílt, illetve zárt gömbtest. A hiperboloidmodellben számolva könnyen ellenőrizhető, hogy ezek pontosan a középponttól S sugaránál kisebb, illetve legfeljebb sugárnyi távolságra levő $\mathbf{H}^d$-beli pontokból állnak.

Ha S paraszféra, akkor az $F \cap Z$ és $\overline{F} \cap Z$ halmazokat az S határolta nyílt, illetve zárt paraszféra-tartománynak nevezzük.

Ha S hiperszféra, akkor jelöljük S'-vel az ugyanazon alaphipersíkkal és ugyanakkora sugárral adott, csak S-hez képest az ellenkező féltérben fekvő hiperszférát. Tartozzon S'-höz a T' affin hipersík, és a T' határolta, origót tartalmazó F' nyílt, illetve $\overline{F'}$ zárt féltér. (A W vektortér részhalmazaiként nyilván $S' = -S$, $T' = -T$, $F' = -F$, és $\overline{F'} = -\overline{F}$.) Az S-hez tartozó nyílt, illetve zárt hiperszféra-tartománynak nevezzük az $F \cap F' \cap Z$, illetve $\overline{F} \cap \overline{F'} \cap Z$ halmazokat. Ezek a tartományok nyilván azokból a pontokból állnak, amelyek az alaphipersíktól a hiperszféra sugaránál kisebb, illetve legfeljebb sugárnyi távolságra vannak.

Érdekes kapcsolatot teremt a hipersíkok és a szférák között a térbeli merőleges vetítés.

12.1.17. Definíció (Merőleges vetítés hipersíkra). Legyen H hipersík $\mathbf{H}^d$-ben. A 10.1.7. Állítás alapján a tér bármely A pontjához egyértelműen hozzárendelhető az A-n áthaladó, H-ra merőleges egyenesnek a H-val vett $p_H(A)$ döféspontja; ezzel a $p_H : \mathbf{H}^d \to H$ merőleges vetítést értelmeztük.

Könnyen látható, hogy a hiperboloidmodellben a p_H leképezést a W térnek a H-t előállító V lineáris hipersíkra történő, $V^\perp$ irányú lineáris vetítése származtatja.

Ha H' további hipersík $\mathbf{H}^d$-ben, akkor a $p_H|_{H'} : H' \to H$ megszorítást nevezzük a H' hipersík H-ra történő merőleges vetítésének. Ha H' nem merőleges H-ra, akkor ez a leképezés injektív H'-ről H-ba. (A merőleges esetben $p_H|_{H'}$ nyilván a H' merőleges vetítése a $H' \cap H$ metszetaltérre mint H'-beli hipersíkra.) Ha $H' \neq H$, akkor a $p_H|_{H'} : H' \to H$ vetítés nem szürjektív, és a képhalmazát az alábbi tétel írja le.

12.1.18. Tétel. *Legyen H és H' két különböző és egymásra nem merőleges hipersík $\mathbf{H}^d$-ben. Vetítsük a H' hipersíkot a p_H merőleges vetítéssel a H hipersíkra.*

(1) *Ha H és H' metszők és hajlásszögük α, akkor a vetítés képhalmaza az a nyílt hiperszféra-tartomány H-ban, amelynek az alaphipersíkja $H \cap H'$, sugara a $\Delta(\alpha)$ párhuzamossági távolság.*

(2) *Ha H és H' párhuzamosak, akkor a vetítés képhalmaza nyílt paraszféra-tartomány H-ban.*

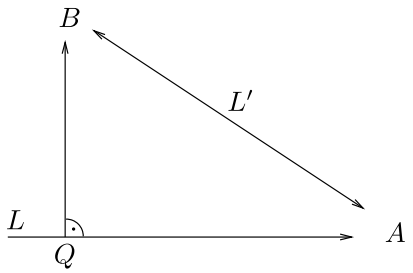
(3) *Ha H és H' ultraparallel hipersíkok és távolságuk a, akkor a vetítés képhalmaza nyílt gömbtest H-ban, amelynek a középpontja a két hipersík közös merőleges egyenesének a döféspontja H-val, sugara pedig* $\operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{cth} a)$.

Bizonyítás: (1): A tér előáll a $H \cap H'$ altérre merőleges, páronként diszjunkt kétdimenziós p_H-invariáns alterek egyesítéseként, ezért elegendő egyetlen ilyen síkon belül tisztázni, hogy egy H-beli pont akkor és csak akkor áll elő vetületként, ha a metszésponttól mért távolsága az α-hoz tartozó párhuzamossági távolságnál kisebb. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen $x < \Delta(\alpha)$ azzal egyenértékű, hogy $\alpha < \Pi(x)$, ami pontosan akkor áll, ha a metszésponttól x távolságban H-ra állított merőleges metszi H'-t.

(2): Jelöljük A-val a H és H' párhuzamos hipersíkok közös végtelen távoli pontját. Előrebocsátjuk, hogy azokkal az M alterekkel szemben, amelyeknek A végtelen távoli pontja, H és H' „egyformán” viselkedik: ha M metszi H és H' közül az egyiket, akkor a másikat is metszi, mégpedig ugyanakkora szögben (azokban az esetekben, amikor a szög definiálva van, tehát ha M hipersík, vagy kétdimenziós altér). Ez abból látható rögtön, hogy ∂H és $\partial H'$ érintkező hipergömbök $\partial\mathbf{H}^d$-ben, ezért a konform modellre hivatkozva az A pontban a metszés ténye és a metszés szöge ugyanazt jelenti H és H' esetében.

Legyen $\mathcal{S}$ az a H-beli párhuzamos sugárnyaláb, amelynek az A pont a tartópontja. Szemeljünk ki tetszőlegesen egy $L \in \mathcal{S}$ egyenest. Azt állítjuk, hogy

L-en létezik egy jól meghatározott Q pont azzal a tulajdonsággal, hogy a QA nyílt félegyenes minden pontja vetületi pont, míg a komplementer zárt félegyenes pontjai nem tartoznak H' vetületéhez.



Ehhez elegendő azt az M kétdimenziós alteret tekinteni, amely H-ra merőleges és H-t az L egyenesben metszi. Az A pont $L \subset M$ miatt M-nek is végtelen távoli pontja, ezért M a H' hipersíkot is metszi egy L-lel párhuzamos L' egyenesben. Bocsássunk merőlegest az L' másik, A-tól különböző végtelen távoli B pontjából L-re, legyen ennek a merőlegesnek a talppontja Q. Ezzel előállítottuk a kétszeresen aszimptotikus ABQ derékszögű háromszöget. Világos, hogy ha az AQ oldal belső pontjában állítunk merőlegest L-re, akkor az belemetsz a háromszögbe, és így metszi az AB oldalt, azaz az L' egyenest, ha pedig akár Q-ban, akár azon túl, akkor az elkerüli a háromszög belsejét és L'-t.

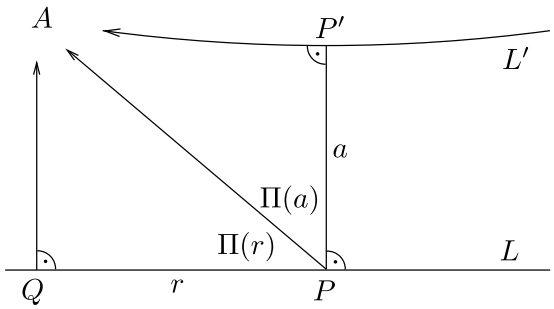
Legyen most J tetszőleges olyan hipersík a $(d-1)$-dimenziós H hiperbolikus térben, amely az $\mathcal{S}$ sugárnyalábra támaszkodik, és legyen K az a hipersík $\mathbf{H}^d$-ben, amely merőleges H-ra, és amelyre $J = H \cap K$. Ekkor az előrebocsátottak értelmében K a H' hipersíkot is merőlegesen metszi egy $(d-1)$-dimenziós J' altérben. Jelölje σ_J, σ_K, illetve $\sigma_{J'}$ a megfelelő hipersíkra vonatkozó tükrözéseket rendre a H, $\mathbf{H}^d$, illetve H' térben. Ekkor a $H \perp K \perp H'$ merőlegességek miatt minden $P \in H'$ pontra

$$\sigma_J\big(p_H(P)\big) = \sigma_K\big(p_H(P)\big) = p_H\big(\sigma_K(P)\big) = p_H\big(\sigma_{J'}(P)\big)$$

érvényes. Ez azt mutatja, hogy két $\mathcal{S}$-re nézve korrespondeáló H-beli pont közül vagy mindkettő vetületi pont, vagy egyik sem. Ebből az következik, hogy a $p_H(H')$ halmaz pontosan az L egyenesen megtalált vetületi pontokkal $\mathcal{S}$-re nézve korrespondeáló pontokból áll, azaz a Q ponton átmenő paraszféra által meghatározott nyílt paraszféra-tartomány.

(3): Jelölje T a H és H' ultraparallel hipersíkok közös merőleges egyenesét, a döféspontok legyenek P, illetve P'. Ismét elegendő egy olyan M kétdimenziós altérre szorítkozni, amely T-t tartalmazza, és tisztázni, hogy az $L = H \cap \cap M$ egyenes pontjai közül melyek állnak elő vetületként. Az $L' = H' \cap M$

egyenes egyik végtelen távoli pontjából, A-ból bocsássunk merőlegest L-re, a talppont legyen Q. Ha az M síkban L-re egy a P ponthoz Q-nál közelebbi pontban állítunk merőlegest, akkor az belemetsz a PQA egyszeresen aszimptotikus háromszögbe, ezért annak PA oldalát, és emiatt a $PP'A$ egyszeresen aszimptotikus háromszög $P'A$ oldalát is metszi. A Q-ban vagy Q-nál távolabbi pontokban állított merőlegesek hasonló okokból diszjunktak L'-től. Az L egyenesen tehát pontosan a P-hez r-nél közelebb levő pontok állnak elő vetületként, ahol r a P és Q távolsága.



A két derékszögű, egyszeresen aszimptotikus háromszögből leolvasható, hogy a QPA szög a $\Pi(r)$ párhuzamossági szöggel, a $P'PA$ szög pedig $\Pi(a)$-val egyenlő. A két szög összege $\pi/2$, ezért $\sin^2\Pi(a) + \sin^2\Pi(r) = 1$, amiből 11.3.7 felhasználásával

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 r} = 1$$

következik. Innen $\operatorname{ch} r$-et kifejezve a $\operatorname{ch} r = \operatorname{cth} a$ képletet kapjuk. A P ponton átmenő H-beli egyeneseken tehát a P-hez $r = \operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{cth} a)$-nál közelebb levő pontok állnak elő vetületként. A $p_H(H')$ halmaz tehát a P körüli r sugarú nyílt gömbtest H-ban. □

12.2. A hiperbolikus tér izometriái

A 10.4. szakaszban bevezetett $I(\mathbf{H}^d)$ transzformációcsoportot most részletesebb elemzésnek vetjük alá. A $d = 2$ esetet már tisztáztuk 11.2-ben, ezért most általában a $d \geq 3$ feltevéssel élünk. Célunk egyrészt konkrét izometriatípusok leírása és származtatása, másrészt a lehetséges izometriák geometriai természetű áttekintése és osztályozása. Ebben segítséget ad az $I(\mathbf{H}^d)$ csoport konkrét értelmezése mind a projektív, mind a konform, mind a hiperboloid-modellben.

Az $O(d)$ ortogonális csoport izomorf példányai részcsoportként megjelennek $I(\mathbf{H}^d)$-ben mint a pontok stabilizátorai (l. 10.1.9). Az $O(d) \leq I(\mathbf{H}^d)$ jelölés nem valamely konkrét részcsoportra utal (hacsak ki nem tüntetjük $\mathbf{H}^d$ valamely pontját „origó" gyanánt), hanem csak konjugáltság erejéig van meghatározva, és a tér pontjaihoz más-más konjugált példánya tartozik. Hasonló módon lehet alacsonyabb dimenziós ortogonális csoporttal izomorf részcsoportokat is származtatni $I(\mathbf{H}^d)$-ben.

12.2.1. Definíció (Altér stabilizátora és pontonkénti stabilizátora). Legyen $M \subseteq \mathbf{H}^d$ altér, $k = \dim M$. Az M altér stabilizátorán, illetve pontonkénti stabilizátorán az alábbi $I(\mathbf{H}^d)_M$-mel, illetve $I(\mathbf{H}^d)^M$-mel jelölt $I(\mathbf{H}^d)$-beli részcsoportot értjük:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{H}^d)_M &= \{f \in I(\mathbf{H}^d) : f(M) = M\}\,, \\ I(\mathbf{H}^d)^M &= \{f \in I(\mathbf{H}^d) : \text{minden } P \in M\text{-re } f(P) = P\}\,. \end{aligned}$$

Ha M egyetlen pont, akkor $I(\mathbf{H}^d)_M = I(\mathbf{H}^d)^M = O(d)$, és általában $I(\mathbf{H}^d)^M \leq I(\mathbf{H}^d)_M$.

A hiperboloidmodellben legyen $V \leq W$ az M-et előállító $(k+1)$-dimenziós időszerű altér, ekkor a $W = V \oplus V^\perp$ q-ortogonális felbontásban $V^\perp$ térszerű, ezért $I(\mathbf{H}^d)^M = O(V^\perp) = O(d-k)$. A háromdimenziós térbeli egyenes körüli forgatásokat szem előtt tartva erre a részcsoportra úgy gondolhatunk, mint „az M altér körül" végrehajtott, M-et pontonként fixen tartó ortogonális transzformációk csoportjára.

Létezik olyan egységes eljárás, amellyel a $\mathbf{H}^d$-beli alterek izometriái kiterjeszthetők a befoglaló $\mathbf{H}^d$ tér izometriáivá. Ezt is a hiperboloidmodell és az iménti q-ortogonális felbontás segítségével lehet a legegyszerűbben értelmezni.

12.2.2. Definíció (Izometria kanonikus kiterjesztése). Legyen $M \subseteq \mathbf{H}^d$ altér, és legyen adott egy $g \in I(M)$ izometria. A hiperboloidmodellben M-et egy $V \leq W$ időszerű altér, g-t pedig egy $\varphi \in O^+(V)$ pozitív Lorentz-transzformáció állítja elő. A $W = V \oplus V^\perp$ q-ortogonális felbontást tekintve $\varphi \oplus id_{V^\perp} \in O^+(W)$. A g kanonikus kiterjesztésén a $\varphi \oplus id_{V^\perp}$ pozitív Lorentz-transzformáció létesítette $\mathbf{H}^d$-beli izometriát értjük.

A kanonikus kiterjesztés M-re megszorítva az adott g izometriát adja vissza, az ortogonális kiegészítő irányban pedig nem mozdít semmit. Szemléletesen úgy gondolhatjuk, hogy az M-en adott izometria magával viszi az M-hez mereven rögzített egész teret is.

A definícióból rögtön következik, hogy bármely M-beli hipersíkra vonatkozó M-beli tükrözés kanonikus kiterjesztése hipersíkra vonatkozó tükrözés $\mathbf{H}^d$-ben. Ebből pedig az következik, hogy a konform modellekben a kanonikus kiterjesztés azonos az 5.3.9-ben értelmezett Poincaré-kiterjesztéssel ($d - \dim M$ lépésben iterálva).

A kanonikus kiterjesztés révén injektív $I(M) \to I(\mathbf{H}^d)$ homomorfizmust kapunk. Ezt használva mostantól úgy tekintjük, hogy az $I(M)$ izometriacsoportot részcsoportként tartalmazza az $I(\mathbf{H}^d)_M$ stabilizátor.

12.2.3. Állítás

$$I(\mathbf{H}^d)_M = I(M) \times I(\mathbf{H}^d)^M .$$

Bizonyítás: A már többször használt $W = V \oplus V^\perp$ q-ortogonális felbontásból nyilvánvaló, hogy az $f \in I(\mathbf{H}^d)_M$-et származtató W-beli pozitív Lorentz-transzformáció előáll $\varphi \oplus \psi$ alakban, ahol φ az $f|_M$ izometriát indukálja, és $\psi \in I(\mathbf{H}^d)^M$. A kívánt izomorfizmus az $f \mapsto (f|_M, \psi)$ hozzárendelés, inverzét a kanonikus kiterjesztés és az M körüli ortogonális transzformáció kompozíciója adja. □

12.2.4. Példa. A 10.1.11-ben tetszőleges dimenzióban értelmezett hiperbolikus eltolásra ráismerhetünk mint az egyenes önmagában történő eltolásának kanonikus kiterjesztésére.

Ebben a példában egyértelműen visszakereshető, hogy mi az a legszűkebb altér, amely izometriájának a kanonikus kiterjesztéséről van szó. Általában nem ez a helyzet, ilyen alteret nem mindig lehet egyértelműen találni. Erre a következő transzformáció mutat példát.

12.2.5. Definíció (Paraciklikus eltolás magasabb dimenzióban). A $\mathbf{H}^d$ téren paraciklikus eltolásnak nevezzük azokat az izometriákat, amelyek előállnak valamely kétdimenziós altérbeli paraciklikus eltolás kanonikus kiterjesztéseként.

A paraciklikus eltolásokat a konform féltérmodellben lehet a legjobban szemléltetni, mégpedig úgy, hogy a ∞ pont a transzformáció fixpontja. A kétdimenziós esetben láttuk (l. pl. 8.7.7), hogy a ∞ ponttól megfosztott ideális határon, amely az affin egyenes struktúráját viseli, a paraciklikus eltolások pontosan az eltolások. A d-dimenziós esetben a paraciklikus eltolásokat mint ezek Poincaré-kiterjesztéseit kapjuk, amelyek szintén eltolások a ∞ pontjától megfosztott inverzív térben, azaz a $(d-1)$-dimenziós euklideszi térben.

12.2.6. Példa. Tegyük föl, hogy az $f \in I(\mathbf{H}^d)$ paraciklikus eltolás az $M \subset \subset \mathbf{H}^d$ kétdimenziós altérben adott paraciklikus eltolás kanonikus kiterjesztése, és az $A \in \partial M$ végtelen távoli pont az f fixpontja. Ekkor bármely olyan M' kétdimenziós altér f-invariáns, amely az A irányában párhuzamos M-mel. Emellett $f|_{M'}$ is paraciklikus eltolás M'-ben, és f az $f|_{M'}$-nek is kanonikus kiterjesztése. Mindez rögtön következik abból, hogy itt tulajdonképpen a $\partial\mathbf{H}^d - \{A\}$ euklideszi tér eltolásairól van szó.

12.2.7. Definíció (Elliptikus, parabolikus, hiperbolikus izometria) Legyen $f \in I(\mathbf{H}^d)$. Azt mondjuk, hogy f elliptikus, ha van fixpontja $\mathbf{H}^d$-ben. Ha f-nek nincs $\mathbf{H}^d$-ben fixpontja, és pontosan egy, illetve pontosan két fixpontja van a $\partial\mathbf{H}^d$ ideális határon, akkor f-et parabolikus, illetve hiperbolikus izometriának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy az elliptikus izometriák pontosan azok, amelyek a pontok stabilizátoraihoz tartoznak, azaz valamelyik $O(d)$ részcsoporthoz tartoznak. Parabolikus izometriára a paraciklikus eltolások, hiperbolikusra az eltolások adnak egyszerű példát.

Megjegyzés. Ezeket az eredetileg a projektív egyenes transzformációival kapcsolatos elnevezéseket már alkalmaztuk a hiperbolikus síkgeometriában (l. 11.2.4). Figyeljünk arra, hogy a most bevezetett szóhasználat csak a sík nemidentikus mozgásai esetében (tehát csak az irányítástartó síkbeli esetben) esik egybe a projektív geometriában használt definícióval. A síkbeli tengelyes tükrözések hiperbolikus projektivitást indukálnak az ideális határon, míg most elliptikus transzformációnak minősülnek.

12.2.8. Tétel. *A hiperbolikus tér bármely izometriája vagy elliptikus, vagy parabolikus, vagy hiperbolikus.*

Bizonyítás: Először tisztázzuk, hogy bármely izometriának van fixpontja a tér $\overline{\mathbf{H}^d}$ lezárásában. Ez a Brouwer-féle fixponttétel közvetlen következménye, hiszen $\overline{\mathbf{H}^d}$ a d-dimenziós zárt gömbtesttel homeomorf, és az izometriák folytonosak (sőt homeomorfizmusok) az egész $\overline{\mathbf{H}^d}$-n.

Ebből rögtön következik, hogy ha valamely f izometriának legfeljebb két végtelen távoli fixpontja van, akkor f elliptikus, parabolikus, vagy hiperbolikus.

Ha f-nek kettőnél több fixpontja van $\partial\mathbf{H}^d$-ben, akkor válasszunk ki hármat a végtelen távoli fixpontok közül. Ez a három pont egy M kétdimenziós alteret feszít ki. A ∂M projektív egyenesen az $f|_{\partial M}$ projektivitásnak legalább három fixpontja van, ezért $f|_{\partial M}$ identikus. Emiatt M invariáns altere f-nek. Az $f|_{\partial M}$ leképezés egyértelműen meghatározza f-et az M halmazon, ezért ekkor $f|_M$ is identikus. Így f-nek van $\mathbf{H}^d$-ben is fixpontja, tehát elliptikus. □

12.2.9. Tétel. *A hiperbolikus tér bármely izometriájához található olyan invariáns altér, amely legfeljebb kétdimenziós.*

Bizonyítás: Legyen $f \in \mathbf{H}^d$. Ha f elliptikus, azaz van fixpontja $\mathbf{H}^d$-ben, akkor az 0-dimenziós invariáns altér. Ha f hiperbolikus, akkor két végtelen távoli fixpontja is van, és az ezeket összekötő egyenes egydimenziós invariáns altér.

Legyen végül f parabolikus, egyetlen fixponttal $\partial\mathbf{H}^d$-ben. Használjuk az U konform féltérmodellt. Ekkor ∂U az $(\mathbf{R}^{d-1})^+$ inverzív tér, amelyen f Möbius-transzformáció. Feltehetjük, hogy f fixpontja a féltérmodell ∞ pontja. Ekkor

az 5.3.6. Állítás alapján f hasonlósági transzformáció $\mathbf{R}^{d-1}$-ben. Miután f-nek nincs fixpontja $\mathbf{R}^{d-1}$-ben, ez a transzformáció 4.6.7 alapján csak euklideszi egybevágóság lehet. Az euklideszi tér izometriáinak szerkezetéről szóló 4.4.6. Tételből következik, hogy bármely fixpontmentes euklideszi egybevágóság eltolásként hat egy legalább egydimenziós affin altéren, és ezért található hozzá invariáns egyenes. Ehhez az egyeneshez a ∞ pontot hozzávéve U-beli kétdimenziós invariáns altér ideális határát kapjuk. □

Ha a hiperbolikus tér adott f izometriájához kiszemelünk egy lehető legkisebb dimenziójú M invariáns alteret, akkor tehát három eset lehetséges:

- M egyetlen pont, és f ezt a pontot fixen tartó elliptikus izometria, vagy
- M egyenes, és f hiperbolikus izometria, amely ezt az egyenest önmagában eltolja, vagy pedig
- M kétdimenziós altér, és f parabolikus izometria, amely M-en paraciklikus eltolás.

A második esetben M választása egyértelmű, az első és a harmadik esetben általában nem.

A 12.2.9. Tétel és a 12.2.3. Állítás összevetésével általános képet kapunk $\mathbf{H}^d$ izometriáinak szerkezetéről.

12.2.10. Következmény. *A hiperbolikus tér bármely izometriája az alábbi három típus valamelyike:*

(1) *valamely pontot fixen tartó ortogonális transzformáció,*

(2) *eltolás egy egyenenes mentén, komponálva az egyenes körüli valamilyen ortogonális transzformációval,*

(3) *paraciklikus eltolás egy kétdimenziós altérben, komponálva ezen altér körüli valamilyen ortogonális transzformációval.* □

A $d = 3$ esetben a szóba jövő ortogonális transzformációk áttekintésével a háromdimenziós hiperbolikus tér egybevágóságainak geometriai osztályozását kaphatjuk meg. Az alábbi következmény felsorolja a lehetséges eseteket. Az egyes transzformációfajtákat az euklideszi tér esetére 4.4-ben bevezetett fogalmak értelemszerű módosítása alapján nevezzük el.

12.2.11. Következmény. *A háromdimenziós hiperbolikus térben bármely mozgás vagy egyenes körüli forgatás, vagy eltolás, vagy csavarmozgás, vagy paraciklikus eltolás. Bármely irányításváltó egybevágóság vagy síkra vonatkozó tükrözés, vagy forgatva tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés, vagy paraciklikus csúsztatva tükrözés.* □

Megjegyzés. A 10.2.16-beli második példa alapján a konform féltérmodell használata a háromdimenziós tér mozgáscsoportját a $PSL(2, \mathbf{C})$ csoporttal azonosítja. A komplex projektív egyenes esetében is bevezettük a parabolikus és a hiperbolikus projektivitás fogalmát. A tér mozgásai közül a forgatások, az eltolások és a csavarmozgások indukálnak hiperbolikus (vagy loxodromikus, l. 8.7.7) projektivitást az ideális határon, a paraciklikus eltolások parabolikusat. Ez sincs teljes összhangban az általános hiperbolikus geometriai terminológiával, amely szerint a forgatások elliptikusak.

12.2.12. Definíció (Speciális részcsoportok). Bizonyos $I(\mathbf{H}^d)$-beli részcsoportok háromféle típusát értelmezzük.

Ha $P \in \mathbf{H}^d$, akkor G_P-vel jelöljük az $I(\mathbf{H}^d)_P$ stabilizátort, vagyis az $O(d)$ ortogonális részcsoport egy példányát. A G_P csoportot azokra a hipersíkokra vonatkozó tükrözések generálják, amelyek tartalmazzák a P pontot.

Ha $H \subset \mathbf{H}^d$ hipersík, akkor G_H-val jelöljük az $I(H)$ izometriacsoportot, amely az izometriák kanonikus kiterjesztése révén $I(\mathbf{H}^d)$ részcsoportja. Nyilván $I(H) \cong I(\mathbf{H}^{d-1})$, és $I(H)$-t azokra a hipersíkokra vonatkozó tükrözések generálják, amelyek merőlegesek H-ra.

Ha $A \in \partial\mathbf{H}^d$, akkor legyen G_A azokra a hipersíkokra vonatkozó tükrözések által generált részcsoport $I(\mathbf{H}^d)$-ben, amelyeknek A pontja. A konform féltérmodellt használva és az A pontot ∞-nek választva ez a csoport azonos a tükrözések generálta részcsoporttal az $\mathcal{M}^{d-1}$ Möbius-csoportban, vagyis az $I(\mathbf{R}^{d-1})$ euklideszi izometriacsoporttal.

12.2.13. Tétel. *A hiperbolikus térben a szférák pontosan a 12.2.12-ben definiált speciális részcsoportok orbitjai.*

Bizonyítás: Mindegyik speciális részcsoport tranzitívan önmagában mozgat egy-egy sugárnyalábot: G_P a P tartópontú metsző sugárnyalábot, G_H a H-ra merőleges egyenesekből álló ultraparallel sugárnyalábot, G_A pedig az A tartópontú párhuzamos sugárnyalábot. A szóban forgó csoportokat a sugárnyalábra támaszkodó hipersíkokra vonatkozó tükrözések generálják, ezért a csoportok megőrzik a sugárnyaláb által létesített korrespondenciát. Ebből a tétel állítása azonnal következik. □

12.3. A szférák belső geometriája

A gömbi geometria kapcsán 0.3-ban már használtuk a belső geometria kifejezést anélkül, hogy formálisan definiáltuk volna. Most pontos értelmet adunk a belső geometria fogalmának, és azt a hiperbolikus tér szféráinak konkrét példáján vizsgáljuk meg.

A definíciót általános keretek között, metrikus terek körében fogalmazzuk meg. Technikai okokból most megengedjük, hogy egy metrikus tér metrikája a $+\infty$ értéket is felvehesse. Ha a $+\infty$ jellel kapcsolatban az összeadásra és a rendezésre vonatkozó szokásos megállapodásokat tartjuk érvényben, akkor a metrikus térben $+\infty$-nek mint távolságnak a jelenléte semmilyen lényeges változást nem hoz magával a metrikus terek elméletében és alkalmazásában.

12.3.1. Definíció (Belső metrika). Legyen (X, ρ) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy ρ belső metrika, ha a tér bármely két $x, y \in X$ pontjához és bármely $\varepsilon, \delta > 0$-hoz $\rho(x, y) < +\infty$ esetén létezik olyan n természetes szám, és létezik olyan $x = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = y$ pontsorozat X-ben, hogy

$$\text{minden } i \in \{1,2,\ldots,n\}\text{-re } \rho(x_{i-1}, x_i) < \delta \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1}, x_i) < \rho(x, y) + \varepsilon\,.$$

12.3.2. Példák. Az euklideszi, a gömbi és a hiperbolikus terek metrikája mind belső metrika. Ez nyilvánvaló abból, hogy ezekben a terekben a távolságokat szakaszok reprezentálják, amelyek mentén a távolságmérés additív.

Hasonló elven általánosságban is mondhatjuk, hogy ha valamely metrikus térben a távolságot a pontokat összekötő alkalmas folytonos görbék ívhossza adja meg, akkor a tér metrikája belső metrika. A Riemann-féle terekben a távolság általában az ívhossz fogalmán keresztül van értelmezve, ezért a Riemann-terek automatikusan belső metrikával vannak ellátva.

Ha a tér metrikájának egy altérre való megszorítását tekintjük, akkor ez általában nem belső metrika, még akkor sem, ha a befoglaló téré az. Ha például az euklideszi síkból elhagyunk véges sok pontot, akkor a maradék halmazon az örökölt metrika belső metrika, míg ha egy pozitív hosszúságú szakaszt hagyunk el, akkor nem az.

A következő tétel tisztázza, hogyan lehet metrikus terekhez természetes módon belső metrikát rendelni.

12.3.3. Tétel. *Ha (X, ρ) tetszőleges metrikus tér, akkor egyértelműen létezik X-en olyan ρ_b belső metrika, amelyre $\rho \le \rho_b$, és amely minimális ezekre a tulajdonságokra nézve, azaz $\rho_b \le \sigma$ teljesül, valahányszor σ olyan belső metrika X-en, melyre $\rho \le \sigma$.*

Bizonyítás: Tetszőlegesen adott $\delta > 0$ mellett legyen $x, y \in X$-re

$$\rho_\delta(x, y) =$$
$$= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1}, x_i) \,:\, n \in \mathbf{N},\ x_0 = x,\ x_n = y,\ \rho(x_{i-1}, x_i) < \delta\,(i = 1, \ldots, n) \right\}.$$

(Ha a jobb oldalon álló halmaz üres, mert nem létezik δ-nál kisebb lépésközű pontsorozat x és y között, akkor az infimum természetesen $+\infty$.) Ha $\delta_1 \leq \leq \delta_2$, akkor $\rho_{\delta_1} \geq \rho_{\delta_2}$, mert ρ_{δ_2} bővebb halmaz infimumaként áll elő. Ezért rögzített x és y mellett a $\rho_\delta(x,y)$ kifejezés δ függvényében monoton fogy. Vehetjük tehát a határértékét $\delta \to 0$ mellett:

$$\rho_b(x,y) = \lim_{\delta \to 0} \rho_\delta(x,y)\,,$$

ami a δ-ban való monotonitás miatt $\sup\{\rho_\delta(x,y) : \delta > 0\}$-val egyenlő. Rögtön látható, hogy minden δ-ra $\rho \leq \rho_\delta$, és hogy ρ_δ metrika X-en (például a háromszög-egyenlőtlenség a sorozatok összefűzéséből adódik a ρ-ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből). Ezért egyrészt $\rho \leq \rho_b$, másrészt miután metrikák supremumaként áll elő, ρ_b maga is metrika.

Megmutatjuk, hogy ρ_b belső metrika. Ehhez tegyük föl, hogy valamely $x, y \in \in X$-re $\rho_b(x,y) < +\infty$, és legyenek ε és δ tetszőleges pozitív számok. Miután $\rho_b(x,y)$ véges, $\rho_\delta(x,y)$ is véges, és ezért létezik olyan n temészetes szám és léteznek olyan $x = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = y$ pontok X-ben, hogy minden $i = = 1, \ldots, n$-re $\rho(x_{i-1}, x_i) < \delta$. Most válasszunk olyan δ' pozitív számot, hogy minden $i = 1, \ldots, n$-re

$$\rho_b(x_{i-1}, x_i) < \rho_{\delta'}(x_{i-1}, x_i) + \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesüljön. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_b(x_{i-1}, x_i) \;<\; \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{\delta'}(x_{i-1}, x_i)\right) + \varepsilon \;\leq\; \rho_{\delta'}(x,y) + \varepsilon \;\leq\; \rho_b(x,y) + \varepsilon\,,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Tegyük fel végül, hogy valamely σ belső metrikára $\rho \leq \sigma$ érvényes. Belátjuk, hogy tetszőlegesen választott $x, y \in X$ pontok és $\varepsilon > 0$ mellett $\rho_b(x,y) < < \sigma(x,y) + \varepsilon$. Ebből x, y és ε tetszőleges volta miatt $\rho_b \leq \sigma$ következik.

Ha $\sigma(x,y) = +\infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha pedig $\sigma(x,y)$ véges, akkor bármely $\delta > 0$-hoz található (δ-tól függő) $n \in \mathbf{N}$ és $x = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = y$ X-beli pontsorozat úgy, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_{i-1}, x_i) < \sigma(x,y) + \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennáll. Ekkor ρ_δ definíciója és $\rho \leq \sigma$ miatt

$$\rho_\delta(x,y) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1}, x_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_{i-1}, x_i) \;\leq\; \sigma(x,y) + \varepsilon\,.$$

Miután ez az egyenlőtlenség minden $\delta > 0$-ra érvényes, $\rho_b(x,y) < \sigma(x,y) + \varepsilon$ következik. Ebből a minimalitási tulajdonságból a ρ_b metrika egyértelműsége nyilvánvaló. $\square$

12.3.4. Definíció (Származtatott belső metrika). A 12.3.3. Tétel szerinti ρ_b metrikát a ρ által származtatott belső metrikának, vagy egyszerűen csak az (X,ρ) metrikus tér belső metrikájának nevezzük.

Megjegyzés. A $\rho \le \rho_b$ egyenlőtlenség miatt a belső metrika szerinti topológia mindig legalább olyan finom, mint az eredeti metrikus topológia. Könnyű olyan metrikus teret mutatni, ahol valódi módon finomabb: például a $\{0\} \cup \cup \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ halmazon a számegyenesből örökölt metrika által származtatott belső metrika diszkrét. Ahhoz, hogy a belső metrikára való áttéréskor a topológia ne változzon, a térnek „szép” lokális tulajdonságokkal kell bírnia. A pontos feltételekkel itt nem foglalkozunk, mert a belső metrikát csak néhány konkrét metrikus tér esetében fogjuk vizsgálni.

12.3.5. Példa. Tekintsük a d-dimenziós gömbi teret, azaz egy $(d+1)$-dimenziós V euklideszi vektortér S egységgömbjét (l. 4.7). Jelöljük ρ-val az euklideszi távolság megszorítását S-re. Ekkor ρ nem belső metrika S-en, de a ρ_g gömbi távolság az, sőt $\rho_g = \rho_b$. A következő lemma szerint ez az utóbbi egyenlőség lényegében a gömbi háromszög-egyenlőtlenségnek és a két metrika 4.7.6. Lemmából könnyen következő $\lim_{\rho\to 0}(\rho_g/\rho) = 1$ viszonyának köszönhető.

12.3.6. Lemma. *Legyen ρ és σ két metrika az X halmazon, amelyekre $\rho \le \le \sigma$. Tegyük föl, hogy $\sigma = f \circ \rho$, ahol az f függvény jobbról differenciálható a 0 pontban és $f'(0) = 1$. Ha emellett σ belső metrika, akkor $\sigma = \rho_b$.*

Bizonyítás: Csak azt kell megmutatnunk, hogy $\sigma \le \rho_b$. Ehhez elegendő belátni, hogy bármely rögzített $x, y \in X$, $x \ne y$, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $\sigma(x,y) < \rho_b(x,y) + \varepsilon$. Feltehetjük, hogy $\rho_b(x,y) < +\infty$.

Legyen $\varepsilon' = \varepsilon/(\rho_b(x,y)+1)$, ehhez $f(0) = 0$ és $f'(0) = 1$ miatt választhatunk olyan pozitív δ számot, hogy $x < \delta$ esetén $f(x) \le (1+\varepsilon')x$ teljesüljön. A ρ_b metrika belső volta miatt δ-hoz található olyan $n \in \mathbf{N}$ és $x = x_0$, x_1, $\dots$, $x_n = y$ pontsorozat, hogy minden i-re $\rho_b(x_{i-1}, x_i) < \delta$ (annál inkább $\rho(x_{i-1}, x_i) < \delta$), és $\sum_{i=1}^n \rho_b(x_{i-1}, x_i) < \rho_b(x,y) + 1$. Ekkor

$$\sigma(x,y) \le \sum_{i=1}^n \sigma(x_{i-1}, x_i) \;=\; \sum_{i=1}^n f\big(\rho(x_{i-1}, x_i)\big) \;\le\; (1+\varepsilon') \sum_{i=1}^n \rho(x_{i-1}, x_i) \;\le$$

$$\le (1+\varepsilon') \sum_{i=1}^n \rho_b(x_{i-1}, x_i) \;<\; (1+\varepsilon')\big(\rho_b(x,y)+1\big) \;=\; \rho_b(x,y) + \varepsilon\,. \square$$

A természetes metrikával ellátott $\mathbf{H}^d$ metrikus térben a szférák maguk is metrikus terek a befoglaló térből örökölt metrikával. A 12.3.3. Tétel alapján a szférákon létezik egy egyértelműen meghatározott belső metrika. Az alábbi tétel geometriailag jellemzi a szférák belső metrikáját.

12.3.7. Tétel. *Ha P és Q az $S \subset \mathbf{H}^d$ szféra két különböző pontja, akkor S belső metrikája szerint P és Q távolsága egyenlő a P-n és Q-n áthaladó főciklus P és Q közti (kör esetén rövidebbik) ívének ívhosszával.*

Bizonyítás: A 12.3.6. Lemmát alkalmazzuk $X = S$-re olyan szereposztással, hogy ρ a $\mathbf{H}^d$-ből örökölt metrikát jelöli, σ pedig a főciklusok ívhossza szerinti távolságot. Megelőlegezzük azt tényt, hogy σ valóban metrika, ez ugyanis könnyen adódik majd az (erre a tételre nem támaszkodó) 12.3.8. Tétel következményeként.

A két metrikát összekapcsoló f függvényt előállítottuk a 11.4.3.(2), 11.4.6.(2) és 11.4.7.(2) Tételekben:

– az r sugarú gömb esetében $f(x) = 2\,\mathrm{sh}\, r\, \sin^{-1} \dfrac{\mathrm{sh}(x/2)}{\mathrm{sh}\, r}$,

– az r sugarú hiperszféra esetében $f(x) = 2\,\mathrm{ch}\, r\, \mathrm{sh}^{-1} \dfrac{\mathrm{sh}(x/2)}{\mathrm{ch}\, r}$,

– a paraszféra esetében $f(x) = 2\,\mathrm{sh}(x/2)$.

Mindhárom függvényre könnyen ellenőrizhető módon teljesülnek a 12.3.4. Lemma feltételei, ezért a lemma alapján a szférák belső metrikáját valóban a főciklusok mentén mért ívhossz adja. □

A főciklusok ívhosszával mint távolsággal (azaz 12.3.7 szerint a belső metrikával) ellátott szférák a klasszikus geometriai terekkel izometrikusak, erről szól utolsó tételünk. A tétel második állítása Bolyai nevezetes tétele a paraszféra belső geometriájáról, amelyet axiomatikus alapon bizonyított be a háromdimenziós tér esetében.

12.3.8. Tétel. *A szférák belső geometriája gömbi, euklideszi, illetve hiperbolikus geometria. Pontosabban, legyen a d-dimenziós $\mathbf{H}^d$ hiperbolikus térben fekvő S szféra ellátva a belső metrikájával, ekkor:*

(1) *ha S gömb és a sugara r, akkor S izometrikus az euklideszi értelemben $\mathrm{sh}\, r$ sugarú $(d-1)$-dimenziós gömbi térrel,*

(2) *ha S paraszféra, akkor S izometrikus a $(d-1)$-dimenziós euklideszi térrel,*

(3) *ha S hiperszféra és a sugara r, akkor S izometrikus azzal a $(d-1)$-dimenziós hiperbolikus térrel, amelyben a természetes távolságegység* $\operatorname{ch} r$*-szeresét használjuk a távolság mértékegységeként.*

Bizonyítás: (1): Használjuk a Z hiperboloidmodellt az $\mathbf{R}^{d,1}$ standard Minkowski-térben. Feltehetjük, hogy S középpontja a $(0,\dots,0,1) \in Z$ pont, ekkor S-et az $x_{d+1} = \operatorname{ch} r$ affin hipersík metszi ki Z-ből. Vetítsük S-et az x_{d+1} koordinátatengely irányában a többi tengely által kifeszített $x_{d+1} = 0$ hipersíkra. Az S elemeit $(\mathbf{x}, \operatorname{ch} r)$ alakban írva a vetítést a $v : (\mathbf{x}, \operatorname{ch} r) \mapsto \mathbf{x}$ formula adja meg, és ebből nyilvánvaló, hogy a $v(S)$ halmaz az origó körüli $\operatorname{sh} r$ sugarú gömb az $x_{d+1} = 0$ térszerű hipersíkban, azaz d-dimenziós euklideszi vektortérben. A 11.4.3.(1)-beli ívhosszformulából következik, hogy v izometria.

(2): A hiperboloidmodell Z alaphalmazából S-et most egy V fényszerű hipersíkkal párhuzamos T affin hipersík metszi ki. A q kvadratikus alak V-n elfajuló pozitív szemidefinit, magtere az $U = V \cap V^{\perp}$ egydimenziós altér. Válasszunk ki T-ben egy tetszőleges $(d-1)$-dimenziós E affin alteret, amelynek az iránya független U-tól, és legyen $v : T \to E$ az U irányú vetítés. Az U altér a hiperboloid egy ideális pontját reprezentálja, tehát az U-val párhuzamos T-beli egyenesek S-et egyetlen pontban döfik. Ezért $v|_S$ bijekció S és E között. A q kvadratikus alak pozitív definit az $\overrightarrow{E} \leq V$ altéren, tehát q megszorítása E-t euklideszi térré teszi.

Amikor a 11.4.2 szerinti ívhosszképletet egy S-beli $\mathbf{r}$ paraméteres görbére alkalmazzuk, az $\mathbf{r}'(t)$ deriváltvektorok minden t-re a V altérben fekszenek. Miután U a $q|_V$ kvadratikus alak magja, az U irányú vektorok hozzáadása nem befolyásolja q értékét. Ezért az E-beli $v \circ \mathbf{r}$ görbe ívhosszképletében az integrandus ugyanaz a függvény, mint az $\mathbf{r}$ görbéében:

$$q\big((v \circ \mathbf{r})'(t)\big) = q\big(v(\mathbf{r}'(t))\big) = q\big(\mathbf{r}'(t)\big)\,.$$

Az S-beli paraciklusokat U-val párhuzamos kétdimenziós affin alterek metszik ki Z-ből, ezért a v vetítésnél keletkező E-beli vetületeik egyenesek. A $v|_S : S \to E$ vetítés tehát ívhossztartó módon képezi az S-beli paraciklusokat az E-beli egyenesekre. Ez azt jelenti, hogy v izometria a belső metrikával ellátott S paraszféra és az E euklideszi tér között.

(3): Jelöljük H-val az S hiperszféra alaphipersíkját, és tekintsük a H-ra történő p_H merőleges vetítést. A $p_H|_S : S \to H$ vetítés S tengelyei mentén történik, ezért bijektív, és S főciklusainak a vetületei egyenesek H-ban. A 11.4.6.(1) Tétel szerint $p_H|_S$ izometria a belső metrikával ellátott S és a természetes metrika $\operatorname{ch} r$-szeresével ellátott H hiperbolikus tér között. □

Megjegyzés. A hiperbolikus térben tehát a szférák képében megjelenik mindhárom klasszikus geometriai rendszer, mégpedig az összes olyan változatban, amelyben a görbület legalább -1, azaz legalább akkora, mint a befoglaló tér

görbülete. Valóban, a hiperszférák görbülete $(-1/\operatorname{ch}^2 r)$ a $[-1,0)$ intervallumban, a gömbök görbülete $(1/\operatorname{sh}^2 r)$ a $(0,+\infty)$ intervallumban vesz fel minden lehetséges értéket, a paraszférák görbülete pedig 0.

Tárgymutató

24-cella 6.3.19
120-cella 6.3.19
600-cella 6.3.19

A, Á

affin bázis 1.3.14, 1.7.7
affin burok 1.3.6
affin csoport 1.1.6
affin ekvivalencia 9.1.14
affin forma 1.2.4
affin geometria alaptétele 1.6.7–8
affinitás 1.1.6, 1.7.7
affin kombináció 1.3.1, 1.7.7
affin koordinátarendszer 1.1.9, 1.3.17
affin leképezés 1.1.3
affin leképezés linearizáltja 1.1.3
affin szimmetria 1.2.15
affin tér 1.1.1
alapegyenes, hiperciklusé 11.1.10
alapfogalom 0.1
alapgömb, inverzióé 5.2.1
alaphipersík, hiperszféráé 12.1.12
alappontok 5.4.2
állandó szélességű test 7.2.7
általános helyzetű pontok 9.3.9
altér, affin 1.2.1, 1.7.7
altér, gömbi 4.7.1
altér, hiperbolikus 10.1.1
altér, projektív 8.1.3
Apollóniosz-kör 5.4.2
aszimptota 9.1.21
aszimptotikus háromszög 11.5.7
aszimptotikus konvex sokszög 11.5.7
átlagos szélesség 7.2.3
atlasz 8.2.4
axióma 0.1

B

Banach–Hahn-tétel 2.4.2
Banach-féle fixponttétel 4.6.7
baricentrikus koordináták 1.4.10, 1.7.7
belső geometria 0.3, 12.3.8
belső metrika 12.3.1
Birkhoff-politóp 3.2.5
Blaschke kiválasztási tétele 7.3.8
Blaschke tétele a gömbről 7.5.9
Bolyai-féle abszolút szinusztétel 11.4.5
Brianchon tétele 9.4.7
Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség 7.6

C

Carathéodory tétele 2.2.1
Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség 4.1.2
Cavalieri-elv 7.1.1
Cayley–Klein-modell 10.1.2
Cayley-féle távolságformula 10.1.12
centrális vetítés 8.3.10
Ceva tétele 1.5.3
ciklus 11.1.10, 11.2.8
Clifford-eltolás 4.7.12
Clifford-párhuzamos 4.7.15, 8.2.7

Cs

csavarmozgás 4.4.8

csoporthatás 6.1.1
csúcs, konvex halmazé 2.5.1
csúcs, konvex poliéderé 3.1.9
csúcsalakzat 6.3.7
csúsztatva tükrözés 4.4.8, 11.2.9

D

defektus 11.5.10
derékszögű hiperbola 9.3.17
Desargues-involúció 9.3.14
Desargues involúciótétele 9.3.13, 9.3.15
Desargues tétele, affin 1.5.6
Desargues tétele, projektív 8.5.2
dilatáció 1.1.10
dimenzió, affin téré 1.1.1
dimenzió, konvex halmazé 2.3.4
dimenzióformula 8.1.5
direkt szorzat, affin tereké 1.1.2
dodekaéder 6.2.8
duális affin formák 1.3.20
duális kombinatorikai szerkezet 3.2.9
duális projektív tér 8.1.2
dualitás elve 8.3.5

E, É

egyenes, affin 1.1.1
egyenes, hiperbolikus 10.1.1
egyenes, projektív 8.1.3
egyköpenyű hiperboloid 9.1.16
egyparaméteres mozgáscsoport 11.2.5, 11.2.7
egyparaméteres transzformáció-csoport 8.7.9, 10.2.16
egységvektor 0.2.2
egyszeresen tranzitív csoporthatás 6.1.14
ellipszis 9.1.16, 9.1.20–21
ellipszoid 9.1.16
ellipszoidtest 2.1.3, 2.5.7, 9.2.17
elliptikus izometria 12.2.7
elliptikus körsor 5.5.2
elliptikus paraboloid 9.1.16
elliptikus projektivitás 8.7.6, 11.2.4
eltolás, affin térben 1.1.10
eltolás, euklideszi térben 4.2.8
eltolás, hiperbolikus síkon 11.2.1
eltolás, hiperbolikus térben 10.1.11
elválasztásfogalom, projektív 8.2.7
elválasztás hipersíkkal 2.4.1
elválasztás hipersíkkal, szigorú 2.4.1
érintkezés, gömböké 5.1.8
érintkezés, hipergömböké 5.1.6
érintő 9.2.6
érintőhipersík 5.1.5, 9.2.9
érintőtér 4.7.2, 10.3.14
érintővektor 4.7.2, 10.3.14
euklideszi ekvivalencia 9.1.17
euklideszi tér 4.2.1
euklideszi vektortér 0.2.6, 4.1.1
Euler-formula 3.3.1
Euler-hipersík 3.3.2
extremális pont 2.5.6

F

faktortér, affin téré 1.1.2
Fano tétele 8.6.17
félegyenes, affin 1.8.6
félegyenes, hiperbolikus 10.1.1
felező merőleges hipersík 4.3.13, 10.1.8
félsík, affin 1.8.6
félsík, hiperbolikus 10.1.1
felszín, gömböké 7.1.18
felszín, konvex testé 7.1.16
felszín, politópé 7.1.12
féltér, affin 1.8.6
féltér, hiperbolikus 10.1.1
fénykúp 10.3.3
fényszerű 10.3.3
főciklus 12.1.13
fókusz 9.1.21

folytonos leképezés affin terek között 1.8.13
fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség 10.3.4
forgatás, hiperbolikus síkon 11.2.2
forgatva tükrözés 4.4.2
főtengelytétel 9.1.18
Frégier-pont 9.4.14
Frégier tétele 9.4.13
független hipersíkok 1.2.6
független pontok affin térben 1.3.13
független pontok projektív térben 8.2.11

G

Gauss–Bonnet-tétel 11.5.10
Gauss-görbület 0.3, 11.3
Girard-formula 0.3.10
gömb 4.6.9, 12.1.12, 12.3.8
gömbfelület belső geometriája 0.3
gömbháromszög 0.3.2
gömbi körsor 5.5.2
gömbi koszinusztétel, oldalakra 0.3.4, 4.7.9
gömbi koszinusztétel, szögekre 0.3.8
gömbi szinusztétel 0.3.3
gömbi távolság 4.7.5
gömbi tér 4.7.1
gömbi tükrözés 5.2.14
gúla 3.2.5

H

harmonikus involúció 8.6.12
harmonikus négyes 8.6.9
harmonikus társ 8.6.9
hasáb 3.2.5
hasonlóság 4.6.1
hatvány 5.1.12
hatványhipersík 5.1.15
Hausdorff-távolság 7.3.1
Helly tétele 2.2.5, 2.2.7
helyvektor 0.2.1, 1.1.2
Hilbert-féle axiómarendszer 0.1, 10.4
hiperbola 9.1.16, 9.1.20–21
hiperbolikus izometria 12.2.7
hiperbolikus körsor 5.5.2
hiperbolikus koszinusztétel, oldalakra 10.1.16, 10.3.21, 11.3.1
hiperbolikus koszinusztétel, szögekre 11.3.3
hiperbolikus paraboloid 9.1.16
hiperbolikus projektivitás 8.7.6, 11.2.4
hiperbolikus szinusztétel 11.3.2
hiperbolikus távolság 10.1.13
hiperbolikus tér 10.1.1, 10.4.1
hiperboloidmodell 10.3.6
hiperciklikus koordináták 11.4.8
hiperciklus 11.1.10
hiperciklusív hossza 11.4.6
hipergömb 4.6.9
hiperlap, konvex halmazé 2.5.1
hiperlap, konvex poliéderé 3.1.3
hipersík, affin 1.2.3
hipersík, hiperbolikus 10.1.1
hipersík, ideális 8.4.1
hipersík, projektív 8.1.3
hipersík, sugárnyalábra támaszkodó 12.1.10
hipersíksor 8.1.4
hiperszféra 12.1.12, 12.3.8
homeomorfizmus 1.8.14
homogén koordináták 8.2.5
homotécia 1.1.10
Hopf-féle körrendszer 4.8.3, 8.2.7

I, Í

ideális háromszög 11.5.7
ideális határ 10.1.19
ideális pont 8.4.1
időszerű 10.3.3
ikozaéder 6.2.8

ikozaédercsoport 6.2.9
invariáns halmaz 6.1.3
inverzió 5.2.1
inverzív bővítés 5.3.1
inverzív csoport 5.3.2
inverzív tér 5.3.1
involúció 8.6.11
irányítás, affin téré 1.8.1
irányítás, vektortéré 0.2.9
irányítástartó affinitás 1.8.4
irányítástartó izometria 10.4.2
irányítástartó Möbius-transzformáció 5.3.12
irányvektor 4.3.2, 4.7.3, 10.3.15
ívhossz, térszerű görbéé 11.4.2
ívhossz szerinti paraméterezés 10.3.16
izodiametrikus egyenlőtlenség 7.6.1
izometria 4.2.7
izometriacsoport 4.2.7
izoperimetrikus egyenlőtlenség 7.6.2

J

Jacobi-azonosság 0.2.18
Jordan-mérték 7.1.1

K

kanonikus kiterjesztés, izometriáé 12.2.2
keresztpolitóp 3.2.5
kétköpenyű hiperboloid 9.1.16
kettős gúla 3.2.5
kettősviszony 8.6.1
kettősviszony, köri 9.4.18
kettősviszony, kúpszeleti 9.4.3
kifejtési tétel 0.2.17
kistengely 9.1.21
kocka 6.2.8
kocka, d-dimenziós 6.3.6
kollineáció, affin térben 1.6.1
kollineáció, projektív térben 8.5.3
kombinatorikai szerkezet, politópé 3.2.9
komplementer affin alterek 1.2.12
komplementer főkör 4.8.6
komplex ellipszis 9.1.16
komplexifikáció 8.2.14, 8.3.14, 9.1.23, 9.1.24
komplex parabola 9.1.16
koncentrikus paraciklusok 11.1.10
koncentrikus paraszférák 12.1.12
konfokális kúpszeletek 9.3.18
konform modell 10.2.13
kongruencia 10.1.3, 10.2.5, 10.3.8
konjugált gömbi körsorok 5.5.4
konjugált pontok 9.2.1
konjugált síksorok 5.5.3
konvex burok 2.1.6
konvex halmaz 2.1.2
konvex kombináció 2.1.7
konvex kúp 3.1.3
konvex poliéder 3.1.1
konvex poliéderkúp 3.4.15
konvex test 7.1.6
köri pontok 9.3.5
körív hossza, hiperbolikus síkon 11.4.3
körlap területe, hiperbolikus síkon 11.5.11
korlátos halmaz affin térben 1.8.8
korrespondencia 11.1.9, 12.1.11
körsor 5.4.3, 8.7.9, 9.3.7, 11.1.6
körsor, Apollóniosz-féle 5.4.3
körsor, érintkező 5.4.3
körsor, koncentrikus 5.4.3
körsor, metsző 5.4.3
Krein–Milman-tétel 2.5.9
kúp 9.1.9
kúpszelet 9.1.11
kúpszeleti involúció 9.4.11
kúpszeleti projektivitás 9.4.5
kúpszeletsor 9.3.1
kvadratikus alak 9.1.1, 10.3.1

kvadratikus alak diagonalizálása 9.1.7
kvaterniók 4.5.7–8

L

lap, konvex halmazé 2.5.1
lap, konvex poliéderé 3.1.2
lapháló 3.1.12
lapzászló 6.3.1
Legendre szögtételei 11.3.9
Leonardo da Vinci tétele 6.2.4
lineáris kiterjesztés, affin leképezésé 1.7.5
lineáris kiterjesztés, affin téré 1.7.1
lineáris tükrözés 4.3.9
Lorentz-csoport 10.3.5
Lorentz-transzformáció 10.3.5
loxodromikus transzformáció 8.7.7, 12.2.11

M

másodrendű görbe, affin 9.1.16
másodrendű görbe, projektív 9.1.3, 9.1.8
másodrendű hiperfelület, affin 9.1.13
másodrendű hiperfelület, projektív 9.1.3
másodrendű hiperfelület képe 9.1.4
másodrendű hiperfelületsor 9.3.1
másodrendű pontpársor 9.3.1
Menelaosz tétele 1.5.4
merőleges körsorok 5.4.4
merőlegesség 4.3.7, 5.1.10, 10.1.6
merőleges vetítés 4.3.3, 12.1.17
Minkowski-kombináció 2.1.4
Minkowski-összeg 2.1.4
Minkowski-tér 10.3.2
Möbius-csoport 5.3.2, 10.2.1
Möbius-transzformáció 5.3.2, 8.7.4
mozgáscsoport 6.2.6

N

nagytengely 9.1.21
norma 4.1.2, 10.3.14
normálegyenlet, hipergömbé 5.1.18
normális felbontás 7.4.8–9
normális kúp 7.4.1
normálvektor 4.3.2, 10.3.11, 12.1.4

O

oktaéder 6.2.8
oktaédercsoport 6.2.9
orbit 6.1.5, 8.7.9, 11.2.8, 12.2.13
ortocentrikus pontnégyes 9.3.17
ortogonális csoport 4.1.6
ortogonális direkt összeg 4.1.4
ortogonális felbontás 4.1.4
ortogonális izometria 4.2.9
ortogonális komplementer 4.3.1
ortogonális mátrix 4.1.6
ortogonális szimmetria 4.3.3
ortogonális transzformáció 4.1.5
ortonormált koordinátarendszer 4.2.3
ortonormált vektorrendszer 4.1.3
osztóviszony 1.4.1

P

Papposz–Steiner-tétel 8.6.4
Papposz tétele, affin 1.5.5
Papposz tétele, projektív 8.5.1
parabola 9.1.16, 9.1.20–21, 9.2.20
parabolasereg 9.3.18
parabolikus izometria 12.2.7
parabolikus körsor 5.5.2
parabolikus projektivitás 8.7.6, 11.2.4
paraciklikus eltolás 11.2.3, 12.2.5
paraciklikus koordináták 11.4.8, 11.4.11
paraciklus 11.1.10
paraciklus-téglalap 11.5.1
paracikluscikk 11.5.2

paraciklusív hossza 11.4.7
paraciklus középpontja 11.1.10
paralelotóp 3.2.5
paralleltartomány 7.1.7, 7.4.9
paraméteres egyenes 10.3.15
paraméteres főkör 4.7.3
paraszféra 12.1.12, 12.3.8
paraszféra középpontja 12.1.12
párhuzamosság, affin 1.2.8
párhuzamosság, hiperbolikus 11.1.1, 12.1.1
párhuzamossági axióma 0.1, 1.2.9, 10.1.1, 10.4
párhuzamossági szög 11.3.6
párhuzamossági távolság 11.3.8
párhuzamos szelők tétele 1.5.1
párhuzamos vetítés 1.2.14
Pascal tétele 9.4.6
perspektív háromszögek 8.5.2
perspektivitás 8.3.10
Poincaré-féle félgömbmodell 10.2.14
Poincaré-féle féltérmodell 10.2.15
Poincaré-féle gömbmodell 10.2.2
Poincaré-kiterjesztés 5.3.9, 8.7.4, 12.2.5
poláris 9.2.3
poláris gömbháromszög 0.3.6
poláris halmaz 3.4.1
poláris kúp 3.4.12
poláris triéder 0.3.6
polaritás 9.2.3, 9.2.5
polárkoordináták, hiperbolikus síkon 11.4.8
poliédercsoportok 6.2.9
politóp 3.2.1
politóp-approximáció 7.1.8
pólus, hipersíké 9.2.3
pólus, inverzióé 5.2.1
pontonkénti stabilizátor 12.2.1
pozitív affin bázis 1.8.2
pozitív bázis 0.2.9
pozitív Lorentz-transzformáció 10.3.5
projektív bázis 8.2.8
projektív csoport 8.3.7
projektív ekvivalencia 9.1.6
projektív geometria alaptétele 8.5.6–7
projektív invariáns 9.1.6
projektivitás 8.3.3
projektív képződmény 8.7.17–19, 9.1.12, 9.2.19, 9.3.11
projektív kiterjesztés 8.4.4
projektív koordináták 8.2.10
projektív leképezés 8.3.1
projektív lezárás 8.4.1, 9.1.13
projektív modell 10.1.1
projektív sík axiómái 8.5
projektív tér 8.1.1
projektív transzformáció 8.3.3

Q

q-ortogonalitás 10.3.1

R

Radon tétele 2.2.4
relatív belső pont 2.3.6
relatív határ 2.3.6
rend, határponté 2.5.1
reprezentáns vektor 8.1.1
résztér 8.2.13
Reuleaux-háromszög 7.2.8
Riemann-számgömb 8.2.7, 8.4.3, 8.7.4

S

Schläfli-szimbólum 6.3.10
Schläfli tétele 6.3.20
sík, affin 1.1.1
sík, projektív 8.1.2, 8.5
síksor 5.5.1
skaláris szorzat 0.2.5, 4.1.1 10.3.1
speciális részcsoport 12.2.12
stabilizátor 6.1.9, 12.2.1

standard d-dimenziós kereszt-politóp 6.3.6
standard d-kocka 6.3.6
standard d-szimplex 6.3.6
Steiner–Minkowski-formula 7.4.13
Steiner–Minkowski-tétel 7.4.11
Steiner-centrum 8.7.16
Steiner-szimmetrizáció 7.5.1
Steiner-tengely 8.7.16, 9.4.9
sugár, hiperciklusé 11.1.10
sugár, hiperszféráé 12.1.12
sugárnyaláb 12.1.9
sugársor, affin 1.5.2
sugársor, hiperbolikus 11.1.5
sugársor, projektív 8.1.4
súlypont 1.4.5

Sz

szabad csoporthatás 6.1.13
szabad vektor 0.2.1, 1.1.2
szabályos d-dimenziós kereszt-politóp 6.3.6
szabályos d-szimplex 6.3.6
szabályos politóp 6.3.3
szabályos tetraéder 6.2.8
szakasz, affin térben 2.1.1
szakasz, gömbi 4.7.4
szakasz, hiperbolikus 10.1.1
származtatott belső metrika 12.3.4
szélesség 7.2.1
szelet, másodrendű hiperfelületé 9.1.11
szemiaffin leképezés 1.6.5
szemidirekt kiegészítő 4.2.13
szemidirekt szorzat 4.2.13
szemilineáris leképezés 1.6.4
szemiprojektív transzformáció 8.5.4
szféra 12.1.12, 12.2.13, 12.3.8
szfératartomány 12.1.16, 12.1.18
szimmetriacsoport 6.2.6
szimmetrikus bilineáris függvény 0.2.5, 4.1.1, 9.1.2
szimplex 2.2.2
szög 4.1.2, 4.3.5, 4.3.7, 4.7.7, 5.1.11, 10.1.15, 10.2.12, 10.3.19, 12.1.6
szögtöbblet 0.3.9–10

T

támaszféltér 2.4.8
támaszhipersík 2.4.8
tartóegyenes 5.5.1
tartópont 5.4.3, 5.5.2
távolság, hiperboloidmodellben 10.3.12
távolság, konform modellben 10.2.9
távolság, projektív modellben 10.1.12
távolság, ultraparallel hipersíkoké 12.1.7
teljes négyoldal 8.6.16
teljes négyoldal tétele 8.6.18
teljes négyszög 8.6.16
tengely, ciklusé 11.1.10
tengely, euklideszi izometriáé 4.4.6
tengely, szféráé 12.1.12
tengelyes tükrözés, hiperbolikus síkon 11.2.1
térfogat 7.1.2
térfogat, gömbtesteké 7.1.11
térkép 8.2.4
természetes affin struktúra 1.1.2, 8.2.2
természetes felbontás, euklideszi izometriáé 4.4.6
természetes távolságegység 10.1.13
természetes területegység 11.5.5
természetes topológia, affin téré 1.8.9
természetes topológia, projektív téré 8.2.7
térszerű 10.3.3
térszerű görbe 11.4.1
tetraédercsoport 6.2.9

törtlineáris függvény 8.7.1
transzformációcsoport 6.1.1
tranzitív csoporthatás 6.1.7
triéder 0.3.1
tükrözés, euklideszi 4.3.9
tükrözés, hiperboloidmodellben 10.3.11
tükrözés, konform modellben 10.2.6
tükrözés, projektív modellben 10.1.5

U

ultraparallel egyenesek 11.1.1
ultraparallel hipersíkok 12.1.3

V

valódi lap 2.5.1
valós tengely 9.1.21
végtelen távoli pont 10.1.19
vegyes szorzat 0.2.15
vektor 0.2.1
vektor szorzása skalárral 0.2.4
vektoriális szorzat 0.2.12
vektorizáció 1.1.1
vektorok összeadása 0.2.3
vetítés, affin altérre 1.2.13
vetítés, kúpszeletről egyenesre 9.4.4
vetítés, ortogonális 4.3.3
vetítés, sztereografikus 5.2.11
vezéregyenes 9.1.21
vonalkúpszelet 9.2.18

Z

zéróhalmaz 1.2.4